

文章编号:1004-9037(2013)06-0000-05

# 一种新的随机信号的非正交分解方法

张 瑞<sup>1</sup> 郭银景<sup>2</sup> 蔺香运<sup>3</sup>

(1. 山东科技大学信息科学与工程学院, 青岛, 266590; 2. 山东科技大学信息与电气工程学院, 青岛, 266590;  
3. 山东科技大学理学院, 青岛, 266590)

**摘要:**提出了一种新的随机信号的非正交分解方法,这种方法通过对观测数据的二阶统计量所构成的矩阵进行变换,找到信号的特征空间,然后根据影响信号的实际因素,对信号进行非正交分解,得到更加符合实际,便于处理的分解结果。通过这样的分解,用一族非正交基函数表示一个随机信号,不仅可以知道该信号在各个基函数上所含成份的多少及其与已知信号的相似程度,还能够抓住决定信号表现的主要成份,去除噪声及次要成份。本文同时对这种非正交分解的收敛性作了分析。

**关键词:**随机信号;非正交分解;相关性;Brown运动 正交变换

**中图分类号:** TN911 **文献标志码:** A

## New Non-orthogonal Decomposition Method of Random Signal

Zhang Rui<sup>1</sup>, Guo Yinjing<sup>2</sup>, Lin Xiangyun<sup>3</sup>

(1. College of Information Science and Technology, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, 266590, China;  
2. College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, 266590, China;  
3. College of science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, 266590, China)

**Abstract:** A new non-orthogonal decomposition method of random signal is proposed. This approach find the feature space of the signal by transform the second-order statistics of the observation data at first. And then do the non-orthogonal decomposition of the signal according to the practical factors affecting the signal to obtain the decomposition results. It is more realistic and easy to deal with. Through this decomposition, a random signal can be represented by a family of non-orthogonal basis function. Not only the proportion of the ingredients contained by the signal can be known, but also the main component deciding the signal trend can be grasped, noise and minor component can be removed. The convergence of the non-orthogonal decomposition is analyzed.

**Key words:** random signal; non-orthogonal decomposition; correlation; Brown motion

## 引 言

对随机信号的处理是当今信号处理领域的热点问题,其中随机信号的分解与重构常常被应用于传感信号检测、多媒体信号处理、信号的盲源分离、地质勘探、雷达信号处理、通信系统接收端的信号检测等。

1933年,Hotelling<sup>[1]</sup>提出了一种可以去掉一个随机向量中各元素间相关性的线性变换,Karhunen和Loeve基于此方法提出了一种针对连续信号的类似的变换,称为K-L变换。其展开形式为人们提供了用互不相关的随机变量与确定性的正交函数组合来描述随机过程的途径。经验模态分解(Empirical mode decomposition, EMD)法是美籍华人N. E. Huang等人<sup>[2]</sup>于1998年提出的,

适合于分析非线性、非平稳信号序列,具有很高的信噪比<sup>[3]</sup>。2004年,Wen&Gu<sup>[4]</sup>在HHT方法的基础上,提出了一种描述和模拟非平稳随机过程的新方法,同时将这一方法推广到矢量随机过程模拟中。1993年Mallat和Zhang首次提出了应用过完备函数系统对信号进行稀疏分解的思想,利用平方可积空间中基本函数的平移、调制和尺度变换构造了具有时频特性的过完备时频词典,得到了匹配追踪算法(Matching pursuit,MP)<sup>[5]</sup>。2009年,Mohimani H, Babaie-Zadeh M等人在文献<sup>[6]</sup>中提出一种在过完备字典上的稀疏分解的快速算法,这种算法是求线性不确定系统的稀疏解的常用方法。

以上所述的随机信号分解方法都需要按照某种准则来进行。例如:正交分解是按照非相关性准则<sup>[7]</sup>,经验模式分解按照信号内在的振动模式来描述非平稳随机信号<sup>[8]</sup>,稀疏分解按照稀疏性准则<sup>[9]</sup>等等。但是在有些实际问题中的随机信号的各个要素之间不是正交的,它们之间存在着某种或多或少的相关性,这些要素中有某些要素在随机信号的表现中起着主导作用。本文提出一种随机信号的非正交分解方法,目标是将信号中具有相关性的主导要素提取出来,并对原信号进行拟合。

## 1 随机信号非正交分解的定义

设 $X(t)$ 是定义于时间区间 $[0, T]$ 上的一个随机信号,函数序列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2[0, T]$ 中的一个非正交系,若存在随机变量序列 $\{V_n\}$ ,使得下列等式在均方意义下成立

