ISSN 1004-9037，CODEN SCYCE4
Journal of Data Acquisition and Processing Vol. 31，No. 6，Nov. 2016，pp. 1156－1163
DOI：10.16337/j.1004-9037.2016.06.010

http：//sjcj.nuaa.edu.cn
E-mail：sjcj@nuaa.edu.cn
Tel/Fax：＋86-025-84892742

基于三支决策的模糊信息系统 OWA 算子参数选择

杨霁琳[1]　张贤勇[2]　唐　孝[2]

（1.四川师范大学基础教学学院，成都，610068；2.四川师范大学数学与软件科学学院，成都，610068）

摘　要：在模糊信息系统中，通过有序加权平均（Ordered weighted averaging，OWA）算子计算对象相似度，可以建立 λ 截集的相容关系。当 λ 的值确定后，OWA 算子中量词参数 (α,β) 的选取直接关系到不可区分关系的建立以及信息粒的粗细。因此合理选取参数 (α,β) 是值得进一步研究的问题。本文采用粗糙集三支决策理论，研究模糊信息系统 OWA 算子参数选择的相关内容。基于参数的激进、中庸和消极语义，确定 OWA 算子 (α,β) 的 3 种常用取值；进而研究相似度、相容类、双向近似和三支区域在 3 种参数选择下的性质关系。最后利用实例验证分析了模糊量词参数语义解释的合理性。本文采用三支决策创新视角，得到模糊信息系统 OWA 算子的深入性质，为相关模糊量词参数提供语义解释与选择依据。

关键词：模糊信息系统；粗糙集；三支决策；OWA 算子；相容关系

中图分类号：TP18　　　**文献标志码：**A

Three-way Decisions Based Parameter Selection of OWA Operators in Fuzzy Information System

Yang Jilin[1]，Zhang Xianyong[2]，Tang Xiao[2]

（1. College of Fundamental Education，Sichuan Normal University，Chengdu，610068，China；2. College of Mathematics and Software Science，Sichuan Normal University，Chengdu，610068，China）

Abstract：In the fuzzy information system，tolerance relation of the λ level sets based on the similar degree of the objects can be obtained by the ordered weighted averaging（OWA）operator. Indiscernibility relation and grain size are affected by the fuzzy quantifier parameters (α,β) of the OWA operators，when the value of λ is the same. Therefore，it is worth to study how to reasonably select fuzzy quantifier parameter (α,β) values. Parameter selection of OWA operators is discussed based on three-way decisions of rough set theory in fuzzy information system. According to radicalness，mean，and negative of parameters semantics，three most commonly used values of (α,β) are proposed. Furthermore，related properties of similar degrees，tolerance classes，upper and lower approximation sets as well as three-way regions are discussed based on three most commonly used values of (α,β). Finally，experimental results are used to analyze reasonableness of semantic explanations about fuzzy quantifier parameters. The study adopts a novel viewpoint of three-way decisions theory，and the new semantic explanations and validity of selection methods about related fuzzy quantifier parameters (α,β) in the OWA operators are given in fuzzy information system.

Key words：fuzzy information system；rough set；three-way decisions；OWA operator；tolerance relation

---

基金项目：国家自然科学基金（61203285，61303204，61673285）资助项目；四川省教育厅科研（15ZB0028）资助项目。
收稿日期：2015-06-05；**修订日期：**2015-06-30

