

基于 SL_0 范数的改进稀疏信号重构算法

冯俊杰^{1,2} 张弓¹ 文方青¹

(1. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京, 210016; 2. 六盘水师范学院物理与电子科学系, 六盘水, 553004)

摘要: 平滑范数 (Smoothed l_0 , SL_0) 压缩感知重构算法通过引入平滑函数序列将求解最小 l_0 范数问题转化为平滑函数优化问题, 可以有效地用于稀疏信号重构。针对平滑函数的选取和算法稳健性问题, 提出一种新的平滑函数序列近似范数, 结合梯度投影法优化求解, 并进一步提出采用奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 方法改进算法的稳健性, 实现稀疏度信号的精确重构。仿真结果表明, 在相同的测试条件下, 本文算法相比 OMP 算法、 SL_0 算法以及 L1-magic 算法在重构精度、峰值信噪比方面都有较大改善。

关键词: 压缩感知; 稀疏信号重构算法; 平滑 l_0 范数; 奇异值分解

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A

Improved Sparse Signal Reconstruction Algorithm Based on SL_0 Norm

Feng Junjie^{1,2}, Zhang Gong¹, Wen Fangqing¹

(1. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. Department of Physics and Information Technology, Liupanshui Normal University, Liupanshui, 553004, China)

Abstract: The smoothed l_0 norm algorithm in compressive sensing introduces smoothed functions to approximate the l_0 norm. The problem of minimization of l_0 norm can be transferred to a convex optimization problem of the smoothed functions, which could be used efficiently for compressive sensing reconstruction. Aiming at the choice of appropriate smoothed functions and improvement of the robustness of the algorithm, a new smoothed function sequence with gradient projection method has been proposed to solve the optimization problem in this paper. Singular value decomposition (SVD) method has been further proposed to improve the robustness of algorithm, then the accurate reconstruction of sparse signal is realized. Experimental results show that the proposed algorithm improve ignificantly in both the reconstruction accuracy and the peak value signal-to-noise ratio under the same test conditions.

Key words: compressive sensing; sparse signal reconstruction algorithm; smoothed l_0 norm; singular value decomposition (SVD)

引 言

近几年压缩感知理论 (Compressive sensing, CS) 受到越来越广泛的关注^[1-3]。与传统的奈奎斯特采

样定理不同,CS 理论对于具有稀疏性或可压缩的信号,可将数据采样与压缩同时过求解一个优化问题从少量的观测值以高概率重构出原始信号,极大地降低所需时间,且质量损失较小,一经出现就成为研究的热点,目前关于 CS 的应用研究已经涉及到很多领域,如图像处理^[4-6]、语音视频信号处理^[7-8]以及雷达信号处理^[9-10]等。

1 压缩感知与重构算法

设信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 是 K 稀疏向量,即包含非零系数的个数为 K , $K \leq N$ 。对信号进行压缩观测,则可以得到低维的观测值 \mathbf{y} , $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, 其中 Φ 为观测矩阵, $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $M < N$ 。观测值中包含重构信号的重要信息,但由于观测值维数 M 远小于信号维数 N ,即方程中未知数的个数 N 大于方程个数 M ,由 \mathbf{y} 直接求解 \mathbf{x} 较难实现。但由于信号 \mathbf{x} 是稀疏的,即只有有限个非零值,因此在求解上面方程组时可通过附加一定的限制条件寻找其最稀疏解,于是将上述方程组的求解问题转化为一个最优化问题,其求解模型为

$$\begin{cases} \min & \|\mathbf{x}\|_0 \\ \text{s. t.} & \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

求解上述模型的方法称为基于 l_0 范数最小优化方法,信号 \mathbf{x} 的 l_0 范数是该信号中非零元素的个数。求解 l_0 范数最小化问题需要组合搜索且对噪声极为敏感。通常采用最小 l_1 范数代替最小 l_0 范数,转化为一个凸优化问题,并且可以用线性规划方法求解,如基追踪法^[11-12]和迭代阈值类^[13]等,该方法复杂度高,计算量大。在实际中,往往采用一些贪婪算法进行近似求解,如正交匹配追踪(Orthogonal matching pursuit, OMP)算法^[14]和梯度类算法^[15]等,虽然计算速度较快,但贪婪算法往往不能得到最优解。Mohimani 等人通过最速下降法和梯度投影原理提出采用带参数的平滑函数逼近信号的最小 l_0 范数,从而将求解最小 l_0 范问题转化为平滑函数的极值问题,称为平滑 l_0 范数重构算法(Smoothed l_0 norm, SL0)^[16]。它在具有相同精度的情况下,其重构速度比基追踪算法(Basis pursuit, BP)快 2~3 倍。