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{ms} V_n \varphi_n(t) \quad (1)$$

则称式(1)是随机信号 $X(t)$ 的一个非正交分解。若令

$$X_N(t) = \sum_{n=-N}^N V_n \varphi_n(t)$$

则式(1)等价于

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{|X(t) - X_N(t)|^2\} = 0.$$

非正交分解不仅可以使得用一个随机变量序列 $V_n$ 的性质完全刻画时间上不可数的连续时间随机信号 $X(t)$ 。通过这样的分解,用这样一族非正交函数表示一个随机信号,不仅可以知道该信号在各个基函数上所含成份的多少及其与已知信号的相似程度,而且在各个基函数上对应的系数之间的相关性也包含其中。

## 2 随机信号的非正交分解方法

给定有限时间区间的随机信号 $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ,其均值 $EX(t) = 0$ (如果均值不为零,则可以考虑信号 $Y(t) = X(t) - EX(t)$ ),其相关函数为

$$R(s, t) = E[X(s)X(t)]$$

则 $R(s, t) = R(t, s)$ ,又连续函数 $g_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 为一完备的函数空间 $A \in L^2(0, T)$ 的基,则 $X$ 在此空间上按最小二乘规则的投影 $\bar{X}(t) =$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i g_i(t), \text{ 满足如下关系}$$

$$\int_0^T |X(t) - \bar{X}(t)|^2 dt =$$

$$\arg \min_{\beta_1, \dots, \beta_N} \int_0^T |X(t) - \sum_{i=1}^N \beta_i g_i(t)|^2 dt \quad (2)$$

由于 $X$ 是随机信号,所以投影系数 $\beta_i$ 为随机变量,记 $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$ 则

$$\vec{\beta} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \left( \int_0^T \mathbf{g}_i(t) \mathbf{g}_j(t) dt \right)_{N \times N},$$

$$\mathbf{b} = \left( \int_0^T X(t) \mathbf{g}_1(t) dt, \dots, \int_0^T X(t) \mathbf{g}_N(t) dt \right)^T$$

由于 $\mathbf{g}_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 为线性无关组,从而 $\mathbf{Q}$ 为正定矩阵,并且 $\mathbf{Q}$ 体现了基函数间的关系。特殊地,如果 $\mathbf{Q}$ 为单位矩阵 $\mathbf{I}$ ,则相应的基即为单位正交基,而 $\mathbf{Q}$ 如果不是单位矩阵,则 $\mathbf{g}_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 为非正交基。为了方便,仍然可以要求这组基为归一化基,也就是 $\mathbf{Q}$ 的主对角线元素全为1。

否则,可以考虑 $\frac{\mathbf{g}_i(t)}{\mathbf{g}_i}$ ,其中 $\mathbf{g}_i = \left( \int_0^T |\mathbf{g}_i(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ 。

在实际分解中,基函数是根据分解的目的进行选择的,从而 $\mathbf{Q}$ 是由分解目的确定的,为了分析信号的某些特征(基函数),就要考虑信号在这些特征下的分解问题。 $\mathbf{Q}$ 的确定一般可以通过两种方法:

(1)在有些具体问题中可以通过公式计算出各分量之间的相关矩阵,如本文中实例部分所分析的问题。

(2)当没有公式可以用于计算 $\mathbf{Q}$ 时,分析目标问题之前,先进行实验,测量在每一个要素单独作用时的信号数据,然后分析计算这些数据之间的互相关性,从而得到矩阵 $\mathbf{Q}$ ,例如在心电信号诊断时可以采用这种方法。

## 3 随机信号非正交分解的收敛性

对均值为零的随机信号 $\mathbf{X}(t), t \in [0, T]$ ,其相

关函数  $R(s, t)$  为连续的, 则  $\bar{\mathbf{X}}_N(t) = \sum_{i=1}^N \beta_{N,i} \mathbf{g}_i(t)$  在均方意义下收敛于  $\mathbf{X}(t)$ 。

