

基于多路欠采样的多分量 LFM 信号参数估计

董宁斐 刘光祖 束 锋 王建新

(南京理工大学电子工程与光电技术学院, 南京, 210094)

摘 要: 针对多分量线性调频(Linear frequency modulated, LFM)信号, 提出了一种基于多路欠采样的参数估计方法。采样过程由多个采样速率相同、采样时刻不同的模数转换器实现, 总采样率可以低于信号的奈奎斯特采样率。基于欠采样序列乘积型模糊函数的单频特性, 可以通过峰值检测实现调频斜率的估计。根据估计出的调频斜率对各路欠采样序列进行解线调处理, 可得到多频正弦信号。结合矩保持问题的求解方法以及对超定方程组的求解, 可以根据解线调后的各路序列估计出原始 LFM 信号各分量的初始频率。本文方法能够根据亚奈奎斯特采样样本实现 LFM 信号的参数估计, 并且运算简单、易于实现。仿真实验验证了其有效性和准确性。

关键词: 线性调频信号; 参数估计; 欠采样; 解线调

中图分类号: TN911.7; TN958 **文献标志码:** A

Parameter Estimation of Multi-component LFM Signal with Multiple Subsampling Channels

Dong Ningfei, Liu Guangzu, Shu Feng, Wang Jianxin

(School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China)

Abstract: A parameter-estimation method based on subsampling for multi-component linear frequency modulated (LFM) signal is proposed. The received signal is subsampled by multiple analog to digital converters (ADCs) with identical sampling rate and different sampling time. The total sampling rate of all ADCs is lower than the Nyquist rate of original LFM signal. As the product ambiguity function of a single subsampling sequence is a single tone, the chirp rate is estimated by searching for the peak of the product ambiguity function. Then dechirp operation is conducted for all subsampling sequences to obtain multitone signals, from which the initial frequencies of LFM components are estimated by solving moment-preserving problem and over-determined equations. In the proposed method, parameters of the LFM signal are estimated from sub-Nyquist samples, and the estimation is easily realized with simple operations. Simulation results verify the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Key words: linear frequency modulated signal; parameter estimation; subsampling; dechirp

引 言

线性调频(Linear frequency modulated, LFM)信号目前广泛应用于雷达、声呐和通信系统中, 是脉

压缩雷达经常采用的信号之一。作为大时宽带宽积信号, LFM 信号通常具有超宽带特性, 对其进行 Nyquist 采样是当前模数转换器面临的巨大挑战。基于中国余数定理, 文献[1]提出了一种基于欠采样的宽带 LFM 信号参数估计方法, 首先利用 FFT、谱峰检测和中国余数定理进行宽带 LFM 信号的调频斜率无模糊估计, 然后, 在根据估计出的调频斜率对两路采样数据进行解线调处理之后, 再利用类似的方法进行信号的初始频率无模糊估计。随后, 文献[2]对上述方法进行改进, 提出了一种针对 LFM 实信号的三路欠采样系统和参数估计方法, 根据单路欠采样信号估计出调频斜率后, 对三路采样速率不同的欠采样信号进行解线调处理, 然后运用余数定理估计信号的初始频率。对于多分量 LFM 信号, 文献[3]中提出了一种利用广义稳健余数定理同时对多个 LFM 分量的调制斜率和初始频率进行估计的方法, 不过该方法要求各分量的调频斜率之间有明显差距。然而, 实际情况下, 有些雷达回波信号可能是调频斜率相同的多分量 LFM 信号, 例如逆合成孔径雷达对高速运动目标的回波^[4,5], 而上述方法均不适用于该类型的 LFM 信号。

基于压缩感知(Compressed sensing, CS)理论^[6,7], 有学者指出, 利用信号在某个变换域的稀疏性, 也可以根据低速随机采样值实现信号的参数估计。文献[8]提出可以设计完备的匹配字典, 通过从冗余字典中寻找最佳匹配原子来实现 LFM 信号的参数估计。文献[9]利用 LFM 信号在时频域的稀疏性, 在对信号进行压缩采样后直接对其短时傅里叶变换进行重构, 然后利用 Radon 变换对重构的时频平面进行二维搜索, 估计出信号的调频斜率和初始频率。文献[10]利用 LFM 信号在最佳分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier transform, FrFT)域的能量聚集性, 提出构造 FrFT 匹配矩阵进行信号检测和参数估计。该方法利用 CS 重构算法重构出信号在各个阶次 FrFT 矩阵中对应的系数向量, 通过二维搜索得到最佳变换阶次, 从而估计出信号的调频斜率和起始频率。虽然基于 CS 的参数估计方法对于单分量和多分量 LFM 信号同样适用, 但是该类方法均需要采用高复杂度的重构算法^[11,12], 运算量大, 不易实现。

本文提出了一种基于亚奈奎斯特采样的多分量 LFM 信号参数估计方法, 可以对具有相同调频斜率的多个分量进行调频斜率和初始频率估计。采样过程由多个采样速率相同但采样起始点不同的模数转换器(Analog to digital converter, ADC)实现, 直接对 LFM 信号进行欠采样。参数估计过程中, 首先根据单路欠采样序列的乘积型模糊函数(Product ambiguity function, PAF)^[13]来估计信号的调频斜率, 然后根据估计出的调频斜率对各路采样序列进行解线调处理, 解线调后的序列为多频正弦信号。结合文献[14]中矩保持问题(Moment-preserving problem, MPP)的求解方法和文献[15]从多路欠采样序列中重构原始频域稀疏信号的 BigBand 方法, 可以根据解线调后的各路序列估计出原始 LFM 信号各分量的初始频率。

