

# 电磁矢量阵中基于平行因子压缩感知的角度估计算法

张小飞 李书 郑旺

(南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京, 211106)

**摘要:** 将平行因子框架与压缩感知理论相结合, 解决了电磁矢量传感器阵列中的波达方向估计问题。首先将接收信号构建成平行因子模型, 然后结合压缩感知理论, 对平行因子模型压缩。根据三线性交替最小二乘算法对压缩后的平行因子模型进行分解, 最后利用信号的稀疏性, 得到波达方向估计。借助压缩过程, 本文算法降低了传统的平行因子算法的计算复杂度, 节约了存储空间。本文算法无需谱峰搜索, 且同时适用于均匀线阵和非均匀线阵。该算法的角度估计性优于 ESPRIT 算法, 且接近传统的基于平行因子模型的角度估计算法, 仿真结果证明该算法的有效性。

**关键词:** 平行因子; 压缩感知; 波达方向估计; 电磁矢量传感器

**中图分类号:** TN911.7      **文献标志码:** A

## Angle Estimation for Electromagnetic Vector Sensor Array via Compressed Sensing-Parallel Factor

Zhang Xiaofei, Li Shu, Zheng Wang

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

**Abstract:** We combine the parallel factor framework with the compressed sensing theory to solve the problem of the direction of arrival estimation for the electromagnetic vector sensor array. We first rearrange the received data matrix as a parallel factor model, and compress it to a smaller one based on the compressed sensing theory. Then the trilinear alternating least square algorithm is exploited to decompose the compressed parallel factor model. Finally, the angle estimation is obtained with sparsity. Owing to compression, the computational complexity of the algorithm is lower than that of the conventional parallel factor model-based algorithm, and more storage memory is saved. The algorithm needs no peak searching and is applicable to both uniform and non-uniform linear array. Moreover, the angle estimation performance of the proposed algorithm is better than that of the ESPRIT algorithm and close to that of the conventional parallel factor model-based algorithm, which can be verified by various simulations.

**Key words:** parallel factor; compressed sensing; direction of arrival estimation; electromagnetic vector sensor

## 引 言

对于空间传播的电磁信号而言, 传播方向、极化状态是其重要的特征参数, 其携带了空间电磁信号

的重要信息。普通天线阵列的输出仅反映信号强度信息,对信号的极化信息不敏感。而电磁矢量传感器阵列既可以获得信号的空间到达角信息,又可以获得信号的极化信息,其阵元的输出是矢量而非标量。和普通阵列相比,电磁矢量传感器阵列具有明显的优势,包括:较强的抗干扰能力、稳健的检测能力、较高的系统分辨能力及极化多址能力等<sup>[1,2]</sup>,广泛应用于通信、雷达等系统中。Nehorai 针对电磁矢量传感器阵列的接收信号进行了全面的建模,并提出了基于电磁矢量传感器在单个窄带或宽带信号源的矢量叉积二维波达方向(Direction of arrival, DOA)估计算法<sup>[3,4]</sup>。Jian Li 将借助旋转不变技术的信号参数估计方法(Estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT)推广到极化和角度域,解决不同情形下极化敏感阵列的多参量估计问题<sup>[5,6]</sup>。文献[7]针对电磁矢量传感器阵列,提出了将单个电磁矢量传感器看作一个无角度模糊子阵,再利用空域的 ESPRIT 来实现无模糊的角度和极化估计。文献[8]则研究了利用特征结构类算法对信号 DOA 的估计问题,该文基于具有相同子阵结构的任意阵列。文献[9]对基于电磁矢量传感器阵列的窄带相干信号源的 DOA 和极化参数估计进行了研究。

近年来,在信号处理和通信领域,平行因子<sup>[10]</sup>(Parallel factor, PARAFAC)技术的应用正在蓬勃发展。平行因子模型是多维矩阵分解中经典的数据模型,它利用迭代最小二乘算法实现三维矩阵的分解。作为三维矩阵分解的泛称,平行因子技术为多维矩阵分析提供了重要的分析思想,并一直沿用至今。近几年国际上定期召开多维数据分析会议,平行因子技术已经逐步成为通信信号处理领域里一种新的研究手段。利用三线形交替最小二乘算法(Trilinear alternating least squares, TALS)进行平行因子分解,其应用于阵列信号处理中具有以下优点:参数自动配对、利用内在张量结构、无需谱峰搜索和适用于任意阵列等。文献[11]利用平行因子模型,解决了基于均匀圆阵的双基地 MIMO 雷达中多维角度估计问题。基于平行因子框架,文献[12]研究了电磁矢量传感器阵列中基于平行因子的盲 DOA 和极化估计算法。该算法将电磁矢量传感器阵列参数估计问题与平行因子模型相结合,利用平行因子分解获得参数矩阵的估计,再使用最小二乘原理估计出自动配对的参数估计。