证明: 设  $\bar{\mathbf{X}}_N(t) = \sum_{i=1}^N \beta_i \mathbf{g}_i(t)$ , 为方便  $\beta_{N,i}$  中的  $N$  略去, 则

$$\begin{aligned} E |\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}_N(t)|^2 &= \\ E \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t) - 2E \mathbf{X}(t) \bar{\mathbf{X}}_N(t) + E \bar{\mathbf{X}}_N(t) \bar{\mathbf{X}}_N(t) &= \\ E \mathbf{X}(t) \bar{\mathbf{X}}_N(t) - E \bar{\mathbf{X}}_N(t) \bar{\mathbf{X}}_N(t) &= \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E |\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}_N(t)|^2 &= \mathbf{R}(t, t) - E \bar{\mathbf{X}}_N(t) \bar{\mathbf{X}}_N(t) = \\ \mathbf{R}(t, t) - \mathbf{g}_N(t)^T \mathbf{P} \mathbf{g}_N(t) &= \\ \mathbf{R}(t, t) - \mathbf{g}_N(t)^T \mathbf{U}_N^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}_N^{-1} \mathbf{g}_N(t) &= \\ \mathbf{R}(t, t) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^2(t) & \end{aligned}$$

由 Bessel 定理

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E |\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}_N(t)|^2 &= \\ \mathbf{R}(t, t) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i^2(t) &= \\ \mathbf{R}(t, t) - \mathbf{R}(t, t) &= 0. \end{aligned}$$

#### 4 随机信号非正交分解的非正交基的求解

对随机信号的非正交分解而言, 最难的就是寻找非正交基函数及其系数协方差矩阵, 下面通过对符合 Brownian 运动的随机信号的分解这个具体情形来描述其求解方法与过程。

$$R(s, t) = \min(s, t)$$

步骤 1 求算子  $\Gamma$  的本征值  $\lambda$  与本征函数  $\varphi(t)$ , 即解特征方程

$$\Gamma[\varphi(\cdot)] = \lambda \varphi(\cdot) \quad (4)$$

并选取本征值  $\lambda$  为序参量。需要解下列积分方程

$$\int_0^T R(s, t) \varphi(t) dt = \lambda \varphi(s)$$

对 Brownian 运动, 式(4)即表示为

$$\int_0^s t \varphi(t) dt + s \int_s^T \varphi(t) dt = \lambda \varphi(s)$$

则上述积分方程等价于下列边值条件的本征值问题

$$\begin{cases} \lambda \ddot{\varphi}(t) = -\varphi(t) \\ \varphi(0) = 0, \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

步骤 2, 求基函数  $\mathbf{G}(t) = (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{g}_2(t), \dots, \mathbf{g}_N(t))^T$ , 首先将正定矩阵  $\mathbf{Q}$  分解为正定矩阵  $\mathbf{U}$  的平方, 即  $\mathbf{Q} = \mathbf{U}^2$ 。在步骤 1 所求的本征函数中任意选取  $N$  个本征函数, 不妨设  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots,$

$\varphi_N(t))^T$ , 则

$$\Phi[\varphi(\cdot)]_s = \mathbf{A} \varphi(s), \quad (5)$$

式中  $\mathbf{A}$  为相应的对角阵  $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , 式(5)的两边左乘  $\mathbf{U}$  并做如下变型

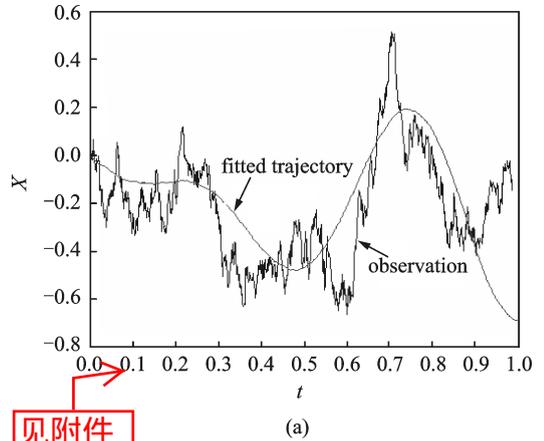
$$\Phi[\mathbf{U} \varphi(\cdot)]_s = \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \varphi(s),$$

取  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{U} \varphi(t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}$ , 即满足方程  $\Phi[\mathbf{G}(\cdot)] = \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{G}(\cdot)$ 。