1 信号模型与采样框架

假定观测信号 $x(t)$, $t \in [0, T]$ 由多分量 LFM 信号与高斯白噪声组成, 频谱在区间 $[0, f_{\text{nyq}}]$ 内, 其时域模型为

$$x(t) = \sum_{r=1}^K A_r \exp(j\pi\kappa t^2 + j2\pi f_r t + j\varphi_r) + v(t) \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

式中: K 表示信号中的分量个数, A_r , κ , f_r 和 φ_r 分别表示各分量的幅度、调频斜率、初始频率和初始相位, $v(t)$ 表示高斯白噪声。本文对观测信号 $x(t)$ 进行采样的过程如图 1 所示。

该采样系统由 p 个采样率为 f_s ($f_s < f_{\text{nyq}}$) 的低速 ADC 组成, 各路通道的欠采样因子均为 $\beta = f_{\text{nyq}}/f_s$, 即采样过程的总采样率为 $f_{\text{tot}} = pf_{\text{nyq}}/\beta$ 。当 $\beta > p$ 时, 该系统总采样率低于观测信号 $x(t)$ 的奈奎斯特采样率, 实现了对信号的亚奈奎斯特采样。

在第 i ($1 \leq i \leq p$) 个通道中, 先将原始模拟信号延时 $(i-1)\tau$, 然后直接对其以速率 f_s 进行欠采样,

得到序列 $y_i[n]$ 。由于序列 $y_i[n]$ 可理解为以速率 $1/\tau$ 对信号 $x(t)$ 进行均匀采样所得样本的一部分,因此,若延时 τ 大于奈奎斯特采样间隔 $T_{\text{nyq}} = 1/f_{\text{nyq}}$,则在频谱范围 $[1/\tau, f_{\text{nyq}}]$ 内的信息丢失,可能会导致信号参数估计失败。由此可知,延时 τ 需满足 $\tau \leq 1/f_{\text{nyq}}$ 。为简便起见,可设定 $\tau = T_{\text{nyq}}$,则对信号 $x(t), t \in [0, T]$ 进行采样所得到的序列 $y_i[n]$ 可表示

$$y_i[n] = \sum_{r=1}^K A_r \exp(j\pi\kappa(nT_s + i'T_{\text{nyq}})^2 + j2\pi f_r(nT_s + i'T_{\text{nyq}}) + j\varphi_r) + v(nT_s + i'T_{\text{nyq}}) \quad (2)$$

式中 $T_s = 1/f_s, N = T/T_s, i' = i - 1, 0 \leq n \leq N - 1$ 。

2 调频斜率估计

信号 $x(t)$ 的调频斜率可以根据单路通道的欠采样数据进行估计。将图 1 中第一路通道的采样序列 $y_1[n]$ 与其延时共轭 $y_1^*[n - \gamma_1]$ 相乘,可得到

$$R_{\gamma_1}[n] = y_1[n]y_1^*[n - \gamma_1] = \sum_{r=1}^K A_r^2 \exp(j2\pi\kappa\gamma_1 nT_s^2 + j\varphi'_r) + \sum_{r=1}^K \sum_{l=1, l \neq r}^K A_r A_l \exp(j2\pi(\kappa\gamma_1 T_s + f_r - f_l)nT_s + j\varphi''_{r,l}) + \sum_{r=1}^K s_r(nT_s)v^*(nT_s - \gamma_1 T_s) + \sum_{r=1}^K s_r^*(nT_s - \gamma_1 T_s)v(nT_s) + v(nT_s)v^*(nT_s - \gamma_1 T_s) \quad (3)$$

式中: $\varphi'_r = 2\pi f_r \gamma_1 T_s - \pi\kappa\gamma_1^2 T_s^2$; $\varphi''_{r,l} = 2\pi f_l \gamma_1 T_s - \pi\kappa\gamma_1^2 T_s^2 + \varphi_r - \varphi_l$; $s_r(nT_s) = A_r \exp(j\pi\kappa n^2 T_s^2 + j2\pi f_r nT_s + j\varphi_r)$ 。从式(3)可以看出,序列 $R_{\gamma_1}[n]$ 的速率为 f_s ,其右边第 1 项可看作是频率为 $f_c = \kappa\gamma_1 T_s$ 的复正弦信号,其中包含了需要估计的调频斜率 κ 的信息;第 2 项为各个信号分量的交叉项,可看作频率为 $(\kappa\gamma_1 T_s + f_r - f_l)$ 的复正弦杂散信号;第 3 和第 4 项为信号与噪声的交叉项;第 5 项是噪声的自相关项。由于 $v(t)$ 为高斯白噪声,其在不同时刻上的随机变量是独立的,且与各信号分量不相关,因此式(3)右边的最后 3 项均可认为是平坦噪声。根据上述分析可知,若要利用序列 $R_{\gamma_1}[n]$ 的离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)对调频斜率 κ 进行估计,则需要减弱来自信号分量交叉项的干扰。

采样序列 $y_1[n]$ 在 $\gamma_1 T_s$ 时刻的模糊函数(Ambiguity function, AF)切片定义为^[16]

$$AF_y(\gamma_1, k) = \sum_n y_1[n]y_1^*[n - \gamma_1] \exp(j\frac{2\pi nk}{N}) \quad 0 \leq k \leq N' - 1 \quad (4)$$