引　言

日常生活中，大量信息系统由于各种原因，存在属性值为模糊值的情况。文献[1]利用模糊集的隶属度函数建立了基于模糊等价关系的模糊粗糙集模型。但是该模糊等价关系往往过于严格，于是粗糙集理论被广大研究者们进行了扩充[2]。文献[3]利用模糊集合的贴近度定义了对象之间的相似关系。文献[4]利用模糊随机变量建立了期望相关关系。文献[5]提出了邻域粗糙集模型，在该模型中，类别型属性建立等价关系，数值型属性借助欧式距离建立模糊相似关系。文献[6]将属性形式化为模糊相似关系，由它产生的模糊信息粒构成论域的模糊划分。文献[7]利用高斯核刻画对象的相似性，然后对论域进行模糊划分形成模糊信息粒。基于经典粗糙集理论，各种粗糙集模型得到了广泛的推广和应用[8,9]。在已有文献的基础上，文献[10]针对模糊信息系统，利用有序加权平均算子（Ordered weighted averaging operator，OWA ）计算出对象间的区分度，进一步定义了对象的相似度，建立了相容关系，构建了信息粒。在基于 OWA 算子建立的相容关系中，影响信息粒粗细的主要因素之一是 OWA 算子中的模糊量词参数(α,β)。因此，在实际问题中如何选取合理的(α,β)值，将直接关系到论域的划分，是值得进一步研究的问题。文献[11]在长期研究粗糙集的过程中提出了三支决策（Three-way decisions）的概念，通过正域获得的对象可以看作是一种选择接受的状态，通过负域得到的对象可以看作是一种选择拒绝的状态，通过边界域而得到的对象可以看作是一种选择延迟处理的状态，即根据当下的条件既不能选择接受又不能选择拒绝，需要再进行讨论，以此尽量规避强制选择接受或强制选择拒绝可能会带来的损失。最近，三支决策理论引起了学术界的广泛关注，成为智能信息处理领域研究的热点之一。文献[12]给出了一个基于三支决策理论的半监督学习方法；文献[13]提出了基于三支决策和信息粒的代价敏感人脸识别方法；文献[14]研究了三支决策在自动聚类问题中的应用；文献[15]基于不完备信息系统讨论了一种新的三支决策模型；文献[16]提出了基于三支决策的文本分类方法。针对决策论粗糙集，文献[17]提出了一种三支决策的群决策方法。三支决策论的提出为粗糙集理论和决策理论的融合，以及粗糙集理论在实际决策问题中的应用建立起一座桥梁[18]。在模糊信息系统基于 OWA 算子建立的相容关系的基础上，本文将利用三支决策理论在参数(α,β)3 种最常用的取值下，讨论相似度、相容类、双向近似和三支区域的性质关系。通过三支决策理论赋予粗糙集理论实际的应用语义背景，为 OWA 算子中模糊量词参数(α,β)赋予一种新的语义解释，为在实际问题中如何合理选择(α,β)的值提供理论支撑。最后，通过实例分析说明，三支决策理论为 OWA 中模糊量词参数(α,β)赋予语义解释的合理性，同时为(α,β)值的选取提供有效依据。

1　基于粗糙集的三支决策模型

设 U 为论域，为一有限非空集合，$R\subseteq U\times U$ 为论域 U 上的等价关系。$\mathrm{apr}=(U,R)$为近似空间，而等价关系 R 可形成对论域 U 上的一个划分，记为 U/R。设 X 为论域 U 的子集，即 $X\subseteq U$，则 X 的下近似集$\underline{\mathrm{apr}}(X)$与上近似集$\overline{\mathrm{apr}}(X)$可以定义为

$$\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U \mid [x]_R\subseteq X\} \qquad \overline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U \mid [x]_R\cap X\neq\varnothing\} \tag{1}$$

式中：$[x]_R$ 为对象 x 在等价关系 R 下的等价类。根据子集 $X\subseteq U$ 的上下近似集定义，可把整个论域 U 划分为互不相交的 3 个区域：正域 $\mathrm{POS}(X)$、边界域 $\mathrm{BND}(X)$和负域 $\mathrm{NEG}(X)$，分别定义为

$$\mathrm{POS}(X)=\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U \mid [x]_R\subseteq X\} \tag{2}$$

$$\mathrm{BND}(X)=\overline{\mathrm{apr}}(X)-\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U \mid [x]_R\cap X\neq\varnothing \wedge [x]_R\not\subset X\} \tag{3}$$

$$\mathrm{NEG}(X)=U-\overline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U \mid [x]_R\cap X=\varnothing\} \tag{4}$$

由正域 POS(X)生成的一个正规则对应作出接受决策,由负域 NEG(X)生成的负规则对应作出拒绝决策,而由边界域 BND(X)生成的边界规则作出延迟决策,这就是三支决策方法。

2 基于 OWA 算子的模糊粗糙集模型

定义 1[2] 设模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为非空有限的对象集合,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为非空有限的属性集合,$V=\{V_a|a\in A\}$为属性值集,在一个属性 a 下,对象 x 的属性值表示为 $\mu_a(x)\in[0,1]$,f 是一个映射,$f:U\times A\to V_a$,即 $f(x,a)\to\mu_a(x)$。

