文章编号:1004-9037(2012)05-0586-09

基于对称延拓的纯二维双正交偶对称小波变换

谢玉芯　杨雪玲　王　静

(天津工业大学电子与信息工程学院,天津,300387)

摘要:研究了对称延拓在纯二维双正交偶对称小波变换中的应用,由纯二维小波滤波器组和对称延拓的性质推导出了小波分解后4个子带的公式。这些公式归纳了多级分解时,任意起点和任意长度的原始数据进行分解后,4个子带的周期和对称关系。最后给出了纯二维5/3小波变换的一个实例来具体说明其应用方法。

关键词:纯二维小波;对称延拓;小波分解

中图分类号:TN911.72　　**文献标识码**:A

True Two-Dimensional Even Symmetric Biorthogonal Wavelet Transform Based on Symmetric Extension

Xie Yuxin, Yang Xueling, Wang Jing

(School of Electronics and Information Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, 300387, China)

Abstract: The symmetric extension is studied when applying in true two-dimensional (2-D) even symmetric biorthogonal wavelet transform. According to the characteristics of true 2-D wavelet filter banks and symmetric extension, the formulas of four sub-band after wavelet decomposition are deduced. These formulas summarize the original data of any start point and any length at multi-level decomposition, and obtain the cycle and symmetric relation of the four sub-bands. Finally, a true 2-D 5/3 wavelet transform is taken as an example to illustrate the practical application of specific methods.

Key words: true 2-D wavelet; symmetric extension; wavelet transform

引　　言

在实际的小波分解和重构算法中必须采用一定的边界处理方法,比较常见的方法有补零延拓、等值延拓、周期延拓和对称延拓。文献[1]中将对称延拓分为边界点对称延拓和边界对称延拓,为了描述方便,本文延用这一说法。其中,边界点对称延拓具有数据量保持和高频子带系数值小的优点,常应用于双正交偶对称小波滤波器组,JPEG2000[2]中就是采用的这种边界处理方法,文献[3~5]均采用了边界点对称延拓的方法,所采用的都是纯二维双正交偶对称滤波器。文献[1]对几种延拓方法有较全面的理论研究,但只是针对了以"0"为起点的数据,对于实际应用会有局限性。本文继承和发展了文献[1]的研究方法,研究了边界点对称延拓在纯二维双正交偶对称小波变换中的应用,推导出了任意起点、任意长度的原始数据小波分解后4个子带的周期和对称关系。

1　纯二维小波的分解和重构算法

1.1　纯二维双正交偶对称小波滤波器组

纯二维双正交偶对称小波滤波器组分解与重构算法如图1所示,$\tilde{p}(-k_1,-k_2)$和$\tilde{q}(-k_1,-k_2)$分别为低频和高频分解滤波器,$p(k_1,k_2)$和$q(k_1,k_2)$分别为低频和高频重构滤波器。

纯二维小波滤波器的支撑区长度都是有限的,对于分解滤波器设其支撑区为(注:第1个"[]"内为行支撑区范围,第2个"[]"内为列支撑区范围,其中M_1, M_2, N_1, $N_2\geqslant 0$;M'_1, M'_2, N'_1, $N'_2\geqslant 0$)

基金项目:国家自然科学基金(60602036)资助项目。
收稿日期:2011-12-29;**修订日期**:2012-06-04

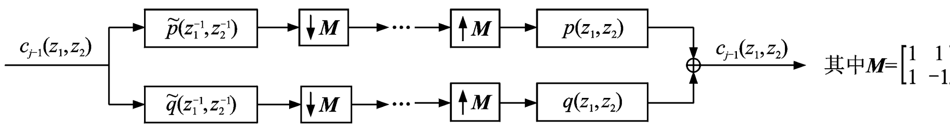


图 1　纯二维双正交偶对称小波滤波器组分解与重构算法

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{\tilde{p}(k_1,k_2)\}=[-M_1,M_2],[-N_1,N_2]\\ \mathrm{supp}\{\tilde{q}(k_1,k_2)\}=[-M'_1,M'_2],[-N'_1,N'_2]\end{cases}\tag{1}$$