式中 $N' = f_s/\Delta f, \Delta f$ 表示 $AF_y(\gamma_1, k)$ 的频域分辨率。由式(4)可知, $AF_y(\gamma_1, k)$ 可理解为 $R_{\gamma_1}[n]$ 的离散傅里叶变换。理想情况下,当 $R_{\gamma_1}[n]$ 中有用信号的频率 $f_c = \kappa\gamma_1 T_s$ 小于采样速率 f_s 时, $AF_y(\gamma_1, k)$ 最大峰值的位置是第 $n_f = \langle f_c/\Delta f \rangle = \langle \kappa\gamma_1 N' T_s^2 \rangle$ 个点,其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示四舍五入取整,则通过对 $AF_y(\gamma_1, k)$ 进行峰值搜索可以估计出调频斜率 κ 。然而, $R_{\gamma_1}[n]$ 中的杂散信号及噪声会对该估计过程造成较大影响,导致估计失败率略高。

为了减少杂散和噪声的影响,可以利用序列 $y_1[n]$ 在另一时刻,如 $2\gamma_1 T_s$ 时刻的 AF 切片 $AF_y(2\gamma_1, k), 0 \leq k \leq N' - 1$ 。根据式(3)进行推导可知, $R_{2\gamma_1}[n] = y_1[n]y_1^*[n - 2\gamma_1]$ 中的有用信号是频率为 $2f_c = 2\kappa\gamma_1 T_s$ 的复正弦信号,即当 $2f_c < f_s$ 时, $AF_y(2\gamma_1, k)$ 的最大峰值位置为 $n'_f = \langle 2\kappa\gamma_1 N' T_s^2 \rangle$ 。将 $y_1[n]$ 在 $\gamma_1 T_s, 2\gamma_1 T_s$ 两个不同时刻的 AF 切片对应相乘,可得到乘积型模糊函数为

$$PAF_y(\gamma, k) = AF_y(\gamma_1, k) \cdot AF_y(2\gamma_1, 2k) \quad 0 \leq k \leq N'/2 - 1 \quad (5)$$

式中 $\gamma = (\gamma_1, 2\gamma_1)$, 则 $PAF_y(\gamma, k)$ 在第 $n_f = \langle \kappa\gamma_1 N' T_s^2 \rangle$ 个点处的取值为两个 AF 切片中最大峰值的乘积,而在其他位置的取值为噪声与噪声的乘积或者杂散与噪声的乘积。与单一的 AF 切片相比,

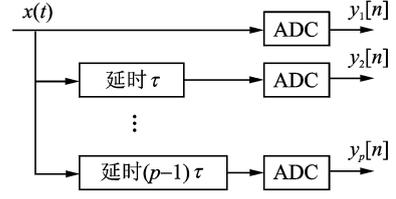


图 1 多路欠采样过程

Fig. 1 Multiple-subsampling system

$PAF_y(\gamma, k)$ 中包含有用信息 $f_c = \kappa\gamma_1 T_s$ 的信号能量得以加强,而杂散和噪声的能量被抑制。

以一个 SNR 为 10 dB 的两分量 LFM 信号为例,其欠采样序列的 AF 切片 $AF_y(\gamma_1, k)$ 和乘积型模糊函数 $PAF_y(\gamma, k)$ 如图 2 所示。由图 2 可知,通过对 $PAF_y(\gamma, k)$ 进行峰值搜索可以有效地对频率 f_c 进行估计,从而估计出调频斜率 $\kappa = f_c/\gamma_1 T_s$,然而其前提条件为 $2f_c < f_s$,即 $\gamma_1 < f_s^2/2\kappa$ 。鉴于调频斜率的取值范围为 $\kappa \in$

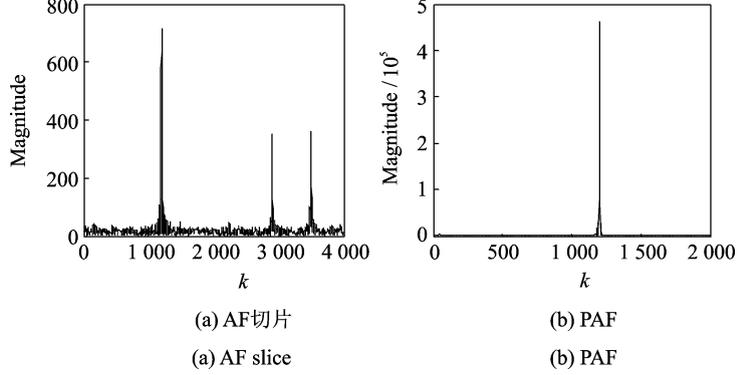


图 2 两分量 LFM 信号的 AF 切片和乘积型模糊函数
Fig. 2 AF slice and PAF of a two-component LFM signal

$[0, \kappa_{\max}]$, 其中 $\kappa_{\max} = \frac{f_{\text{nyq}}}{T}$, 因此延时点数 γ_1 需满足 $\gamma_1 \leq f_s^2/2\kappa_{\max} = T/2\beta T_s$ 。

文献[17]中提到,当利用 AF 切片估计 LFM 信号的调频斜率时,均方根误差反比于 $\gamma_1 T_s (T - \gamma_1 T_s)^{3/2}$, γ_1 的最佳取值为 $\gamma_{\text{AF}} = \langle 0.4T/T_s \rangle$ 。然而,本文利用的是欠采样序列的 AF 切片,需满足 $\gamma_1 \leq T/2\beta T_s$, 因此本文中 γ_1 的最佳取值为 $\gamma_{\text{opt}} = \langle T/2\beta T_s \rangle$ 。

3 初始频率估计

3.1 解线调处理

根据调频斜率的估计值 $\hat{\kappa}$ 对各路欠采样序列 $y_i[n]$ 进行解线调处理,若忽略 $\hat{\kappa}$ 的估计误差,则可以得到

$$\tilde{y}_i[n] = y_i[n] \exp(-j\pi\hat{\kappa}(nT_s + i'T_{\text{nyq}})^2) = \sum_{r=1}^K A_r \exp(j2\pi f_r(nT_s + i'T_{\text{nyq}}) + j\varphi_r) + v'_i(nT_s) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