在模糊信息系统中,经典的粗糙集模型被许多研究者作了进一步推广。在前期研究中,本文利用 OWA 算子聚合对象间区分时在属性集中每个属性上的差异,得到对象的相似度,再利用对象相似度建立对象不可区分关系[10]。

定义 2[19] 设 $F:R^m\to R$,若 $F(a_1,a_2,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{m}w_ib_i$,其中 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 是与 F 相关联的加权向量,$w_i\in[0,1]$,$1\leqslant i\leqslant m$,$\sum_{i=1}^{m}w_i=1$,且 b_i 是一组数据$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$中从大到小的第 i 个数,则称函数 F 为 m 维 OWA 算子。

在 OWA 算子中,加权向量的计算方法有很多种,其中最常用的是利用模糊量词 Q 确定[16],表示为

$$Q(r)=\begin{cases}0 & 0\leqslant r<\alpha\\ \dfrac{r-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha\leqslant r\leqslant\beta\\ 1 & \beta<r\leqslant 1\end{cases}\tag{5}$$

式中:$\alpha,\beta\in[0,1]$,文献[19]提出的 3 种最常用的(α,β)取值分别为:(0, 0.5),(0.5, 1),(0.3, 0.8)一一对应表示"至少一半"、"尽可能多"和"大多数"的模糊语义。相应地,加权向量 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 可确定为 $w_i=Q\left[\dfrac{i}{m}\right]-Q\left[\dfrac{i-1}{m}\right]$。

定义 3[10] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$是一个模糊信息系统,对象集 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,属性集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$。则 $\forall x,y\in U$ 在属性集上的区分度为 $g(x,y)=F(T)=H(E)$。

其中,F 为 OWA 算子,$T=(\mu_{a_1}(x,y),\mu_{a_2}(x,y),\cdots,\mu_{a_m}(x,y))$,$\mu_{a_j}(x,y)=|\mu_{a_j}(x)-\mu_{a_j}(y)|$,$j=1,2,\cdots,m$,是对象 x 和 y 在属性 a_j 上的差异,$\boldsymbol{H}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 是有序加权向量,根据定义 1 可以获得。T 中各对象 $\mu_{a_j}(x,y)$按值从大到小排序后,得到 $E=({\mu_a}^{\sigma(1)}(x,y),{\mu_a}^{\sigma(2)}(x,y),\cdots,{\mu_a}^{\sigma(m)}(x,y))$,即有 $\forall l\in\{1,2,\cdots,m\}$,${\mu_a}^{\sigma(l)}(x,y)\geqslant{\mu_a}^{\sigma(l+1)}(x,y)$。

定义 4[10] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$是一个模糊信息系统,属性集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$。则 $\forall x,y\in U$ 在属性集上的相似度为 $s_A(x,y)=1-g(x,y)$。

其中,$g(x,y)$是对象 x 和 y 在属性集 A 上的区分度。显然 $s_A(x,y)\in[0,1]$,$s_A(x,y)$的值越接近 0,表示对象 x 和 y 越不相似;反之,$s_A(x,y)$的值越接近 1,表示对象 x 和 y 越相似。

性质 1[10] 模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$,对象集 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,属性集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,$\forall x,y\in U$ 有:(1) $s_A(x,x)=1$;(2) $s_A(x,y)=s_A(y,x)$。

定义 5[10] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$是一个模糊信息系统,$\forall x,y\in U$,在属性集 A 下,不可区分关系定义为 $R_\lambda:U\times U\to[0,1]$,$xR_\lambda y=\{(x,y)\in U\times U|s_A(x,y)\geqslant\lambda\}$。

其中,$s_A(x,y)$是对象 x 和 y 在属性集 A 上的相似度,阈值 $\lambda\in[0,1]$。显然,R_λ 具有自反性和对称性,但不一定具有传递性,因此,R_λ 是 λ 截集的相容关系。

定义 6[10] 在模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$中,$\forall x\in U$,在属性集合 A 的相容类定义如下:$[x]_{R_\lambda}=\{y\in U|s_A(x,y)\geqslant\lambda\}$。$[x]_{R_\lambda}$ 是一个自反、对称的信息粒。

影响信息粒的粗细主要存在 2 个因素:(1)建立对象相容关系时,λ 值的确定;(2)对象之间相似度 $s_A(x,y)$ 的大小,而 $s_A(x,y)$ 与 OWA 算子中模糊量词参数(α,β)值的选取有关。