本文针对如何选取合适的平滑函数去近似 l_0 范数进行研究,结合梯度投影法,进行优化求解。尽管梯度投影方法计算简单,但在求解过程中需要对矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 求逆, \mathbf{A} 为系数矩阵。在实际应用中如果该矩阵的条件数较大,则可能为病态矩阵,进而影响算法的稳健性,基于此,本文进一步采用奇异值分解方法来改善算法的稳健性。

2 改进 SL0 重构算法

SL0 算法中的关键问题是选取合适的平滑连续函数来逼近 l_0 范数,通过求解连续函数的最小解使得 l_0 范数最小。文献[16]采用 $G_\sigma(\alpha) = \sum_i \exp(-\frac{\alpha_i^2}{2\sigma^2})$ ($g_\sigma(\alpha_i) = \exp(-\frac{\alpha_i^2}{2\sigma^2})$) 平滑函数来近似 l_0 范数。通过改变参数 σ ,可以获得最小 l_0 范数解。为了进一步提高其逼近性能,本文采用如下形式函数 $f_\sigma(\alpha_i) = \exp(-|\alpha_i|^p/\sigma)$ ($0 < p < 1$) 作为平滑函数,来近似 l_0 范数,显然有

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(\alpha_i) = \begin{cases} 0 & \alpha_i \neq 0 \\ 1 & \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

记 $F_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = N - \sum_{i=1}^N f_\sigma(\alpha_i)$, $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 非零元素的个数。由 l_0 范数定义可得,当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, $F_\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 逼近最小 l_0 范数解,即 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 。

可以看出,当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, $1 - g_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \alpha^2/\sigma^2$, 根据向量范数定义可以看出函数 $G_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = N - \sum_{i=1}^N g_\sigma(\alpha_i)$ 趋近 l_2 范数;而 $1 - f_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \rightarrow |\boldsymbol{\alpha}|^p/\sigma$, 函数 $F_\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 趋近 l_p 范数。故当 σ 取较大值时,本文所

选平滑函数较高斯函数以更高概率求出最优解。

基于改进平滑 l_0 范数稀疏信号重构算法可以将式(1)用以下模型近似求解

$$\begin{cases} \min & F_\sigma(\alpha) \\ \text{s. t.} & y = \Phi\alpha \end{cases} \quad (3)$$

式中: σ 的大小决定逼近的程度。通过选择一个递减序列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, 对每一个 σ_i 所对应的目标函数优化求解, 直到 σ 足够小。

基于改进平滑 l_0 范数稀疏信号重构算法包括两个循环。在外循环中, 控制 σ 取值由大到小。对每个 σ 值, 利用最速下降法求 $F_\sigma(\alpha)$ 的最小值, 并将该 α 值作为下一次迭代的初值。梯度投影在内循环使用。整个算法步骤如下。

初始化: (1) 将 $s = \Phi\mathbf{A}$ 的最小 l_2 范数解 $\hat{\mathbf{A}} = \Phi^H(\Phi\Phi^H)^{-1}s$ 作为解的初始值;

(2) 选择一个合适的递减的 $\{\sigma\}$ 序列 $[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J]$;

迭代求解: for $j=1, \dots, J$:

(1) 令 $\sigma = \sigma_j$

(2) 在可行集 $\alpha = \{\alpha: |\Phi\alpha - s|_2 < \epsilon\}$ 上, 通过 L 次迭代, 求解 F_σ 的最小值

①: $\alpha = \hat{\alpha}_{j-1}$

②: for $l=1, \dots, L$:

(a) 求解 $-F_\sigma$ 的梯度 δ ;

(b) $\alpha \leftarrow \alpha - \mu\delta$, (步长因数 μ 为一小正常数);

(c) 将 α 投影到可行集上 $\alpha = \alpha - \Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}(\Phi\alpha - s)$;

(3) $\alpha_j = \alpha$;