根据文献[6]中 7.4 节双正交小波滤波器组中各滤波器及其支撑区的关系，对于纯二维小波分解滤波器和重构滤波器有如下关系

$$\begin{aligned}p(k_1,k_2)&=(-1)^{-k_1}\tilde{q}(1-k_1,k_2)\\ q(k_1,k_2)&=(-1)^{1-k_1}\tilde{p}(1-k_1,k_2)\end{aligned}\tag{2}$$

由式(2)得重构滤波器的支撑区为

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{p(k_1,k_2)\}=[-M'_2+1,M'_1+1],\\ \quad[-N'_2+1,N'_1+1]\\ \mathrm{supp}\{q(k_1,k_2)\}=[-M_2+1,M_1+1],\\ \quad[-N_2+1,N_1+1]\end{cases}\tag{3}$$

特别地，对于纯二维双正交偶对称小波滤波器 $\tilde{p}(k_1,k_2)$和$\tilde{q}(k_1,k_2)$，设其支撑区为

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{\tilde{p}(k_1,k_2)\}=[-M_3,M_3],[-N_3,N_3]\\ \mathrm{supp}\{\tilde{q}(k_1,k_2)\}=[-M_4+1,M_4+1],\\ \quad[-N_4,N_4]\end{cases}\tag{4}$$

式中 $M_3,M_4,N_3,N_4>0$，并且有

$$\begin{cases}\tilde{p}(-k_1,-k_2)=\tilde{p}(k_1,k_2)\\ \quad k_1=0,1,\cdots,M_3;\ k_2=0,1,\cdots,N_3\\ \tilde{q}(-k_1,-k_2)=\tilde{q}(k_1+2,k_2)\\ \quad k_1=-1,0,\cdots,M_4-1;\ k_2=0,1,\cdots,N_4\end{cases}\tag{5}$$

由式(1～3)，有

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{p(k_1,k_2)\}=[-M_4,M_4],[-N_4,N_4]\\ \mathrm{supp}\{q(k_1,k_2)\}=[-M_3+1,M_3+1],\\ \quad[-N_3,N_3]\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}p(-k_1,-k_2)=p(k_1,k_2)\\ \quad k_1=0,1,\cdots,M_4;\ k_2=0,1,\cdots,N_4\\ q(-k_1,-k_2)=q(k_1+2,k_2)\\ \quad k_1=-1,0,\cdots,M_3-1;\ k_2=0,1,\cdots,N_3\end{cases}\tag{7}$$

1.2　嵌套格式在图像分解与重构中的应用

20 世纪 90 年代中期，Sweldens 等提出了小波提升方案(Lifting scheme)，并给出了经典小波中双正交小波的提升方案(又称提升格式)[7-8]，Daubechies 证明了凡是用 Mallat 算法实现的小波变换都可以用提升格式实现[9]。提升方案是在空域中直接构造小波，大大拓展了小波分析的研究领域。本文是从原始小波滤波器组的角度来分析它在纯二维双正交偶对称小波中应用的性质，为提升格式的实现打下基础。为了叙述方便，下文中以“纯二维小波”代替“纯二维双正交偶对称小波”。采用边界点对称延拓的纯二维小波分解与重构算法如图 2 所示，下面对分解端加以说明，重构端同理，不再赘述。图像的分解和重构采用了嵌套格式[3]，即一级分解包含两次分解。对于有限长原始像块 $c_{j-1}(k_1,k_2)$，其第 j 级分解过程为：边界点对称延拓后 $c_j^{\mathrm{ext}}(k_1,k_2)$，经过$\tilde{p}(-k_1,-k_2)$和$\tilde{q}(-k_1,-k_2)$进行第 1 次分解，得到低频子带 $c_j^l(k_1,k_2)$和高频子带$e'_j(k_1,k_2)$；对$c_j^l(k_1,k_2)$再进行第 2 次分解，经过$\tilde{p}'(-k_1,-k_2)$和$\tilde{q}'(-k_1,-k_2)$后形成次低频子带 $c_j(k_1,k_2)$和次高频子带 $d_j(k_1,k_2)$；对高频子带 $e'_j(k_1,k_2)$进行一次纯二维 Lazy 小波变换[3]，分为偶、奇两组 $e_j(k_1,k_2)$和$f_j(k_1,k_2)$。