传统的基于平行因子分解的阵列信号参数估计算法,具有参数自动配对、无需谱峰搜索及参数估计性能良好的优点,但是一般都需要很高的计算复杂度和存储空间,尤其在天线数和快拍数较多的情况下。为了降低传统的基于平行因子的算法计算复杂度和节约存储空间,可以将压缩感知理论<sup>[13-19]</sup>与平行因子分析技术结合。本文利用基于平行因子压缩感知(Compressed sensing - parallel factor, CS-PARAFAC)的角度估计算法,解决电磁矢量阵中的 DOA 估计问题。借助压缩过程,本文算法的计算复杂度低于传统的基于 PARAFAC 的角度估计算法,同时降低了对存储空间的需求。在角度估计性能方面,本文算法优于 ESPRIT 算法<sup>[20]</sup>,且接近于 PARAFAC 算法。

## 1 数据模型

考虑一个非均匀电磁矢量传感器线阵共有  $M$  个阵元。空间中共有  $K$  个信源,第  $k$  个信源的到达角记为  $\theta_k$ 。电磁矢量传感器阵元接收到的第  $k$  个信源的信号为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{r}_k(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta_k \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \cos\theta_k \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \\ -\sin\theta_k & 0 \\ \sin\varphi_k & \cos\theta_k \cos\varphi_k \\ -\cos\varphi_k & \cos\theta_k \sin\varphi_k \\ 0 & -\sin\theta_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\gamma_k e^{j\eta_k} \\ \cos\gamma_k \end{bmatrix} b_k(t) = \mathbf{s}_k b_k(t) \quad (1)$$

式中: $\theta_k$  和  $\varphi_k$  分别为第  $k$  个信源的到达角和方位角; $\gamma_k$  和  $\eta_k$  为信源的极化信息; $\mathbf{s}_k \in \mathbf{C}^{6 \times 1}$  为接收极化矢量,它不仅与入射波的极化有关,而且和 DOA 信息有关, $\mathbf{s}_k$  可表示为

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \cos\theta_k \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \\ -\sin\theta_k & 0 \\ \sin\varphi_k & \cos\theta_k \cos\varphi_k \\ -\cos\varphi_k & \cos\theta_k \sin\varphi_k \\ 0 & -\sin\theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\gamma_k e^{j\eta} \\ \cos\gamma_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

对于线阵而言,方位角  $\varphi_k = 90^\circ, k=1, 2, \dots, K$ 。对于第  $k$  个信号源  $b_k(t)$ ,其到达角为  $\theta_k$ ,极化参数分别为  $\gamma_k$  和  $\eta_k$ 。第  $m$  个阵元相对参考阵元(第 1 个阵元)的相位滞后为:  $-2\pi d_m \sin\theta_k / \lambda$ ,其中  $\lambda$  代表波长。当信源  $b_k(t)$  入射该线阵时,第  $k$  个信源的导向矢量可以记为

$$\mathbf{a}_k = [1, e^{-j2\pi d_1 \sin\theta_k / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi d_M \sin\theta_k / \lambda}]^T \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{a}_k \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 。  $K$  个信源的导向矩阵为

$$\mathbf{A}_R = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{A}_R \in \mathbf{C}^{M \times K}$ 。考虑到接收极化矢量,完整的接收导向矩阵可以写成<sup>[21]</sup>

$$\mathbf{A}_R = [\mathbf{a}(\theta_1) \otimes \mathbf{s}_1, \mathbf{a}(\theta_2) \otimes \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{a}(\theta_K) \otimes \mathbf{s}_K] = \mathbf{A}_R \circ \mathbf{S} \quad (5)$$

式中:“ $\otimes$ ”和“ $\circ$ ”分别为 Kronecker 积和 Khatri-Rao 积;  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_K] \in \mathbf{C}^{6 \times K}$  为极化矩阵。单快拍下电磁矢量阵的接收信号可以表示成<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{b}(t) = (\mathbf{A}_R \circ \mathbf{S}) \mathbf{b}(t) \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{b}(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_K(t)]^T \in \mathbf{C}^{K \times 1}$  为信源矢量。