最后得出最优解: $\alpha = \hat{\alpha}$ 。

关于所选参数做几点说明。 $\hat{\alpha}_0 = \Phi^H(\Phi\Phi^H)^{-1}s$ 为最小 l_2 范数解。文献[16]中, σ_1 满足 $\sigma_1 > 4\max_i |\hat{\alpha}_0(i)|$ 条件, 此时 $\exp(-\hat{\alpha}_0(i)^2/2\sigma_1^2) > 0.96 \approx 1$, 对于本文中选取的函数, $f_\sigma(\alpha_i) = |\alpha_i|^p / \sigma(p = \frac{1}{2})$, 当 $\sigma_1 > 16\max_i |\hat{\alpha}_0(i)|$ 。参数 σ_j 的选取同样重要, 当 $\sigma_j \rightarrow 0$ 时, 范数 $\|\cdot\|_\sigma$ 趋近于 l_0 范数。 l_0 范数不适合表示含有较多小值元素的向量。所以 σ_j 不应太小, 本文选择 $\sigma_j = E(\max(|\Psi^H(\Psi\Psi^H)^{-1}|))$ 。选择步长因数 $\mu = 0.6$ 。

在实际应用中, 如果矩阵 $\Psi\Psi^H$ 条件数过大, 矩阵 $\Psi\Psi^H$ 可能为病态。直接使用 $(\Psi\Psi^H)^{-1}$ 可能会导致不能收敛, 影响算法的稳健性。

采用奇异值分解方法改善该病态问题。记 $\Psi = U\Sigma V$, U, V, Σ 分别为 Ψ 的左奇异矩阵、右奇异矩阵和特征值矩阵。 $U = (U_1 U_2)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$, 其中 Σ_1 由较大特征值构成, Σ_2 由较小特征值构成。 U_1, V_1 为较大特征值对应的特征向量。记 $\Psi_1 = U_1 \Sigma_1 V_1$, 用 $U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H$ 代替 $(\Psi\Psi^H)^{-1}$ 改善算法稳健性。下面对 SVD 方法做进一步证明。设信号 α 的初始估计值为

$$\hat{\alpha}_0 = \Psi^H(U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H)s = (V_1^H V_2^H) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{pmatrix} (U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H)s = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^H s \quad (4)$$

可得

$$\Psi\hat{\alpha}_0 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} V_1^H \Sigma_1^{-1} U_1^H s = U_1 U_1^H s \quad (5)$$

即 $\hat{\alpha}_0$ 为 $s_0 = \Psi\alpha$ 的解。

下面证明投影 $\alpha \leftarrow \alpha - \Psi^H(U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H)(s - \Psi\alpha)$, 即投影在修正后的可行集 $\{\alpha: \Psi_1\alpha = s_0\}$ 上, 记 $\beta \leftarrow$

$$\alpha + \Psi^H(U_1 \Sigma_1^{-2} V_1^H)(s - \Psi\alpha)。$$

由于

$$\Psi^H(U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H) = (V_1^H, V_2^H) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{pmatrix} (U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^H) = U_1 U_1^H \quad (6)$$

可以得到

$$\Psi\beta = \Psi\alpha - U_1 U_1^H(U_1, U_2) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \alpha + U_1 U_1^H s = \Psi\alpha - U_1 \Sigma_1 V_1 \alpha + s_0 = s_0 \quad (7)$$

3 仿真结果与对比分析

为了验证本文算法的重构性能,本文通过 Matlab 处理平台对该算法进行各项测试。

3.1 仿真 1(一维信号重构)

比较本文算法与 OMP, SL0, L1-magic 算法对一维离散信号重构效果。选取信号 $s = \Psi\alpha_0$, $\Psi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 为随机矩阵,服从高斯分布。 α_0 为离散信号,非零元素由 ± 1 组成,信号长度 $N=256$ 。对于本文算法和 SL0 算法,都选取外循环 $J=20$,内循环 $L=10$ 。进行 200 次重复实验。把本文算法与经典的 OMP 算法、L1-magic 算法以及 SL0 算法进行比较。