$\tilde{p}'(k_1,k_2)$，$\tilde{q}'(k_1,k_2)$，$p'(k_1,k_2)$和 $q'(k_1,k_2)$分别为 $\tilde{p}(k_1,k_2)$，$\tilde{q}(k_1,k_2)$，$p(k_1,k_2)$和 $q(k_1,k_2)$经五株内插[3,5]得到的滤波器，前者为后者旋转 45°得到的滤波器，文献[3]中有两组滤波器坐标间的关系，文献[5]中有具体的旋转方法。可以推出以下关系，其中 $M_5,M_6,N_5,N_6>0$。

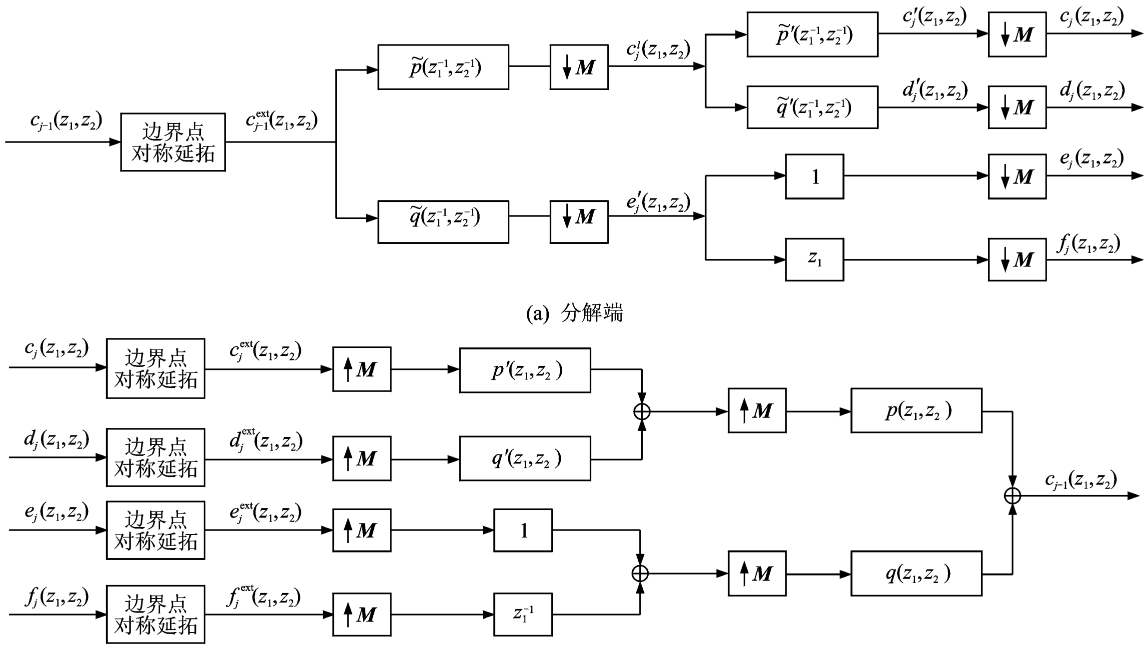
$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{\tilde{p}'(k_1,k_2)\}=[-M_5,M_5],\\ \quad[-N_5,N_5]\\ \mathrm{supp}\{\tilde{q}'(k_1,k_2)\}=[-M_6+1,\\ \quad M_6+1],[-N_6,N_6]\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\tilde{p}'(-k_1,-k_2)=\tilde{p}'(k_1,k_2)\\ \quad k_1=0,1,\cdots,M_5;\ k_2=0,1,\cdots,N_5\\ \tilde{q}'(-k_1,-k_2)=\tilde{q}'(k_1+2,k_2)\\ \quad k_1=-1,0,\cdots,M_6-1;\ k_2=0,1,\cdots,N_6\end{cases}\tag{9}$$

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{p'(k_1,k_2)\}=[-M_6,M_6],\\ \quad[-N_6,N_6]\\ \mathrm{supp}\{q'(k_1,k_2)\}=[-M_5+1,\\ \quad M_5+1],[-N_5,N_5]\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}p'(-k_1,-k_2)=p'(k_1,k_2)\\ \quad k_1=0,1,\cdots,M_6;\ k_2=0,1,\cdots,N_6\\ q'(-k_1,-k_2)=q'(k_1+2,k_2)\\ \quad k_1=-1,0,\cdots,M_5-1;\ k_2=0,1,\cdots,N_5\end{cases}\tag{11}$$