对于  $J$  个快拍的情况,得到的数据矩阵  $\mathbf{X} \in \mathbf{C}^{6M \times J}$  为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SD_1(\mathbf{A}) \\ SD_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ SD_M(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \mathbf{B}^T = [\mathbf{A} \circ \mathbf{S}] \mathbf{B}^T \quad (7)$$

式中:  $D_m(\mathbf{A})$  表示取矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $m$  行的元素构造一个对角矩阵;  $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_K] \in \mathbf{C}^{J \times K}$  为信源矩阵。  $\mathbf{X}_m$  用切片形式就可表示为

$$\mathbf{X}_m = SD_m(\mathbf{A}) \mathbf{B}^T \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (8)$$

考虑噪声时,接收信号表示为  $\tilde{\mathbf{X}}_m = \mathbf{X}_m + \mathbf{N}_m = SD_m(\mathbf{A}) \mathbf{B}^T + \mathbf{N}_m, m = 1, 2, \dots, M$ ,其中  $\mathbf{N}_m$  为接收噪声的切片。式(8)又可以表示为平行因子模型的形式<sup>[22-25]</sup>

$$x_{m,j,p} = \sum_{f=1}^k a_{m,f} b_{j,f} s_{p,f} \quad m = 1, \dots, M; j = 1, \dots, J; p = 1, \dots, 6 \quad (9)$$

式中:  $a_{m,f}, s_{p,f}$  和  $b_{j,f}$  分别为方向矩阵  $\mathbf{A}$  中的  $(m, f)$  元素、极化矩阵  $\mathbf{S}$  中的  $(p, f)$  元素和信源矩阵  $\mathbf{B}$  中的  $(j, f)$  元素。根据平行因子模型的结构特征,可以得到其他两种切片形式

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{B} D_p(\mathbf{S}) \mathbf{A}^T \quad p = 1, 2, \dots, 6 \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{A} D_j(\mathbf{B}) \mathbf{S}^T \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (11)$$

3 种切片形式体现了 3 种不同的分集方式,分别是空间分集、极化分集和时分分集。式(10)和(11)又可表示为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} D_1(\mathbf{S}) \\ \mathbf{B} D_2(\mathbf{S}) \\ \vdots \\ \mathbf{B} D_P(\mathbf{S}) \end{bmatrix} \mathbf{A}^T = [\mathbf{S} \circ \mathbf{B}] \mathbf{A}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{D}_1(\mathbf{B}) \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_2(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_J(\mathbf{B}) \end{bmatrix} \mathbf{S}^T = [\mathbf{B} \circ \mathbf{A}]\mathbf{S}^T \quad (13)$$

## 2 角度估计算法

传统的平行因子角度估计方法,直接对式(9)中的模型进行平行因子分解,根据获得的方向矩阵来估计到达角,然而直接平行因子分解的计算复杂度比较高,尤其在天线数或快拍数较多时。为了降低计算复杂度、节约存储空间,本文算法首先对接收信号的平行因子模型进行压缩,然后利用TALS算法进行平行因子分解,得到关于压缩后的方向矩阵的估计,最后利用信号的稀疏性实现角度估计。

### 2.1 压缩

本文将原来的三维模型  $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbf{C}^{M \times P \times J}$  压缩成一个更小的三维矩阵  $\bar{\mathbf{X}}' \in \mathbf{C}^{M' \times P' \times J'}$ ,且  $M' < M$ ,  $J' < J$ ,  $P' < P$ 。压缩过程如图1所示。首先定义3个压缩矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{M \times M'}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^{P \times P'}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbf{C}^{J \times J'}$ ,它们可以由随机信号发生器或Tucker3分解得到<sup>[19]</sup>。不考虑噪声的情况下,压缩后的数据矩阵可以写成

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{V}^T) \mathbf{X} \mathbf{W} = (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{V}^T) [\mathbf{A} \circ \mathbf{S}] \mathbf{B}^T \mathbf{W} \quad (14)$$

根据Kronecker积的性质<sup>[19]</sup>,得出

$$(\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{V}^T) [\mathbf{A} \circ \mathbf{S}] = (\mathbf{U}^T \mathbf{A}) \circ (\mathbf{V}^T \mathbf{S}) \quad (15)$$