3.1.1 重构概率与信号稀疏度的变化情况

取信号测量次数 $M=128$ 时,改变信号的稀疏度,各种算法对稀疏信号的重构概率和所用时间的变化曲线如图 1,2 所示。

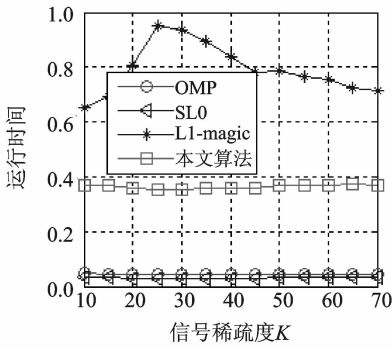


图 1 运行时间随信号稀疏度的变化

Fig. 1 Run time curve with the change of signal sparsity change

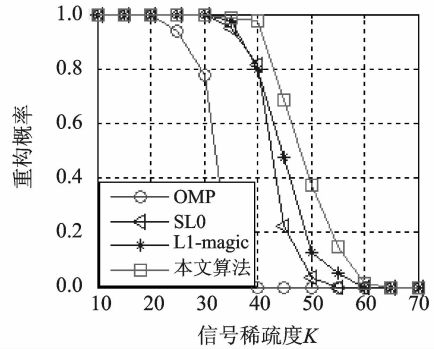


图 2 重构概率随信号稀疏度的变化

Fig. 2 Reconstruction probability curve with the of signal sparsity

由图 1,2 可以看出,本文中算法耗时比 OMP 算法和 SL0 算法长,比 L1-magic 算法运行时间短。当稀疏度等于 35 时,本文算法可以 100% 重构原始信号。随着信号稀疏度的增加,信号重构的概率逐渐减小,但本文算法相对其他算法有较高的重构概率。

3.1.2 各算法随着测量次数改变时重构性能的变化情况

取稀疏度 $K=25$ 不变,改变信号的测量次数,从 70 到 160,步长为 10,各种算法对信号的重构概率如图 3 所示。

可以看出,当信号测量次数为 70 时,4 种算法的重构质量都比较差,随着测量次数多增加,本文算法对信号的重构概率和其他几种算法一样,逐渐增加,但当测量次数达到 110 时,本文算法保持 98% 的重构概率,重构概率高于其他算法。

3.2 仿真 2(二维图像重构实验)

研究各算法对二维图像的重构性能,输入源图像为 256×256 的 house 测试图像,首先对输入图像划分子图像块,将每个子图像按列展开成一维矢量,选择离散余弦变换矩阵作为稀疏变换,观测矩阵采用高斯随机矩阵,对测量值分别采用 OMP, SL0, L1 magic 和本文算法恢复重构子图像,最后恢复合成原始大小的图像。压缩比为 0.5 时,重构效果如图 4 所示,各算法重构质量峰值信噪比、相对误差和运行时间如表 1 所示。由表 1 看出,OMP 算法和 SL0 算法耗时短,但其峰值信噪比和相对误差不如本文算法。从图 4 可以看出本文算法对图像的重构效果优于其他算法。

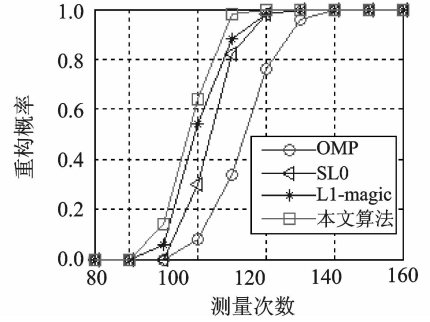


图 3 重构概率随信号测量数的变化
Fig. 3 Reconstruction probability curve with the number of signal measurements

表 1 不同算法图像重构性能评价

Tab. 1 Reconstructed image quality comparison of different algorithm

算法	峰值信噪比/dB	相对误差	运行时间/s
OMP	26.59	0.0915	15.89
SL0	29.25	0.0743	16.96
L1 magic	30.26	0.0691	33.21
本文算法	34.33	0.0586	24.67



(a) 原始图像 (b) OMP算法 (c) SL0算法 (d) L1 magic算法 (e) 本文算法
(a) Original image (b) OMP method (c) SL0 method (d) L1 magic method (e) Proposed method

图 4 各算法对图像的重构效果

Fig. 4 Reconstruction result for image of each algorithm

4 结束语

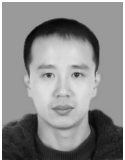
本文在深入研究 SL0 重构算法的基础上,针对近似 l_0 近似函数的选取,引入类似高斯函数作为平滑函数来逼近 l_0 范数,提出了改进 SL0 算法。梯度投影算法应用广泛,计算速度较快,但其系数矩阵可能是病态矩阵,传统 SL0 及 L1-magic 没有考虑这个问题。针对系数矩阵病态问题,采用截断奇异值分解方法对病态方程进行改进,提高重构算法的稳健性。仿真结果表明,本文算法是综合性能较好的重构算法。

参考文献:

[1] Goyal V K, Fletche A K, Rangan R S. Compressive sampling and lossy compression[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 48-56.