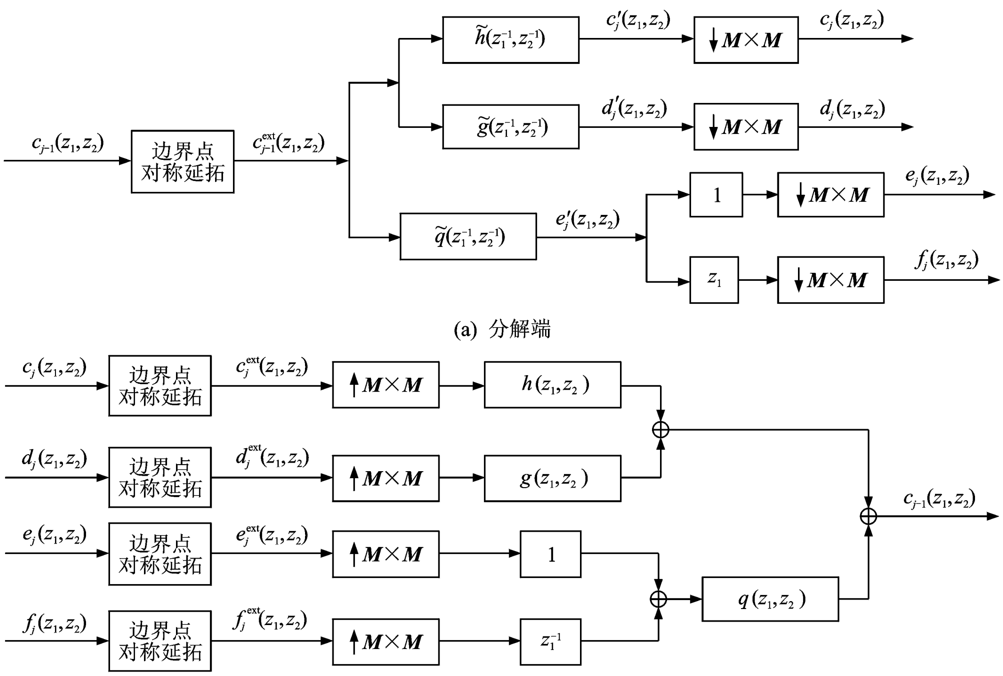
为了推导方便将图 2 简化为图 3 的形式，引入滤波器 $\tilde{h}(k_1,k_2)$，$\tilde{g}(k_1,k_2)$，$h(k_1,k_2)$和 $g(k_1,k_2)$。



(a) 分解端

(b) 重构端

图 2 采用边界点对称延拓的纯二维小波分解与重构算法



(a) 分解端

(b) 重构端

图 3 采用边界点对称延拓的纯二维小波分解与重构简化算法

$$\begin{cases}\tilde{h}(-k_1,-k_2)=\tilde{p}(-k_1,-k_2)*\\ \quad\tilde{p}'(-k_1,-k_2)\\ \tilde{g}(-k_1,-k_2)=\tilde{p}(-k_1,-k_2)*\\ \quad\tilde{q}'(-k_1,-k_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}h(k_1,k_2)=p'(k_1,k_2)*p(k_1,k_2)\\ g(k_1,k_2)=q'(k_1,k_2)*p(k_1,k_2)\end{cases}$$

有如下关系

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\{\tilde{h}(k_1,k_2)\}=[-M_3-M_5,M_3+M_5],\\ \quad[-N_3-N_5,N_3+N_5]\\ \mathrm{supp}\{\tilde{g}(k_1,k_2)\}=[-M_3-M_6+1,M_3+\\ \quad M_6+1],[-N_3-N_6,N_3+N_6]\end{cases}\tag{12}$$

$$\begin{cases}\tilde{h}(-k_1,-k_2)=\tilde{h}(k_1,k_2)\\ \quad k_1=0,1,\cdots,M_3+M_5;k_2=0,1,\cdots,N_3+N_5\\ \tilde{g}(-k_1,-k_2)=\tilde{g}(k_1+2,k_2)\\ \quad k_1=-1,0,\cdots,M_3+M_6-1;\\ \quad k_2=0,1,\cdots,N_3+N_6\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\{h(k_1,k_2)\}=[-M_4-M_6,M_4+M_6],\\ \quad[-N_4-N_6,N_4+N_6]\\ \operatorname{supp}\{g(k_1,k_2)\}=[-M_4-M_5+1,M_4+\\ \quad M_5+1],[-N_4-N_5,N_4+N_5]\end{cases}\tag{14}$$