式中 $v'_i(nT_s) = v(nT_s + i'T_{\text{nyq}}) \exp(-j\pi\hat{\kappa}(nT_s + i'T_{\text{nyq}})^2)$ 依然为高斯白噪声。由式(6)可知,序列 $\tilde{y}_i[n]$ 可以看作是对频率为 f_r 的多频复正弦信号进行速率为 f_s 的采样后所得的序列。由于无法保证欠采样速率 f_s 高于 LFM 信号中各分量的起始频率 f_r , 因此直接对单路序列 $\tilde{y}_i[n]$ 的 DFT 进行幅值搜索来估计 f_r 不可行,但是可以将各路序列 $\tilde{y}_i[n]$ 的 DFT 结合起来进行估计。

若是能够对 LFM 信号 $x(t), t \in [0, T)$ 的奈奎斯特采样样本 $x[n] = x(nT_{\text{nyq}})$ 进行解线调处理,则可以得到

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=1}^K A_r \exp(j2\pi f_r n T_{\text{nyq}} + j\varphi_r) + v'(nT_{\text{nyq}}) \quad 0 \leq n \leq \beta N - 1 \quad (7)$$

式中 $v'(nT_{\text{nyq}}) = v(nT_{\text{nyq}}) \exp(-j\pi\hat{\kappa}(nT_{\text{nyq}})^2)$ 。由式(6,7)可知,已知序列 $\tilde{y}_i[n]$ 可以看作是将未知序列 $\tilde{x}[n]$ 延时 $(i-1)$ 个点后进行 β 倍抽取的结果。若能够根据各组低速序列 $\tilde{y}_i[n]$ 重构出高速未知序列 $\tilde{x}[n]$ 或是直接得到 $\tilde{x}[n]$ 的 DFT, 那么通过在频域进行峰值搜索可以估计出原始 LFM 信号 $x(t)$ 各 LFM 分量的初始频率 f_r 。

3.2 频域重构

令 $\tilde{Y}_i[k], 0 \leq k \leq N-1$ 表示速率为 f_s 的已知序列 $\tilde{y}_i[n]$ 的 DFT, $\tilde{X}[k'], 0 \leq k' \leq \beta N-1$ 表示速率为 f_{nyq} 的未知序列 $\tilde{x}[n]$ 的 DFT, 则有

$$\tilde{Y}_i[k] = (\tilde{X}[k]e^{j2\pi ki'/\beta N} + \tilde{X}[k+N]e^{j2\pi(k+N)l'/\beta N} + \dots + \tilde{X}[k+(\beta-1)N]e^{j2\pi(k+(\beta-1)N)l'/\beta N})/\beta \quad (8)$$

式中 $i' = i - 1$ 。

式(8)中只有左边的 $\tilde{Y}_i[k]$ 项是已知的, 右边的未知非零项个数不超过 β 个, 其中每一个非零项 $\tilde{X}[k']e^{j2\pi k'l'/\beta N}$ 中均包含两个未知变量, 即频点 k' 及频谱值 $\tilde{X}[k']$ 。令 a 表示式(8)右边未知非零项的个数, 则至少需要有 $2a$ 个方程才能对 $2a$ 个未知变量进行求解, 即采样过程中的通道个数需满足 $p \geq 2a$ 。由于信号 $x(t)$ 中包含 K 个初始频率不同的 LFM 分量, 因此 $\tilde{X}[k']$ 中仅包含 K 个谱峰, 大部分的元素可近似为零。若不考虑噪声和频谱泄露的影响, 则 $\tilde{X}[k']$ 的稀疏度为 $K' \leq cK$, 其中 c 表示一个大于 1 的常数。文献[14]指出, 当 $N/K' \geq 2^4$ 时, $a > 2$ 的概率几乎为零; 而当 $N/K' \geq 2^5$ 时, $a > 2$ 的概率更低, 并且 $a > 1$ 的概率也仅有 1% 左右。因此, 通常情况下, 本文所提参数估计方法需要的欠采样通道个数为 $p = 4$; 而对于分量个数 K 足够小的情况, 即比值 N/K' 足够高时, 仅需 $p = 2$ 个通道即可实现参数估计。

对于任意的 $k \in [0, N-1]$, 若 $\sum_{i=1}^p |\tilde{Y}_i[k]| > 0$, 则 $\tilde{X}[k'], k' \in S_k$ 中存在非零元素, 需要根据 $\tilde{Y}_i[k]$ 求出非零元素的取值及其对应的频点, 其中 $S_k = \{k, k+N, \dots, k+(\beta-1)N\}$ 。

若 $a = 1$, 令 s_0 表示式(8)右侧非零项对应的频点, 则有 $\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}[s_0]/\beta$, $\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}[s_0]e^{j2\pi s_0/\beta N}/\beta$ 。此时, 频点 s_0 及其对应的频谱值 $\tilde{X}[s_0]$ 可以根据 $e^{j2\pi s_0/\beta N} = \tilde{Y}_2[k]/\tilde{Y}_1[k]$ 和 $\tilde{X}[s_0] = \beta\tilde{Y}_1[k]$ 估计出来。鉴于该情况下已知项 $\tilde{Y}_1[k]$ 和 $\tilde{Y}_2[k]$ 满足 $|\tilde{Y}_1[k]| = |\tilde{Y}_2[k]|$, 因此该等式可作为判断 a 是否为 1 的条件。