定义  $\mathbf{A}' = \mathbf{U}^T \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}' = \mathbf{V}^T \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{B}' = \mathbf{W}^T \mathbf{B}$ ,则式(14)可以重写成

$$\mathbf{X}' = [\mathbf{A}' \circ \mathbf{S}'] \mathbf{B}'^T \quad (16)$$

类似地,根据式(12,13),可以得到另外两个压缩矩阵

$$\mathbf{Y}' = [\mathbf{S}' \circ \mathbf{B}'] \mathbf{A}'^T \quad (17)$$

$$\mathbf{Z}' = [\mathbf{B}' \circ \mathbf{A}'] \mathbf{S}'^T \quad (18)$$

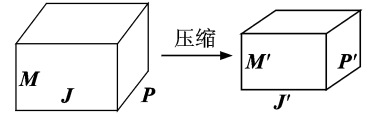


图1 三线性模型压缩

Fig. 1 Trilinear model compression

### 2.2 平行因子分解

许多信号处理方法都基于矩阵原理。矩阵分解只有在额外结构特性(如正交性、Vandermonde特性、Toeplitz特性及恒模约束)存在时,才可以保证唯一性。与这些情况相比,平行因子分解具有一个显著的特征:它通常唯一<sup>[23]</sup>。三线性交替最小二乘算法是平行因子分解中常用的数据检测方法。本文简要地给出三线性交替最小二乘中的基本思想<sup>[22]</sup>:(1)在前次得到的两个矩阵的估计基础上,每次通过最小二乘更新一个矩阵;(2)继续更新其他矩阵;(3)重复矩阵更新过程直到算法收敛。

根据式(16),最小二乘拟合为

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}', \hat{\mathbf{B}}', \hat{\mathbf{S}}'} \|\tilde{\mathbf{X}}' - [\hat{\mathbf{A}}' \circ \hat{\mathbf{S}}'] \hat{\mathbf{B}}'^T\|_F \quad (19)$$

式中: $\tilde{\mathbf{X}}'$ 为包含噪声的压缩后的接收数据矩阵; $\|\cdot\|_F$ 为Frobenius范数。

对于矩阵  $\mathbf{B}'$  的最小二乘更新为

$$\hat{\mathbf{B}}'^T = [\hat{\mathbf{A}}' \circ \hat{\mathbf{S}}']^+ \tilde{\mathbf{X}}' \quad (20)$$

式中: $\hat{\mathbf{A}}'$ ,  $\hat{\mathbf{S}}'$  分别为  $\mathbf{A}'$  和  $\mathbf{S}'$  的估计。同理,根据式(17),最小二乘拟合为

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}', \hat{\mathbf{B}}', \hat{\mathbf{S}}'} \|\tilde{\mathbf{Y}}' - [\hat{\mathbf{S}}' \circ \hat{\mathbf{B}}'] \hat{\mathbf{A}}'^T\|_F \quad (21)$$

式中: $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 为包含噪声的压缩后的数据矩阵。矩阵  $\mathbf{A}'$  的最小二乘更新为

$$\hat{\mathbf{A}}'^T = [\hat{\mathbf{S}}' \circ \hat{\mathbf{B}}']^+ \tilde{\mathbf{Y}}' \quad (22)$$

式中: $\hat{\mathbf{S}}'$ ,  $\hat{\mathbf{B}}'$  分别为  $\mathbf{S}'$  和  $\mathbf{B}'$  的估计。

根据式(18),最小二乘拟合为

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}', \hat{\mathbf{B}}', \hat{\mathbf{S}}'} \|\tilde{\mathbf{Z}}' - [\hat{\mathbf{B}}' \circ \hat{\mathbf{A}}'] \mathbf{S}'^T\|_F \quad (23)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{Z}}'$  为包含噪声的压缩后的数据矩阵。对于矩阵  $\mathbf{S}'$  的最小二乘更新为

$$\hat{\mathbf{S}}'^T = [\hat{\mathbf{B}}' \circ \hat{\mathbf{A}}']^+ \tilde{\mathbf{Z}}' \quad (24)$$

式中:  $\hat{\mathbf{B}}', \hat{\mathbf{A}}'$  分别为  $\mathbf{B}'$  和  $\mathbf{A}'$  的估计。

根据式(20, 22, 24), 依次更新矩阵  $\hat{\mathbf{B}}', \hat{\mathbf{A}}'$  和  $\hat{\mathbf{S}}'$ , 重复矩阵更新过程, 直到算法收敛, 便得到关于矩阵  $\mathbf{B}', \mathbf{A}'$  和  $\mathbf{S}'$  最终的估计结果。下面讨论平行因子分解的可辨识性问题。