性质 2[10] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统,$\forall x\in U$,若 $\lambda_1\geqslant\lambda_2$,有 $[x]_{R_{\lambda_1}}\subseteq[x]_{R_{\lambda_2}}$。

证明由定义 5 和定义 6 可直接得出。

3 基于三支决策理论的参数选取

针对 OWA 算子中模糊量词参数(α,β),本节将基于三支决策理论为(α,β)赋予一种新的、易于实际应用的语义解释,分析如何合理选取(α,β)的值。

定义 7 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统,对象集 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,属性集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$。任意对象集 $X\subseteq U$ 的上、下近似分别定义为

$$\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U,[x]_{R_\lambda}\subseteq X\} \tag{6}$$

$$\overline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U,[x]_{R_\lambda}\cap X\neq\varnothing\} \tag{7}$$

式中:$[x]_{R_\lambda}$ 为对象 x 在相容关系 R_λ 下的相容类。根据子集 $X\subseteq U$ 的上、下近似集定义,可把整个论域 U 划分为互不相交的 3 个区域:正域 $\mathrm{POS}(X)$、边界域 $\mathrm{BND}(X)$ 和负域 $\mathrm{NEG}(X)$,分别定义为

$$\mathrm{POS}(X)=\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U\mid[x]_{R_\lambda}\subseteq X\} \tag{8}$$

$$\mathrm{BND}(X)=\overline{\mathrm{apr}}(X)-\underline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U\mid[x]_{R_\lambda}\cap X\neq\varnothing\wedge[x]_{R_\lambda}\not\subset X\} \tag{9}$$

$$\mathrm{NEG}(X)=U-\overline{\mathrm{apr}}(X)=\{x\in U\mid[x]_{R_\lambda}\cap X=\varnothing\} \tag{10}$$

OWA 算子模糊量词参数(α,β)的值有多种选取方式。本文仅讨论 3 种最常用的取值,令$(\alpha_1,\beta_1)=(0,0.5)$,$(\alpha_2,\beta_2)=(0.3,0.8)$和$(\alpha_3,\beta_3)=(0.5,1)$。

性质 3 模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$ 中,$\forall x,y\in U$,$s_A^t(x,y)$ 是对象 x 和 y 在模糊量词参数(α_t,β_t)下的相似度,$t=1,2,3$,有 $s_A^1(x,y)\leqslant s_A^2(x,y)\leqslant s_A^3(x,y)$。

证明 $\forall x,y\in U$,$g_t(x,y)$ 是在(α_t,β_t)下的对象差异度,加权向量 $\boldsymbol{W}_t=(w_1^t,w_2^t,\cdots,w_m^t)^{\mathrm{T}}$,$t=1,2,3$。在向量 $\boldsymbol{W}_1$ 中,元素越靠前,值越大;在向量 $\boldsymbol{W}_2$ 中,中间元素的值大,前后元素的值变小;在向量 $\boldsymbol{W}_3$ 中,元素越靠后,值越大。根据定义 3,$g_t(x,y)=H_t(E)=W_t(E)$,其中 E 中的值按从大到小进行排序。因此,有 $g_1(x,y)\geqslant g_2(x,y)\geqslant g_3(x,y)$。根据定义 4,则有 $s_A^1(x,y)\leqslant s_A^2(x,y)\leqslant s_A^3(x,y)$。

性质 4 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统,$[x]_{R_\lambda^t}$ 是对象 x 在模糊量词参数为(α_t,β_t)的相容关系 R_λ^t 下的相容类,$t=1,2,3$。当 λ 的值相同时,有 $[x]_{R_\lambda^1}\subseteq[x]_{R_\lambda^2}\subseteq[x]_{R_\lambda^3}$。

证明 $\forall x,y\in U$,有 $s_A^1(x,y)\leqslant s_A^2(x,y)\leqslant s_A^3(x,y)$。当 λ 的值相同时,根据定义 5,有 $[x]_{R_\lambda^1}\subseteq[x]_{R_\lambda^2}\subseteq[x]_{R_\lambda^3}$。

性质 5 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统,任意对象集 $X\subseteq U$,$\underline{\mathrm{apr}}_t(X)$ 和 $\overline{\mathrm{apr}}_t(X)$ 分别是模糊量词参数为(α_t,β_t)时 X 对应的下近似集合和上近似集合,$t=1,2,3$。当 λ 的值相同时,有