- [2] Becker S, Bobin J, Candès E J. NESTA: A fast and accurate first-order method for sparse recovery[J]. *Siam Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1): 1-39.
- [3] Donoho D L, Tsai Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information*, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [4] 孔繁锵, 井庆丰, 计振兴, 等. 基于帧间预测和联合优化的干涉多光谱图像压缩感知重建算法[J]. *南京航空航天大学学报*, 2013, 45(2): 225-231.
Kong Fanqiang, Jing Qingfeng, Ji Zhengxing, et al. Compressed sensing reconstruction algorithm of interferometric multi-spectral image based on interframe prediction and joint optimization[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2013, 45(2): 225-231.
- [5] 尹宝才, 郭晓明, 施惠忠, 等. 一种基于分析稀疏表示的图像重建算法[J]. *数据采集与处理*, 2014, 29(1): 30-35.
Yin Baocai, Guo Xiaoming, Shi Yuanhui, et al. Image reconstruction algorithm Based on analysis sparse representation[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2014, 29(1): 30-35.
- [6] 王朝, 王铭江, 李玉清, 等. 基于位置集回验的并联分片谱压缩感知算法[J]. *数据采集与处理*, 2011, 26(4): 452-456.
Wang Chao, Wang Mingjiang, Li Yunqing, et al. Parallel segmented compressed sensing algorithm based on indices back-tracking[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2011, 26(4): 452-456.
- [7] 曾理, 张雄伟, 陈亮, 等. 基于压缩感知的 K-L 分解语音稀疏表示算法[J]. *数据采集与处理*, 2012, 28(5): 267-272.
Zeng Li, Zhang Xiongwei, Chen Liang, et al. Compressed-sensing-based speech sparse representation with K-L expansion[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2012, 28(5): 267-272.
- [8] 常侃, 覃团发, 唐振华. 基于多重假设的视频压缩感知分层重建[J]. *数据采集与处理*, 2013, 28(6): 1-8.
Chang Kan, Qin Tuanfa, Tang Zhenhua. Multi-hypothesis based hierarchical reconstruction for compressed video sensing[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2013, 28(6): 1-8.
- [9] 张弓, 杨萌, 张劲东, 等. 压缩感知在雷达目标探测与识别中的研究进展[J]. *数据采集与处理*, 2012, 27(1): 1-12.
Zhang Gong, Yang Meng, Zhang Jindong, et al. Advances in theory and application of compressed sensing in radar target detection and recognition[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2012, 27(1): 1-12.
- [10] 顾福飞, 朱丰, 池龙, 等. 基于压缩感知的含旋转部件目标 ISAR 成像方法[J]. *数据采集与处理*, 2012, 27(1): 45-50.
Gu Fufei, Zhu Feng, Chi Long, et al. ISAR imaging algorithm for targets with rotating parts based on compressed sensing[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2012, 27(1): 45-50.
- [11] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33-36.
- [12] Dai W, Milenkovic Q. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [13] 杨海蓉, 方红, 张成, 等. 基于回溯的迭代硬阈值算法[J]. *自动化报*, 2011, 37(3): 276-282.
Yang Hairong, Fang Hong, Zhang Cheng, et al. Iterative hard thresholding algorithm based on backtracking[J]. *ACTA AUTOMATICA SINICA*, 2011, 37(3): 276-282.
- [14] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2008, 53(12): 4655-4666.
- [15] Blumensath T, Davies M E. Gradient pursuits[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2370-2386.
- [16] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed norm [J]. *IEEE Trans, Signal Process*, 2009, 57(1): 289-301.

作者简介:



冯俊杰(1983-),男,博士研究生,研究方向:雷达信号信息、图像分析与处理, E-mail: nhh0812@163.com。



张弓(1964-),男,教授,博士生导师,研究方向:雷达信号处理、目标探测与识别以及图像分析与处理。



文方青(1988-),男,博士研究生,研究方向:雷达信号处理、目标探测与识别。