**定理 1**<sup>[23]</sup> 压缩后的数据矩阵  $\mathbf{X}'_{m'} = \mathbf{S}' D_{m'} (\mathbf{A}') \mathbf{B}'^T, m' = 1, \dots, M'$ , 其中  $\mathbf{A}' \in \mathbf{C}^{M' \times K}, \mathbf{S}' \in \mathbf{C}^{P' \times K}, \mathbf{B}' \in \mathbf{C}^{J' \times K}$ 。考虑所有的矩阵都是满  $k$  秩<sup>[23]</sup>, 如果存在

$$k_{A'} + k_{S'} + k_{B'} \geq 2K + 2 \quad (25)$$

那么  $\mathbf{A}', \mathbf{S}'$  和  $\mathbf{B}'$  对于列交换和(复数)尺度变换唯一。

在平行因子分解之后, 获得各矩阵的估计

$$\hat{\mathbf{A}}' = \mathbf{A}' \mathbf{\Pi} \mathbf{\Delta}_1 + \mathbf{E}_1 \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{S}}' = \mathbf{S}' \mathbf{\Pi} \mathbf{\Delta}_2 + \mathbf{E}_2 \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{B}}' = \mathbf{B}' \mathbf{\Pi} \mathbf{\Delta}_3 + \mathbf{E}_3 \quad (28)$$

式中:  $\mathbf{\Pi}$  为置换矩阵,  $\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_3$  为尺度模糊矩阵, 满足  $\mathbf{\Delta}_1 \mathbf{\Delta}_2 \mathbf{\Delta}_3 = \mathbf{I}_K; \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{E}_3$  为估计误差矩阵。在平行因子分解中, 尺度模糊和列模糊互不影响。尺度模糊可以通过归一化轻易解决, 列模糊在角度估计中不予考虑。

### 2.3 DOA 估计

用  $\hat{\mathbf{a}}'_k$  代表估计矩阵  $\hat{\mathbf{A}}'$  的第  $k$  列。根据压缩矩阵有

$$\hat{\mathbf{a}}'_k = \mathbf{U}^T \partial \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{a}_k$  为  $\mathbf{A}$  的第  $k$  列;  $\mathbf{n}_k$  为相应噪声;  $\partial$  为比例系数。

构造过矩阵  $\mathbf{A}_Q \in \mathbf{C}^{M \times Q} (Q \gg M)$ , 它由与每个潜在信源位置相关的导向矢量作为列向量构成

$$\mathbf{A}_Q = [\mathbf{a}_{g1}, \mathbf{a}_{g2}, \dots, \mathbf{a}_{gQ}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -j2\pi d_2 g(1)/\lambda & -j2\pi d_2 g(2)/\lambda & \dots & -j2\pi d_2 g(Q)/\lambda \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -j2\pi d_M g(1)/\lambda & -j2\pi d_M g(2)/\lambda & \dots & -j2\pi d_M g(Q)/\lambda \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中:  $g(q) = \sin \alpha_q, q = 1, 2, \dots, Q$ , 且  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_q < \dots < \alpha_Q$ 。定义采样矢量  $\mathbf{g} = [g(1), g(2), \dots, g(Q)]$ 。式(29)可以重写为

$$\hat{\mathbf{a}}'_k = \mathbf{U}^T \mathbf{A}_Q \mathbf{e}_q + \mathbf{n} \quad (31)$$

式中:  $\mathbf{e}_q$  为一个维数是  $Q \times 1$  的稀疏矢量, 仅在第  $q$  个位置上的元素为 1, 其他位置上的元素均为 0。关于  $\mathbf{e}_q$  的估计, 可以通过  $l_0$  范数得到

$$\begin{aligned} \min \|\hat{\mathbf{a}}'_k - \mathbf{U}^T \mathbf{A}_Q \mathbf{e}_q\|_F \\ \text{s. t. } \|\mathbf{e}_q\|_0 = 1 \end{aligned} \quad (32)$$

根据式(32)得到  $\mathbf{e}_q$  的估计后, 则有

$$\mathbf{g} \mathbf{e}_q = \sin \hat{\theta}_k \quad (33)$$

所以到达角  $\theta_k$  的估计为

$$\hat{\theta}_k = \sin^{-1}(\mathbf{g} \mathbf{e}_q) \quad (34)$$

### 2.4 角度估计算法流程

角度估计算法流程如下: (1) 通过接收数据  $\mathbf{X}$  构造三维矩阵  $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbf{C}^{M \times P \times J}$ ; (2) 借助压缩矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{M \times M'}, \mathbf{V} \in \mathbf{C}^{P \times P'}$  和  $\mathbf{W} \in \mathbf{C}^{J \times J'}$ , 对三线性模型进行压缩, 得到  $\bar{\mathbf{X}}' \in \mathbf{C}^{M' \times P' \times J'}$ ; (3) 根据三线性交替最小二乘