(1) $\underline{\mathrm{apr}}_1(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_2(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_3(X)$ (2) $\overline{\mathrm{apr}}_1(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_2(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_3(X)$

证明 $\forall x\in U$,有 $[x]_{R_\lambda^1}\subseteq[x]_{R_\lambda^2}\subseteq[x]_{R_\lambda^3}$。对任意对象集合 $X\subseteq U$,根据式(1)和(2),易证 X 的下近似集合有:$\underline{\mathrm{apr}}_1(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_2(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_3(X)$;上近似集合有:$\overline{\mathrm{apr}}_1(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_2(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_3(X)$。

性质 6 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统,任意对象集 $X\subseteq U$,$\mathrm{POS}_t(X)$,$\mathrm{BND}_t(X)$,$\mathrm{NEG}_t(X)$ 分别是模糊量词参数为(α_t,β_t)时 X 对应的正域、边界域和负域,$t=1,2,3$。当 λ 的值相同时,有

$$\mathrm{POS}_1(X)\supseteq\mathrm{POS}_2(X)\supseteq\mathrm{POS}_3(X) \tag{11}$$

$$\mathrm{BND}_1(X)\subseteq\mathrm{BND}_2(X)\subseteq\mathrm{BND}_3(X) \tag{12}$$

$$\mathrm{NEG}_1(X)\supseteq\mathrm{NEG}_2(X)\supseteq\mathrm{NEG}_3(X) \tag{13}$$

根据粗糙集理论和三支决策的思想：正域得到的正规则被用作表示接受某事物；负域得到的负规则被用作表示拒绝某事物；边界域上的被用作表示需要再进行讨论观察，即为延迟决策。因此，由性质 6，分析如下：(1)当$(\alpha_1,\beta_1)=(0,0.5)$时，得到的正规则最多，即被接受的最多，同时得到的负规则也最多，即被拒绝的最多，但是边界域需要进行再观察和讨论的延迟决策最少；(2)当$(\alpha_2,\beta_2)=(0.3,0.8)$时，获取的正规则、负规则以及边界域的延迟决策都不算最多和最少；(3)当$(\alpha_3,\beta_3)=(0.5,1)$，得到的正规则最少，即被接受的最少，同时，得到的负规则也最少，即被拒绝的最少，但是边界域需要进行再观察和讨论的延迟决策最多。因此，在 OWA 算子中，模糊量词参数(α,β)最常用的 3 种取值方式对应的语义解释可理解为：(1)$(\alpha_1,\beta_1)=(0,0.5)$时，表现为较激进语义；(2)$(\alpha_2,\beta_2)=(0.3,0.8)$时，表现为较中庸语义；(3)$(\alpha_3,\beta_3)=(0.5,1)$时，表现为较消极语义。在实际问题中，可根据该语义合理选取(α,β)的取值。

4　实例分析

在模糊信息系统中，利用 OWA 算子刻画了对象的相似性程度，建立了相容关系。在λ取值不变的情况下，利用三支决策理论分析了 OWA 算子中(α,β)3 种常用取值方式所代表的不同语义。利用文献[10]中的数据表，实例分析如下。

例 1　$\Omega=(U,A,V,f)$是一个模糊信息系统，对象集合$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，属性集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，如表 1 所示。

(1)根据 OWA 算子，以及定义 3 和 4，可计算对象之间的相似度。

(a)当$(\alpha_1,\beta_1)=(0,0.5)$时，$\boldsymbol{W}_1=\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right]$，对象的相似度如表 2 所示。

(b)当$(\alpha_2,\beta_2)=(0.3,0.8)$时，$\boldsymbol{W}_2=\left[\frac{1}{15},\frac{10}{15},\frac{4}{15}\right]$，对象的相似度如表 3 所示。

(c)当$(\alpha_3,\beta_3)=(0.5,1)$时，$\boldsymbol{W}_3=\left[0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，对象的相似度如表 4 所示。

表 1　模糊信息系统 $\boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{V},\boldsymbol{f})$

Tab. 1　Fuzzy information system $\boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{A},\boldsymbol{V},\boldsymbol{f})$