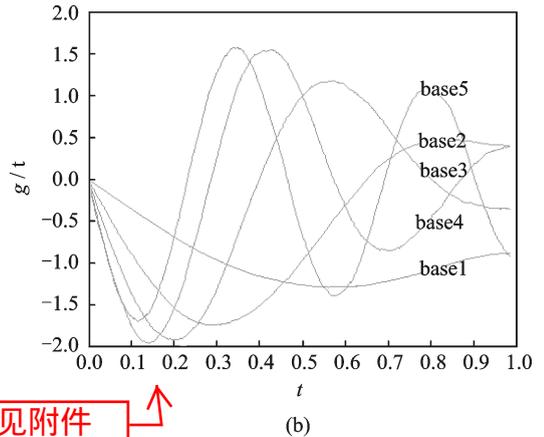
步骤 3, 找到基函数  $\mathbf{G}(t) = (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{g}_2(t), \dots, \mathbf{g}_N(t))^T$ , 按照式(3)即可求得分解系数  $\beta_1, \dots, \beta_N$ 。

#### 5 仿真与分析

对随机信号在  $[0, T]$  的  $n$  等分点进行独立观察  $m$  次, 可得到一组样本容量为  $m$  的样本观测值  $x(k, t_i), k = 1, \dots, m, i = 0, \dots, n$ 。选取时间区间  $[0, 1]$  上, 当  $n = 20$ , 样本容量  $m = 10\ 000$  时的标准 Brownian 运动, 信号分解后拟合的结果如图 1(a), 相应的非正交基为  $g_1, g_2, \dots, g_5$  如图 1(b)。



见附件



见附件

图 1 分解后拟合效果

实验结果表明, 可以将符合布朗运动的随机信号进行分解, 得到信号的起主导作用的 5 个非正交基函数: base1~base5, 分解后拟合的图形, 虽然与

原图形有一定的误差,但是能够明显地表现出原随机信号的变化趋势,达到了分解的要求。如果要使得误差减小,可以通过增加基函数的个数来实现。

## 6 实 例

对于 MIMO-OFDM 系统在接收端可以使用上述方法进行信道估计。由于在 MIMO-OFDM 系统中,发射天线阵列和接收天线阵列的各单元之间<sup>[10]</sup>,多径之间都存在着相关性,因此信道之间也具有相关性。其相关矩阵采用 Kronecker 积<sup>[11]</sup>来计算

$$\mathbf{R}_{sp} = \mathbf{R}_{R_X} \otimes \mathbf{R}_{T_X} \otimes \mathbf{R}_p$$

式中: $\mathbf{R}_{T_X}$ 表示发送端天线的相关矩阵,而 $\mathbf{R}_{R_X}$ 表示接收端天线的相关矩阵, $\mathbf{R}_p$ 表示路径相关矩阵。

接收端的数据模型采用

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{h}_i(t) + \mathbf{w}(t)$$

式中: $\mathbf{Y}(t)$ 是接收端接收到的随机信号, $\mathbf{X}_i$ 是发送端在每个子信道上发送的信号,从接收端来看是未知的随机变量序列, $\mathbf{w}(t)$ 是与源信号具有统计独立性的加性高斯白噪声。 $\mathbf{H}(t) = \{\mathbf{h}_1(t), \mathbf{h}_2(t), \dots, \mathbf{h}_N(t)\}$ 是信道的冲激响应,信道估计的任务就是根据 $\mathbf{Y}(t)$ ,以及 $\mathbf{h}_i(t)$ 之间的相关函数矩阵 $\mathbf{R}_p$ ,估计出信道特性 $\mathbf{H}(t) = \{\mathbf{h}_1(t), \mathbf{h}_2(t), \dots, \mathbf{h}_N(t)\}$ ,问题等效为将随机信号 $\mathbf{Y}(t)$ 在 $\mathbf{H}(t)$ 上进行非正交分解。

假设源信号是独立同分布的实随机变量,其均值为 0、方差为 1,每径的噪声是独立的加性零均值高斯白噪声,仿真中使用的采样数据序列长度 $N=2000$ ,考虑收发天线组数为 2, 4, 6 时的 MIMO-OFDM 系统,SNR 是 $N_i$ 个发送天线的符号总能量与噪声能量的比值,对每个固定的信噪比,检测长为 2000 个码元的序列,结果取 10 次独立仿真的平均值。空间相关矩阵根据发送端余接收端的特定物理设置,发送端的天线阵列之间的距离为 $3\lambda$ ,接收端的天线阵列之间的距离为 $0.5\lambda$ , $\lambda$ 为波长。接收端接收到的信号分解结果及误码率比较如图 2。