算法对压缩后的三维矩阵  $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbf{C}^{M \times P' \times J'}$  进行平行因子分解,根据式(20,22,24)得到  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A}'$  和  $\mathbf{S}'$  的估计。  
 (4)利用角度域的稀疏性,实现 DOA 估计。

### 3 性能分析与仿真结果

#### 3.1 性能分析

传统的平行因子算法在每次迭代过程中算法复杂度为  $O\{3K^3 + K^2(M + P + J) + 3KMJP + 6K^2(MP + JM + JP)\}^{[24,25]}$ ,而借助压缩过程,本文算法的计算复杂为  $O\{3K^3 + K^2(J' + M' + P') + 6K^2(M'P' + J'M' + J'P') + 3KM'J'P'\}$ 。由于  $M' < M, J' < J, P' < P$ ,所以本文算法复杂度低于传统的平行因子方法。仿真过程中,假设  $M=16, P=8, J=100$ ,压缩后  $M'=P'=J'=5$ 。

(1)借助压缩过程,该算法的计算复杂度和存储空间需求低于传统的平行因子算法;(2)仿真结果证明,该算法的角度估计性能优于 ESPRIT 算法,且接近于传统的平行因子算法;(3)该算法无需谱峰搜索,且对线阵的阵列结构没有任何要求。

#### 3.2 仿真结果

为了评估算法的角度估计性能,给出求根均方误差(Root mean square error, RMSE)定义为

$$RMSE = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{k,l} - \theta_k)^2} \quad (35)$$

式中:  $\theta_k$  为第  $k$  个信号的到达角的精确值;  $\hat{\theta}_{k,l}$  为第  $l$  次蒙特卡罗实验中获得的关于到达角  $\theta_k$  的估计值;  $L$  为总的仿真次数。仿真过程中,假设有  $K=3$  个信源,到达角分别为  $\theta = [10^\circ, 20^\circ, 31^\circ]$ ,极化参数分别为  $\gamma = [5^\circ, 20^\circ, 30^\circ], \eta = [15^\circ, 25^\circ, 35^\circ]$ 。阵列为非均匀电磁矢量线阵,共有  $M$  个阵元,快拍数为  $J$ 。

图 2 所示为本文算法在信噪比 SNR=15 dB 下的角度估计结果。仿真过程中  $M=16$ ,空间位置为  $[0.00, 0.35, 0.75, 1.25, 1.60, 2.05, 2.50, 2.80, 3.15, 3.47, 3.80, 4.20, 4.55, 4.89, 5.13, 5.50]\lambda, J=100$ 。图 2 给出了 100 次算法仿真的结果。从图 2 可以看出,该算法具有较好的角度估计性能。图 3 为相同参数配置下 3 种不同角度估计算法的性能对比。仿真过程中,假设  $M=16, J=100$ 。从图 3 中可以看出,算法 CS-PARAFAC 的角度估计性能优于 ESPRIT 算法<sup>[20]</sup>,且接近于传统的 PARAFAC 算法。图 4 给出了 3 种算法角度估计性能随阵元数  $M$  改变而变化的情况,其中  $J=100$ 。由图 4 可以看出,算法角度估计性能随阵元数  $M$  的增加而改善,其原因在于提高了空间分集增益。图 5

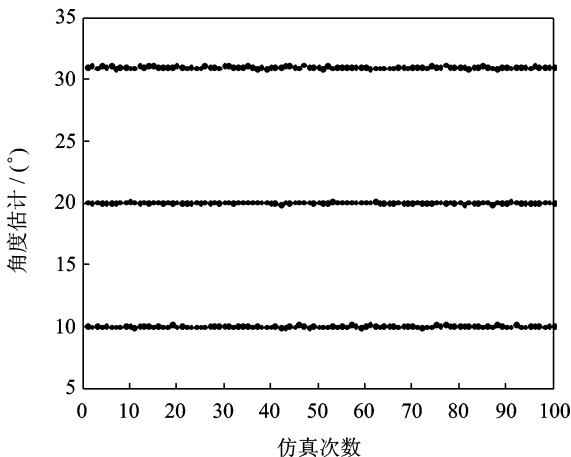


图 2 角度估计结果(SNR=15 dB)