Ω	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
a_1	0.1	1.0	0.6	0.3	0.2	0.5	0.8	1.0
a_2	0.8	0.5	0.3	0.8	0.9	0.3	0.7	0.6
a_3	0.9	0.3	0.8	0.9	0.9	0.6	0.3	0.2

由表 2～4 可知，$\forall x,y\in U$，有 $s_A^1(x,y)\leqslant s_A^2(x,y)\leqslant s_A^3(x,y)$，即对象相似度在$(\alpha,\beta)$3 种常用取值方式的关系如性质 3 所示。

(2)当$\lambda=0.75$时，在(α_t,β_t)下，$t=1,2,3$，$\forall x\in U$，其相容类$[x]_{R_\lambda^t}$如下。

(a) $[x_1]_{R_\lambda^1}=[x_4]_{R_\lambda^1}=[x_5]_{R_\lambda^1}=\{x_1,x_4,x_5\}$，$[x_2]_{R_\lambda^1}=[x_7]_{R_\lambda^1}=[x_8]_{R_\lambda^1}=\{x_2,x_7,x_8\}$，$[x_3]_{R_\lambda^1}=[x_6]_{R_\lambda^1}=\{x_3,x_6\}$。

(b) $[x_1]_{R_\lambda^2}=[x_5]_{R_\lambda^2}=\{x_1,x_4,x_5\}$，$[x_2]_{R_\lambda^2}=[x_7]_{R_\lambda^2}=[x_8]_{R_\lambda^2}=\{x_2,x_7,x_8\}$，$[x_3]_{R_\lambda^2}=\{x_3,x_4,x_6\}$，$[x_4]_{R_\lambda^2}=\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$，$[x_6]_{R_\lambda^2}=\{x_3,x_6\}$。

(c) $[x_1]_{R_\lambda^3}=[x_5]_{R_\lambda^3}=\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$，$[x_2]_{R_\lambda^3}=\{x_2,x_6,x_7,x_8\}$，$[x_3]_{R_\lambda^3}=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$[x_4]_{R_\lambda^3}=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$，$[x_6]_{R_\lambda^3}=\{x_2,x_3,x_4,x_6\}$，$[x_7]_{R_\lambda^3}=\{x_2,x_4,x_7,x_8\}$，$[x_8]_{R_\lambda^3}=\{x_2,x_7,x_8\}$。

表 2 相似度 $s_A^1(x,y)$

Tab. 2 Similarity degree $s_A^1(x,y)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1							
x_2	0.200	1						
x_3	0.500	0.533	1					
x_4	0.867	0.333	0.567	1				
x_5	0.90	0.267	0.467	0.900	1			
x_6	0.533	0.567	0.833	0.567	0.500	1		
x_7	0.333	0.800	0.533	0.433	0.400	0.633	1	
x_8	0.167	0.900	0.467	0.300	0.233	0.533	0.833	1

表 3 相似度 $s_A^2(x,y)$

Tab. 3 Similarity degree $s_A^2(x,y)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1							
x_2	0.460	1						
x_3	0.607	0.647	1					
x_4	0.987	0.473	0.740	1				
x_5	0.927	0.440	0.667	0.927	1			
x_6	0.620	0.713	0.920	0.713	0.680	1		
x_7	0.527	0.853	0.647	0.600	0.507	0.693	1	
x_8	0.420	0.927	0.613	0.433	0.400	0.620	0.893	1

表 4 相似度 $s_A^3(x,y)$

Tab. 4 Similarity degree $s_A^3(x,y)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1							
x_2	0.600	1						
x_3	0.767	0.733	1					
x_4	1	0.600	0.833	1				
x_5	0.967	0.533	0.800	0.967	1			
x_6	0.667	0.767	0.967	0.767	0.700	1		
x_7	0.733	0.933	0.733	0.767	0.667	0.700	1	
x_8	0.633	0.967	0.667	0.633	0.567	0.667	0.900	1

显然,$\forall x \in U$,有 $[x]_{R_A^1} \subseteq [x]_{R_A^2} \subseteq [x]_{R_A^3}$,即对象不可区分类在$(\alpha,\beta)$3 种常用取值方式下的关系如性质 4 所示。

(3)令 $X=\{x_1,x_4,x_5,x_6\}$，根据定义 7，在(α_t,β_t)下，$t=1,2,3$，$\underline{\mathrm{apr}}_t(X)$和$\overline{\mathrm{apr}}_t(X)$如表 5 所示。