若 $a = 2$, 令 s_1 和 s_2 表示式(8)右侧非零项对应的频点, 则有 $\tilde{Y}_1[k] = (\tilde{X}[s_1] + \tilde{X}[s_2])/\beta$, $\tilde{Y}_2[k] = (\tilde{X}[s_1]e^{j2\pi s_1/\beta N} + \tilde{X}[s_2]e^{j2\pi s_2/\beta N})/\beta$ 。此时, $|\tilde{Y}_1[k]| \neq |\tilde{Y}_2[k]|$, 无法采用 $a = 1$ 时的求解方法, 但是可以将该情况下的求解问题转换为矩保持问题(Moment-preserving problem, MPP)问题, 然后利用已有的解决方法求出未知变量 s_1, s_2 和 $\tilde{X}[s_1], \tilde{X}[s_2]$ 。具体方案如下。

(1) 令 $m_i = \beta\tilde{Y}_{i+1}[k]$, $0 \leq i \leq 2a-1$, 并且用 q_l 和 z_l 分别表示未知变量 $\tilde{X}[s_l]$ 和 $e^{j2\pi s_l/\beta N}$, 其中 $1 \leq l \leq 2$, 则式(8)可写为

$$\begin{aligned} m_0 &= q_1 z_1^0 + q_2 z_2^0 \\ m_1 &= q_1 z_1^1 + q_2 z_2^1 \\ m_2 &= q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 \\ m_3 &= q_1 z_1^3 + q_2 z_2^3 \end{aligned} \quad (9)$$

文献[14]指出, 根据 m_i 求解 q_l 和 z_l 的问题可以看作是 MPP 问题, 并给出了 $a = 2$ 时的解析解如下

$$\begin{aligned} c_d &= \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \\ c_0 &= \frac{1}{c_d} \begin{vmatrix} -m_2 & m_1 \\ -m_3 & m_2 \end{vmatrix}, c_1 = \frac{1}{c_d} \begin{vmatrix} m_0 & -m_2 \\ m_1 & -m_3 \end{vmatrix} \\ z_0 &= \frac{1}{2} [-c_1 - (c_1^2 - 4c_0)^+] , z_1 = \frac{1}{2} [-c_1 + (c_1^2 - 4c_0)^+] \\ q_d &= z_1 - z_0 \\ q_1 &= \frac{1}{q_d} \begin{vmatrix} m_0 & 1 \\ m_1 & z_1 \end{vmatrix}, q_2 = m_0 - q_1 \end{aligned} \quad (10)$$

令 q'_l, z'_l 表示根据式(10)求出的解析解, 则在无噪声的理想情况下, 有 $q'_l = \tilde{X}[s_l]$, $z'_l = e^{j2\pi s_l/\beta N}$ 。然而, 实际情况下必然存在一定的噪声干扰, 则该结果中存在一定的偏差。令 s'_l 表示利用 z'_l 对 $s_l \in \{k, k+N, \dots, k+(\beta-1)N\}$ 进行估计得到的结果。考虑到 MPP 求解的偏差, 可认为 s_l 的实际取值范围为

$$s_l \in \{s'_l - N, s'_l, s'_l + N\} \quad (11)$$

令 $\Gamma_1 = \{s'_1 - N, s'_1, s'_1 + N\}$, $\Gamma_2 = \{s'_2 - N, s'_2, s'_2 + N\}$ 。通过从 Γ_1 和 Γ_2 中分别选出一个元素进行组合,可以得到频点 (s_1, s_2) 的所有可能组合。下面的任务是从这些可能的组合中找出 (s_1, s_2) 的准确取值。

(2) 对于每一个可能的 (s_1, s_2) 组合,式(9)均可看作未知变量为 q_1, q_2 的超定方程组,可以写为 $\mathbf{m} = \mathbf{Z}\mathbf{q}$ 的形式,其中 $\mathbf{m} = [m_0, m_1, m_2, m_3]^T$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, $\mathbf{Z} = [z_1^0, z_2^0; z_1^1, z_2^1; z_1^2, z_2^2; z_1^3, z_2^3]$ 。由于矩阵 \mathbf{Z} 为列满秩矩阵,因此可利用最小二乘法对上述超定方程组进行求解,得到 $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{m}$,其中 $\mathbf{Z}^T = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H$ 为矩阵 \mathbf{Z} 的广义逆矩阵。定义 $e = \|\mathbf{m} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{q}}\|_2$,则所有可能的 (s_1, s_2) 组合中,对超定方程组求解后所得误差 e 最小的组合即为 s_1 和 s_2 的正确组合,同时,根据其对应的最小二乘解 $\hat{\mathbf{q}}$,可以得到 $\tilde{X}[s_1], \tilde{X}[s_2]$ 的估计值。

对于所有的 $k \in [0, N-1]$,分别重复上述求解 $\tilde{X}[k']$, $k' \in S_k$ 的过程,将结果进行整合之后可以得到 $\tilde{X}[k']$, $0 \leq k' \leq \beta N - 1$ 中所有非零元素的取值。由于 $\tilde{X}[k']$ 为奈奎斯特速率序列 $\tilde{x}[n]$ 的 DFT,而 $\tilde{x}[n]$ 由频率为 f_r 的正弦分量组成,因此通过对 $\tilde{X}[k']$ 进行峰值搜索,可以实现对原始多分量 LFM 信号 $x(t)$ 的初始频率估计。