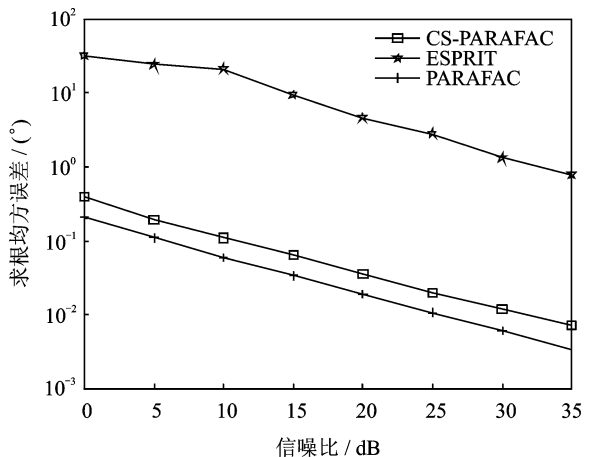


图 3 不同算法的角度估计性能对比

Fig. 2 Angle estimation results with SNR=15 dB

Fig. 3 Angle estimation comparison of different algorithms

为 3 种算法的角度估计性能随快拍数  $J$  改变而变化的情况,其中  $M=12$ 。由图 5 可以看出,算法的角度估计性能随快拍数  $J$  的增加而改善,其原因在于提高了时间分集增益。

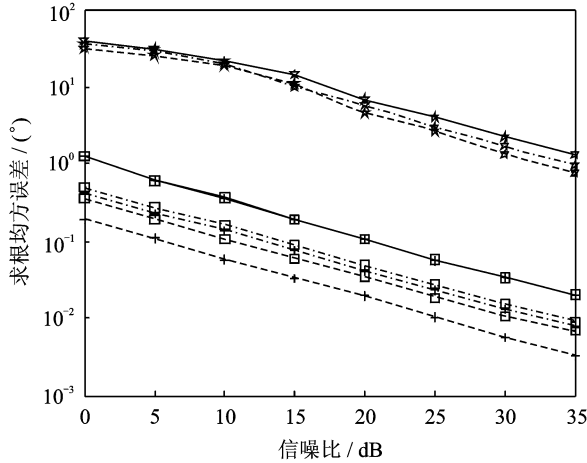


图 4 不同阵元数下的角度估计性能  
 CS-PARAFAC: —□—  $M=8$     - -□-  $M=12$     - □ -  $M=16$   
 ESPRIT: —★—  $M=8$     - -★-  $M=12$     - ★ -  $M=16$   
 PARAFAC: —+—  $M=8$     - -+-  $M=12$     - +-  $M=16$

图 4 不同阵元数下的角度估计性能

Fig. 4 Angle estimation performance with different numbers of antennas

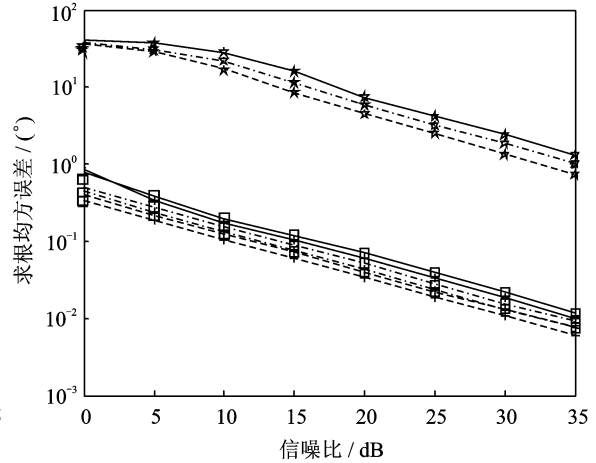


图 5 不同快拍数下的角度估计  
 CS-PARAFAC: —□—  $J=50$     - -□-  $J=100$     - □ -  $J=150$   
 ESPRIT: —★—  $J=50$     - -★-  $J=100$     - ★ -  $J=150$   
 PARAFAC: —+—  $J=50$     - -+-  $J=100$     - +-  $J=150$

图 5 不同快拍数下的角度估计

Fig. 5 Angle estimation performance with different snapshots

## 4 结束语

本文将平行因子技术与压缩感知理论相结合,解决了非均匀电磁矢量线阵中的到达角估计问题。首先将电磁矢量阵的接收信号构造为三线性模型,然后将其压缩成一个更小的三线性模型,之后对压缩后的三线性模型进行三线性分解,最后利用信号的稀疏性实现到达角估计。压缩降低了传统的基于平行因子的角度估计算法的计算复杂度和存储空间需求。仿真结果表明,本文算法的角度估计性能优于 ESPRIT 算法,且接近于传统的平行因子方法。此外,本文算法无需谱峰搜索和特征值分解,适用于均匀和非均匀电磁矢量线阵。