表 5 下、上近似集合$\underline{\mathrm{apr}}_t(X)$，$\overline{\mathrm{apr}}_t(X)$

Tab. 5 Lower and upper approximation sets $\underline{\mathrm{apr}}_t(X)$, $\overline{\mathrm{apr}}_t(X)$

t	$\underline{\mathrm{apr}}_t(X)$	$\overline{\mathrm{apr}}_t(X)$
1	$\{x_1,x_4,x_5\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}$
2	$\{x_1,x_5\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}$
3	$\{\varnothing\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$

根据表 5，显然有：$\underline{\mathrm{apr}}_1(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_2(X)\supseteq\underline{\mathrm{apr}}_3(X)$，$\overline{\mathrm{apr}}_1(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_2(X)\subseteq\overline{\mathrm{apr}}_3(X)$，即上、下近似集合在$(\alpha,\beta)$3 种常用取值方式下的关系如性质 5 所示。

(4)在(α_t,β_t)下，X 对应的正域 $\mathrm{POS}_t(X)$、边界域 $\mathrm{BND}_t(X)$和负域 $\mathrm{NEG}_t(X)$如表 6 所示，$t=1,2,3$。

表 6 $\mathrm{POS}_t(X)$，$\mathrm{BND}_t(X)$和 $\mathrm{NEG}_t(X)$

Tab. 6 $\mathrm{POS}_t(X)$, $\mathrm{BND}_t(X)$ and $\mathrm{NEG}_t(X)$

t	$\mathrm{POS}_t(X)$	$\mathrm{BND}_t(X)$	$\mathrm{NEG}_t(X)$
1	$\{x_1,x_4,x_5\}$	$\{x_3\}$	$\{x_2,x_7,x_8\}$
2	$\{x_1,x_5\}$	$\{x_3,x_4\}$	$\{x_2,x_7,x_8\}$
3	$\{\varnothing\}$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$	$\{x_8\}$

根据表 6，$\mathrm{POS}_1(X)\supseteq\mathrm{POS}_2(X)\supseteq\mathrm{POS}_3(X)$，$\mathrm{BND}_1(X)\subseteq\mathrm{BND}_2(X)\subseteq\mathrm{BND}_3(X)$，$\mathrm{NEG}_1(X)\supseteq\mathrm{NEG}_2(X)\supseteq\mathrm{NEG}_3(X)$，即验证了性质 6。具体分析如下：当 $t=1$，$(\alpha_1,\beta_1)=(0,0.5)$时，正域和负域的集合对象最多，边界域的集合对象最少，只有$\{x_3\}$，即需要进一步观察进行延迟决策的最少，因此选用该参数时，表现相对较激进；当 $t=2$，$(\alpha_2,\beta_2)=(0.3,0.8)$时，正域、负域和边界域的集合对象不是最多也不是最少，其表现相对中庸；当 $t=3$，$(\alpha_3,\beta_3)=(0.5,1)$时，正域为$\{\varnothing\}$，负域集合只有一个对象，其余对象全落在边界区域，需要进一步观察做延迟决策，因此选用该参数时，表现最为消极。因此三支决策理论为模糊信息系统中运用的 OWA 算子的模糊量词参数(α,β)赋予了一种新的合理的语义解释，为选择(α,β)的值提供了理论支撑。在实际问题中，可根据具体情况的需要，选择相对应的语义，从而在 OWA 算子的 3 种常用模糊量词参数中选择最合理参数。

5 结束语

在模糊信息系统基于 OWA 算子建立的 λ 截集的相容关系中，当 λ 的值不变时，OWA 算子的模糊量词参数(α,β)的选取直接影响信息粒的粗细。本文利用三支决策创新视角，根据参数的激进、中庸和消极语义，分析了对象相似度、对象相容类、上下近似集合和三支区域在参数(α,β)最常用的取值下的性质关系。从而为模糊量词参数(α,β)赋予了一种新的、易于实际应用的语义解释，为如何选择(α,β)的值提供了理论支撑。实例表明，三支决策理论为 OWA 中模糊量词参数(α,β)的 3 种常用取值赋予了合理的语义，为(α,β)值的选取提供了有效的方法。在今后的研究工作中，将进一步讨论基于 OWA 算子的模糊粗糙集的属性约简方法及在(α,β)3 种语义下的约简属性及核心属性的关系。

参考文献：

[1] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209.