4 算法流程

本文根据欠采样序列 $y_i[n]$ ($1 \leq i \leq p$, $p=4$) 对多分量 LFM 信号 $x(t)$ 进行参数估计的流程如下。

(1) 分别求出采样序列 $y_i[n]$ 在 $\gamma_1 T_s$ 时刻和 $2\gamma_1 T_s$ 时刻的模糊函数切片并将其对应相乘,得到乘积型模糊函数 $PAF_y(\gamma, k)$,然后通过 $PAF_y(\gamma, k)$ 进行峰值搜索实现对信号调频斜率的估计。

(2) 根据调频斜率的估计值 $\hat{\kappa}$ 对各路欠采样序列 $y_i[n]$ 进行解线调处理,得到新序列 $\tilde{y}_i[n]$,然后对各新序列分别进行离散傅里叶变换,得到 $\tilde{Y}_i[k]$ 。

(3) 在每个频点 k 处对 $\tilde{Y}_i[k]$ 进行分析,若 $\sum_{i=1}^p |\tilde{Y}_i[k]| > 0$ 且 $|\tilde{Y}_1[k]| = |\tilde{Y}_2[k]|$,则根据 $\tilde{X}[s_0] = \beta \tilde{Y}_1[k]$ 和 $e^{j2\pi s_0 / \beta N} = \frac{\tilde{Y}_2[k]}{\tilde{Y}_1[k]}$ 对 $\tilde{X}[k']$ ($k' \in S_k$) 中的非零元素 $\tilde{X}[s_0]$ 及其位置 s_0 进行估计;若 $|\tilde{Y}_1[k]| \neq |\tilde{Y}_2[k]|$,则采用将求解 MPP 和求解超定方程组相结合的方式对非零元素 $\tilde{X}[s_1], \tilde{X}[s_2]$ 及其位置 s_1, s_2 进行估计。对于所有的 $k \in [0, N-1]$,分别重复该过程,经过整合之后得到 $\tilde{X}[k']$ 中所有非零元素的取值。

(4) 对 $\tilde{X}[k']$ 进行峰值搜索,实现对各 LFM 分量初始频率 f_r 的估计。

步骤(4)中估计初始频率的分辨率为 $\Delta f' = f_{\text{nyq}} / \beta N = 1/T$,在高信噪比条件下,初始频率的估计性能会受到该分辨率的局限。因此,为了得到更好的估计性能,在步骤(2)中可以将长度为 N 序列 $\tilde{y}_i[n]$ 补零至 RN 点 ($R > 1$),再进行离散傅里叶变换,则经过步骤(3)后可以重构出长度为 $R\beta N$ 的 $\tilde{X}[k']$ 。此时,估计初始频率的分辨率提高至 $\Delta f' = f_{\text{nyq}} / R\beta N = 1/RT$,当 R 足够大时,初始频率的估计精度仅受到算法本身的制约,与分辨率 $\Delta f'$ 无关。

根据上述流程可知,本文提出的参数估计算法主要通过线性运算实现,仅在步骤(3)中出现 $|\tilde{Y}_1[k]| \neq |\tilde{Y}_2[k]|$ 情况时涉及到非线性运算,即式(10)中求 MPP 解析解和后续对 4×2 维列满秩矩阵求伪逆的过程。而文献[9,10]中的参数估计方法均需要采用 CS 重构算法,需要多次对高维矩阵求伪逆,运算复杂,相较而言,本文提出的估计方法运算简单,更易实现。

5 仿真实验

假设接收到的信号 $x(t)$ 由 $K=3$ 个幅度相同且调频斜率均为 $\kappa = 6.01 \times 10^{13}$ Hz/s 的 LFM 分量组成,信号持续时间为 $T=10 \mu\text{s}$,频谱范围为 $[0, 1)$ GHz,即 $f_{\text{nyq}}=1$ GHz。各 LFM 分量的初始相位在区

间 $[0, 2\pi)$ 内随机选取, 初始频率在区间 $[100, 300]$ MHz内随机选取。仿真实验中采用由 $p=4$ 个欠采样通道组成的采样系统对信号 $x(t)$ 进行低速采样, 每个通道的欠采样因子均为 β , 即采样过程的总采样率为 $f_{\text{tot}} = pf_{\text{nyq}}/\beta$ 。另外, 为了更好地测试算法本身的性能, 避免分辨率 $\Delta f'$ 对初始频率估计精度的影响, 参数估计过程中设定 $R=32$ 。

定义调频斜率估计值 $\hat{\kappa}$ 的相对误差为

$$e_{\kappa} = \frac{|\hat{\kappa} - \kappa|}{\kappa} \quad (12)$$

若 $e_{\kappa} > 0.001$, 则认为调频斜率估计失败。分别设定采样系统各通道的欠采样因子为 $\beta=4, \beta=8, \beta=16$, 其对应的估计成功率与信噪比之间的关系如图3所示。当调频斜率估计成功时, 其对应的均方根误差(Root mean square error, RMSE)与信噪比之间的关系如图4所示, 同时图4还给出了从奈奎斯特采样样本中估计调频斜率的克拉美罗界(Cramer-rao lower bound, CRLB)^[18]。在本文提出的估计算法中, 调频斜率是根据单路欠采样序列进行估计的, 即估计过程所依据的样本个数为奈奎斯特采样样本数的 $1/\beta$ 。因此, 随着欠采样因子 β 的增大, 调频斜率的估计性能有所降低。当 $\text{SNR} = -6$ dB时, $\beta=4$ 对应的估计成功率在90%以上, 均方根误差约为 6×10^9 Hz/s; 而 $\beta=16$ 对应的估计成功率仅有65%左右, 均方根误差约为 2.2×10^{10} Hz/s。由图4可以看出, 随着信噪比的增加, 调频斜率估计的均方根误差有所降低, 而 $\beta=16$ 对应的均方根误差一直保持在 $\beta=4$ 时的4倍左右。