从图中可以看出,随着信噪比的提高基于非正交分解的信道估计算法比基于 EM 的信道估计算法的误码率更加接近于实际信道的误码率。

## 7 结 束 语

本文提出一种非正交分解的方法对随机信号进行处理,将其中具有相关性的主要要素分析出

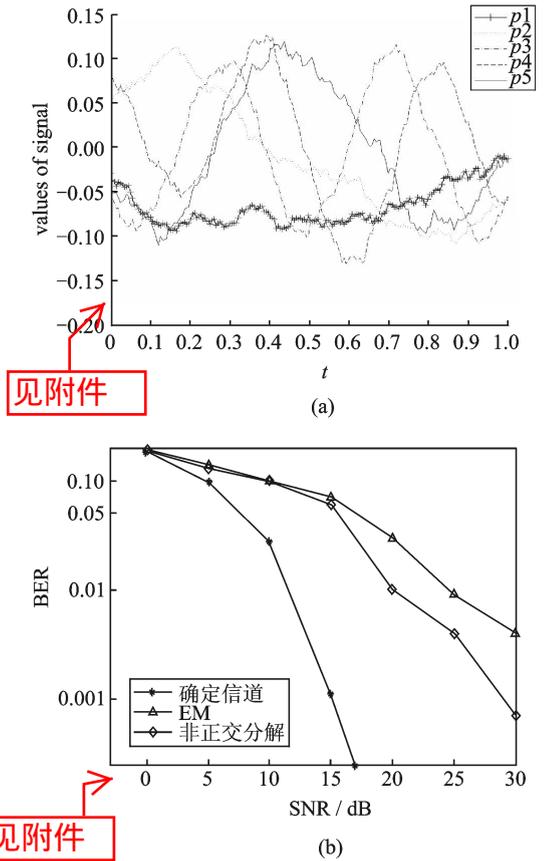


图 2 MIMO-OFDM 系统相关信道估计及误码率比较

来,基于主要要素对随机信号进行表示,其分解结果更加符合信号的实际构成,更加有利于后续对信号的检测,辨识等处理。实验结果表明这种方法可以抓住信号的主要特征,判断信号中的主要成分,无论这些主要成分之间是否具有相关性,都可以完成信号的非正交分解和表示。在源信号具有相关性的盲源分离,在生物医学信号的诊断方面,在具有相关性信道的通信系统中的信号检测等方面,这种信号处理的方法具有重要的意义。

### 参考文献:

- [1] Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components[J]. Journal of Educational Psychology J, 1933, 24: 441-447.
- [2] Huang N E. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear, nonstationary time series analysis[C]// Proc R Soc London, Ser. A. Condon[s. n. ], 1998: 903-995.
- [3] 贾桂锋,袁胜发,唐成文,基于高阶导数改进的经验模态分解算法[J]. 数据采集与处理, 2012, 27(1): 117-120.  
Jia Guifeng, Yuan Shengfa, Tang Chengwen. Modified empirical mode decomposition algorithm based

- on higher derivative[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012,27(1):117-120.
- [4] Wen Y K, Gu Ping. Description and simulation of non-stationary processes based on Hilbert Spectra [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(8): 942-951.
- [5] Mallat Stephane G, Zhang Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12), 3397-3415.
- [6] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $l^0$  norm, signal processing[J], IEEE Transactions on, 2009, 57(1):289-301.
- [7] Muruhan R, Linda R P. A new look at proper orthogonal decomposition[J]. Siam J Numer A, 2003, 41(5):1893-1925.
- [8] Guo Kejian, Zhang Xingang, Li Hongguang. Application of EMD method to friction signal processing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22: 248-259.
- [9] Candes Emmanuel J, Justin R. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2006, 6(2), 227-254.
- [10] 孙中伟, 张小飞, 吴海浪, 等, 双基地 MIMO 雷达中基于传播算子的 DOD 和 DOA 估计[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(6):643-647.  
Sun Zhongwei, Zhang Xiaofei, Wu Hailang, et al, DOD and DOA estimation algorithm in bistatic MIMO radar based on propagator method[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2011, 26(6): 643-647.
- [11] Weichselberger W, Herdin M, Ozcelik H B, et al. stochastic MIMO channel model with joint correlation of both link ends[J], Wireless Communications, IEEE Transactions on, 5:90-100.

作者简介:张瑞(1977-),女,博士研究生,讲师,研究方向:随机信号的处理, E-mail: z. r. 2008@163. com; 郭银景(1966-),男,博士生导师,教授,研究方向:通信工程; 蔺香运(1974-),男,讲师,研究方向:随机系统的控制。

2006,5 (1) :90-100