[2] 胡寿松，何亚群. 粗糙决策理论与应用[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2006: 232-239.

Hu Shousong, He Yaqun. Theory and application of rough decision[M]. Beijing: Beihang University Press, 2006: 232-239.

[3] Wu Weizhi, Zhang Wenxiu, Li Huaizu. Knowleadge acquisition in incomplete fuzzy information systems via the rough set approach[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 280-286.
[4] Zhao Tao, Qin Keyun. Fuzzy random information system and attribute reduction[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(22):147-150.
[5] Hu Qinghua, Liu Jinfu, Yu Daren. Mixed feature selection based on granulation and approximation[J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21: 294-304.
[6] 苗夺谦,李德毅,姚一豫,等. 不确定性与粒计算[M]. 北京:科学出版社,2011:38-56.
Miao Duoqian, Li Deyi, Yao Yiyu, et al. Uncertainty and granular computing[M]. Beijing:Science Press, 2011:38-56.
[7] Lin Guoping, Liang Jiyei, Qian Yuhua, et al. A fuzzy multigranulation decision-theoretic approach to multi-source fuzzy information systems[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 102-113.
[8] 胡成祥,赵瑞斌. 基于经典粗糙集的近似集动态获取方法[J]. 数据采集与处理,2015, 30(6): 1132-1340.
Hu Chengxiang, Zhao Ruibin. Approach for dynamical approximations acquisition based on rough set[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2015, 30(6): 1132-1340.
[9] 徐久成,李涛,孙林,等. 基于信噪比与邻域粗糙集的特征基因选择方法[J]. 数据采集与处理,2015, 30(5): 973-981.
Xu Jiucheng, Li Tao, Sun Lin, et al. Feature gene selection based on SNR and neighborhood rough set[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2015, 30(5): 973-981.
[10] 杨霁琳,秦克云. 模糊信息系统中一种改进的模糊相容关系[J]. 小型微型计算机系统,2014, 35(9): 2131-2135.
Yang Jilin, Qin Keyun. Improved fuzzy tolerance relation in the fuzzy information system[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2014, 35(9): 2131-2135.
[11] Yao Yiyu. An outline of a theory of three-way decisions[C]//Proceedings of the 6th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012: 1-17.
[12] 贾修一,商琳,周献中,等. 三支决策理论与应用[M]. 南京:南京大学出版社,2012:17-33.
Jia Xiuyi, Shang Lin, Zhou Xianzhong, et al. Three-way decision theory and application[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2012: 17-33.
[13] Li Huaxiong, Zhang Libo, Huang Bing, et. al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 241-251.
[14] Yu Hong, Chu Shuangshuang, Yang Dachun. Autonomous knowledge-oriented clustering using decision-theoretic rough set theory[J]. Fundamental Informaticae, 2012, 115(2/3): 141-156.
[15] Liu Dun, Liang Decui, Wang Changchun. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 32-45.
[16] 于洪,王国胤,李天瑞,等. 三支决策:复杂问题求解方法与实践[M]. 北京:科学出版社,2015: 219-230.
Yu Hong, Wang Guoyin, Li Tianrui, et al. Three-way decisions: Methods and practices for complex problem solving[M]. Beijing: Science Press, 2015: 219-230.
[17] Liang Decui, Liu Dun, Kobina A. Three-way group decisions with decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2016, 345: 46-64.
[18] 刘盾,李天瑞,李华雄. 粗糙集理论:基于三支决策理论[J]. 南京大学学报:自然科学,2013, 49(5): 574-581.
Liu Dun, Li Tianrui, Li Huaxiong. Rough set theory: A three-way decisions perspectives[J]. Journal of Nanjing University: Natural Sciences, 2013, 49(5): 574-581.
[19] Yager R. Generalized OWA aggregation operators[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3: 93-107.

作者简介:

杨霁琳(1981-),女,博士,讲师,研究方向:粗糙集、模糊集和粒计算,E-mail: yjl524@163.com。

张贤勇(1978-),男,博士,副教授,研究方向:粗糙集、粒计算和数据挖掘。

唐孝(1981-),男,博士,副教授,研究方向:不确定性分析、数据挖掘。