## 参考文献:

- [1] Ng J W P, Manikas A. Polarisation-sensitive array in blind MIMO CDMA system[J]. *Electron Lett*, 2005,41(17):970-972.
- [2] Kaptsis I, Balmain K G. Base station polarization-sensitive adaptive antenna for mobile radio[C]//3rd Annu Int Conf Universal Pers Commun. London, UK: [s. n.], 1994:230-235.
- [3] Nehorai E P. Vector sensor processing for electromagnetic source location[C]//25 Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, California: IEEE Press, 1991:566-572.
- [4] Nehorai E P. Vector-sensor array processing for electronic source localization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994,42(2):376-398.
- [5] Jian Li. Direction and polarization estimation using arrays with small loops and short dipoles[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993,41(3):379-487.
- [6] Li J, Compton R T. Two-dimensional angle and polarization estimation using the ESPRIT algorithm[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1992,40(5):550-555.
- [7] Won K T, Zoltowski M D. ESPRIT-based 2-D direction finding with a sparse uniform array of electromagnetic vector-sensors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000,48(12):2195-2204.

- [8] Zoltowski M D, Wong K T. Closed-form eigenstructure-based direction finding using arbitrary but identical subarrays on a sparse uniform cartesian array grid[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(8):2205-2210.
- [9] 许友根, 刘志文. 电磁矢量传感器阵列相干信号源波达方向和极化参数的同时估计:空间平滑方法[J]. *通信学报*, 2004, 25(5): 28-38.  
Xu Yougen, Liu Zhiwen. Simultaneous estimation of 2-D DOA and polarization of multiple coherent sources using an electromagnetic vector sensor array[J]. *Journal of China Institute of Communications*, 2004, 25(5):28-38.
- [10] Pham T D, Möcks J. Beyond principal component analysis: A trilinear decomposition model and least squares estimation[J]. *Psychometrika*, 1992, 57(2):203 - 215.
- [11] 许凌云, 张小飞, 许宗泽. 基于圆阵双基地 MIMO 雷达多视角联合估计[J]. *数据采集与处理*, 2012, 27(3):279-282.  
Xu Lingyun, Zhang Xiaofei, Xu Zongze. Joint multi-angle estimation in bistatic MIMO radar based on uniform circular array[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2012, 27(3): 279-282.
- [12] 陈芸. 电磁矢量传感器阵 DOA 和极化联合估计[D]. 南京:南京航空航天大学, 2014.  
Chen Yun. Joint DOA and polarization estimation for electromagnetic vector sensor array [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2014.
- [13] Akcakaya M, Tarokh V. A frame construction and a universal distortion bound for sparse representations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6):2443-2450.
- [14] Babadi B, Kalouptsidis N, Tarokh V. Asymptotic achievability of the Cramer-Rao bound for noisy compressive sampling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(3):1233-1236.
- [15] Chan W L, Charan K. A single-pixel terahertz imaging system based on compressive sensing[J]. *Applied Physics Letters*, 2008, 93(12):101-105.
- [16] Elad M. Optimized projections for compressed sensing[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2007, 55(12):5695-5702.
- [17] Herman M, Strohmer T. High-resolution radar via compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2275-2284.
- [18] Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Process Mag*, 2008, 25(2):21-30.
- [19] Sidiropoulos N D, Kyrillidis A. Multi-way compressed sensing for sparse low-rank tensors[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(11):757-760.
- [20] Li Jianfeng, Zhang Xiaofei. Closed-form blind 2D-DOD and 2D-DOA estimation for MIMO radar with arbitrary arrays[J]. *Wireless Personal Communications*, 2013, 69(1):175-186.
- [21] Sidiropoulos N D, Bro R, Giannakis G B. Parallel factor analysis in sensor array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(8):2377-2388.
- [22] Kruskal J B. Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1977, 18(2):95-138.
- [23] Sidiropoulos N D, Liu X. Identifiability results for blind beamforming in incoherent multipath with small delay spread[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(1):228-236.
- [24] Xiaofei Z, Gaopeng F, Jun Y, et al. Angle-frequency estimation using trilinear decomposition of the oversampled output[J]. *Wireless Personal Communications*, 2009, 51(2):365-373.
- [25] Zhang Xiaofei, Xu Dazhuan. Novel blind joint direction of arrival and frequency estimation for uniform linear array, progress in electromagnetics[J]. *Research-PIER*, 2008, 86:199-215.

## 作者简介:



张小飞(1977-),男,教授,研究方向:移动通信技术、通信信号处理及阵列信号处理。



李书(1992-),通信作者,女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理, E-mail:lishu\_nuaa@163.com。



郑旺(1993-),男,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理。