在调频斜率估计成功的条件下, 继续对 LFM 信号各分量的初始频率进行估计。定义初始频率估计值 \hat{f}_r 的误差为 $e'_{f_r} = |\hat{f}_r - f_r|$ 。对于任意 $1 \leq r \leq K$, 若 $e'_{f_r} > 1$ MHz, 则认为初始频率估计失败。在不同的欠采样因子 β 条件下, 初始频率的估计成功率如图5所示。图5表明, 当 $\beta \leq 8$ 且 $\text{SNR} \geq -6$ dB时, 初始频率估计的成功率接近于1, 即只要调频斜率估计的相对误差小于0.001, 则各分量的初始频率均能够成功估计。

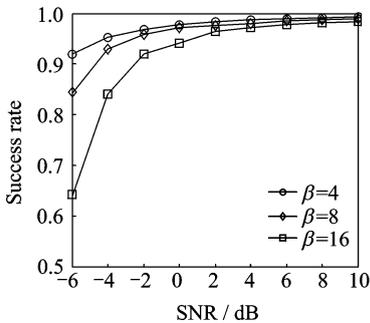


图3 调频斜率估计的成功率
Fig. 3 Success rate of chirp rate estimation

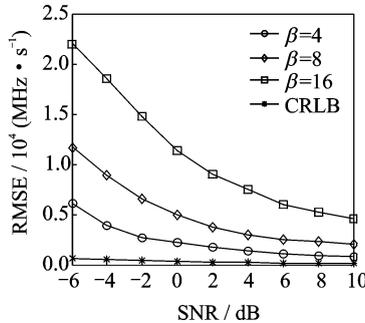


图4 调频斜率估计的均方根误差
Fig. 4 RMSE curves of chirp rate estimation

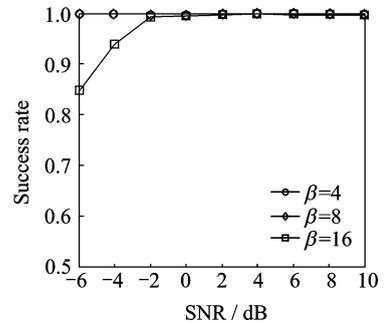


图5 初始频率估计的成功率
Fig. 5 Success rate of initial frequency estimation

当各分量的初始频率均被成功估计时, 分别计算其对应的均方根误差, 并与文献[10]中的方法进行比较, 结果如图6所示, 同时图6也给出了奈奎斯特采样条件下初始频率估计的CRLB。在对文献[10]中的估计方法进行仿真的过程中, 假定调频斜率估计完全准确(实际情况中, 在低信噪比条件下必然存在调频斜率估计误差), 采样过程的总采样率设定为 $f_{\text{tot}} = f_{\text{nyq}}/4$, 与本文中 $\beta=16$ 的条件相同。由图6可知, 文献[10]中的算法由于分辨率的限制, 随着信噪比的增加, 估计的均方根误差一直保持在 3×10^4 Hz左右; 而本文所提算法的估计性能随着信噪比的增加有所提升。在 $\beta=16$ 的条件下, 当信噪比为6 dB时本文算法与文献[10]算法性能几乎相同, 随着信噪比的增加, 本文算法的估计性能优于文献[10]中的算法。

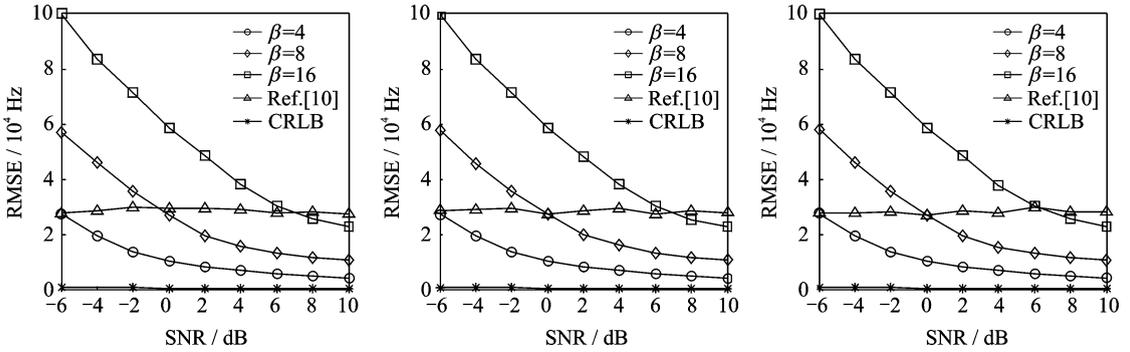


图 6 3 个 LFM 分量初始频率估计的均方根误差

Fig. 6 RMSE curves of initial frequency estimations of three LFM components

在本文提出的估计算法中,根据解线调处理之后的采样序列对信号的初始频率进行估计,因此初始频率的估计性能会受到调频斜率估计精度的制约,与奈奎斯特采样条件下的 CRLB 具有一定差距。当 SNR=10 dB 时,CRLB 约为 200 Hz,而本文算法在 $4 \leq \beta \leq 16$ 条件下对应的均方根误差在 4~30 kHz 之间。

根据仿真结果可知,当 $\beta=4$ 时,信噪比只需满足 $\text{SNR} \geq -6$ dB 调频斜率的估计成功率即可达到 90% 以上,并且信号各分量的初始频率均能够根据调频斜率得以成功估计,估计的均方根误差在 30 kHz 以下。然而随着欠采样因子 β 的增加,即各通道采样率的降低,调频斜率估计和初始频率估计的性能均有所下降。因此,欠采样因子的选择需要折中考虑,在保证参数估计性能满足实际需求的情况下,尽可能地降低各通道的采样速率。

6 结束语

本文提出了一种基于多路欠采样的参数估计方法,可以对调频斜率相同、初始频率不同的多分量 LFM 信号进行参数估计。采样系统由多个采样起始点不同但采样速率相同的模数转换器组成,实现对 LFM 信号的亚奈奎斯特采样。信号的调频斜率根据欠采样序列的乘积型模糊函数进行估计。根据估计出的调频斜率对各路采样序列进行解线调处理后,利用矩保持问题的解析解和最小二乘法实现各分量初始频率的估计。该方法能够从亚奈奎斯特样本中估计出多分量 LFM 信号的调频斜率和初始频率,并且参数估计过程中运算简单,易于实现。

参考文献:

- [1] 沈显祥,叶瑞青,唐斌,等. 基于欠采样的宽带线性调频信号参数估计[J]. 电波科学学报, 2007, 22(1): 43-46.
Shen Xianxiang, Ye Ruiqing, Tang Bin, et al. An algorithm for estimation of wideband LFM signal parameters based on subsampling[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2007, 22(1): 43-46.
- [2] 余朋俊,阮怀林. 宽带 LFM 实信号多通道低速采样参数估计[J]. 电子信息对抗技术, 2014, 29(5): 25-31.
Yu Pengjun, Ruan Huailin. An algorithm for parameters estimation of wideband LFM real signal with multiple sub-sampling channels[J]. Electronic Information Warfare Technology, 2014, 29(5): 25-31.
- [3] 梁红,闫照南,叶陈诚,等. 欠采样下多个线性调频信号参数估计方法[J]. 西北工业大学学报, 2014, 32(6): 888-893.
Liang Hong, Yan Zhaonan, Ye Chencheng, et al. An effective method for joint estimation of chirp rates and initial frequencies of multiple LFM signals with sub-Nyquist sampling[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2014, 32(6): 888-893.
- [4] 杜小勇,胡卫东,郁文贤. 单自由度多分量线性调频信号的参数估计[J]. 信号处理, 2005, 21(5): 443-446.
Du Xiaoyong, Hu Weidong, Yu Wenxian. Parameter estimation of superimposed chirps with single degree of freedom[J]. Signal Processing, 2005, 21(5): 443-446.

- [5] 阮航, 吴彦鸿, 叶伟. 匀速运动目标逆合成孔径激光雷达成像算法[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(4): 1124-1129.
Ruan Hang, Wu Yanhong, Ye Wei. Inverse synthetic aperture ladar imaging algorithm for uniform motion targets[J]. Infrared and Laser Engineering, 2014, 43(4): 1124-1129.
- [6] Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [7] 宋耀良, 穆童. 从广义采样、小波到压缩感知[J]. 数据采集与处理, 2016, 31(4): 665-674.
Song Yaoliang, Mu Tong. From generalized sampling and wavelet to compressed sensing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2016, 31(4): 665-674.
- [8] Joneidi M, Zaemzadeh A, Rezaeifar S, et al. LFM signal detection and estimation based on sparse representation[C] // Annual Conference on Information Sciences and Systems. Baltimore: IEEE, 2015: 1-5.
- [9] Zha S, Liu P, Huang J. Parameter estimation of LFM signal via compressive sensing [C] // International Radar Conference. Xi'an: IET, 2013: 1-5.
- [10] 闫浩, 董春曦, 赵国庆. 基于压缩感知的线性调频信号参数估计[J]. 电波科学学报, 2015, 30(3): 449-456
Yan Hao, Dong Chunxi, Zhao Guoqing. Parameter estimation of LFM signal based on compressed sensing[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2015, 30(3): 449-456.
- [11] 王超. 基于压缩感知的贪婪迭代重构算法[J]. 数据采集与处理, 2012, 27(S2): 298-303.
Wang Chao. Greedy iterative reconstruction algorithm based on compressive sensing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012, 27(S2): 298-303.
- [12] Rabah H, Amira A, Mohanty B K, et al. FPGA implementation of orthogonal matching pursuit for compressive sensing reconstruction [J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems, 2015, 23(10): 2209-2220.
- [13] Barbarossa S, Scaglione A, Giannakis G B. Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(3): 691-708.
- [14] Hsieh S H, Lu C S, Pei S C. Sparse fast Fourier transform by downsampling [C] // International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver: IEEE, 2013: 5637-5641.
- [15] Hassanieh H, Shi L, Abari O, et al. GHz-wide sensing and decoding using the sparse Fourier transform [C] // Conference on Computer Communications. Toronto: IEEE, 2014: 2256-2264.
- [16] Peleg S, Porat B. Linear FM signal parameter estimation from discrete time observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(4): 607-616.
- [17] 朱延万, 赵拥军, 贾伍刚. 基于模糊函数切片和FrFT的快速 LFM 信号参数估计[J]. 信息工程大学学报, 2012, 13(2): 218-223.
Zhu Yanwan, Zhao Yongjun, Jia Wugang. Fast parameter estimation method for LFM signal based on ambiguity function slice and FrFT[J]. Journal of Information Engineering University, 2012, 13(2): 218-223.
- [18] Peleg S, Porat B. The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(3): 749-752.

作者简介:



董宁斐(1990-),女,博士研究生,研究方向:压缩采样技术,E-mail:dongningfei@126.com。



刘光祖(1978-),男,副教授,研究方向:数字信号处理。



束锋(1973-),男,教授,研究方向:通信信号处理、雷达信号处理。



王建新(1963-),男,教授,研究方向:通信信号处理、压缩采样。