分解算法为

$$\begin{aligned}c_j(k_1,k_2)&=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{h}(l_1-2k_1,l_2-2k_2)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{h}(l_1-k'_1,l_2-k'_2)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)\Big|_{\substack{k'_1=2k_1\\k'_2=2k_2}}\\ d_j(k_1,k_2)&=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{g}(l_1-2k_1,l_2-2k_2-1)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{g}(l_1-k'_1,l_2-k'_2)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)\Big|_{\substack{k'_1=2k_1\\k'_2=2k_2+1}}\\ e_j(k_1,k_2)&=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{q}\,(l_1-2k_1,l_2-2k_2)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{q}\,(l_1-k'_1,l_2-k'_2)\cdot\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)\Big|_{\substack{k'_1=2k_1\\k'_2=2k_2}}\\ f_j(k_1,k_2)&=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{q}\,(l_1-2k_1-1,l_2-2k_2-\\ &\quad 1)c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\widetilde{q}\,(l_1-k'_1,\\ &\quad l_2-k'_2)c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)\Big|_{\substack{k'_1=2k_1+1\\k'_2=2k_2+1}}\end{aligned}\tag{15}$$

重构算法为

$$c_{j-1}(k_1,k_2)=\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}h(k_1-2l_1,k_2-2l_2)\cdot c_j^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)+\\ \quad g(k_1-2l_1,k_2-2l_2-1)\cdot d_j^{\mathrm{ext}}(l_1,l_2)+\\ \quad h(k_1-2l_1-1,k_2-2l_2)\cdot 0+\\ \quad g(k_1-2l_1,k_2-2l_2-1)\cdot 0+\\ \quad q(k_1-2l_1,k_2-2l_2)\cdot e_j^{\mathrm{ext}}(l_1,\ l_2)+\\ \quad q(k_1-2l_1-1,k_2-2l_2-1)\cdot\\ \quad f_j^{\mathrm{ext}}(l_1,\ l_2)+\\ \quad q(k_1-2l_1-1,k_2-2l_2)\cdot 0+\\ \quad q(k_1-2l_1,k_2-2l_2-1)\cdot 0\end{bmatrix}\tag{16}$$

为了更清楚地表明分解的过程，将 $c'_j(k_1,k_2)$，$d'_j(k_1,k_2)$ 和 $e'_j(k_1,k_2)$ 引入推导过程

$$\begin{cases}c'_j(k_1,k_2)=\displaystyle\sum_{l_1=-M_3-M_5}^{M_3+M_5}\sum_{l_2=-N_3-N_5}^{N_3+N_5}\widetilde{h}(l_1,l_2)\cdot\\ \quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(k_1+l_1,k_2+l_2)\\ d'_j(k_1,k_2)=\displaystyle\sum_{l_1=-M_3-M_6+1}^{M_3+M_6+1}\sum_{l_2=-N_3-N_6}^{N_3+N_6}\widetilde{g}(l_1,l_2)\cdot\\ \quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(k_1+l_1,k_2+l_2)\\ e'_j(k_1,k_2)=\displaystyle\sum_{l_1=-M_4+1}^{M_4+1}\sum_{l_2=-N_4}^{N_4}\widetilde{q}\,(l_1,l_2)\cdot\\ \quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(k_1+l_1,k_2+l_2)\end{cases}\tag{17}$$

$$\begin{cases}c_j(k_1,k_2)=c'_j(2k_1,2k_2)\\ d_j(k_1,k_2)=d'_j(2k_1,2k_2+1)\\ e_j(k_1,k_2)=e'_j(2k_1,2k_2)\\ f_j(k_1,k_2)=e'_j(2k_1+1,2k_2+1)\end{cases}\tag{18}$$

2　边界点对称延拓的性质

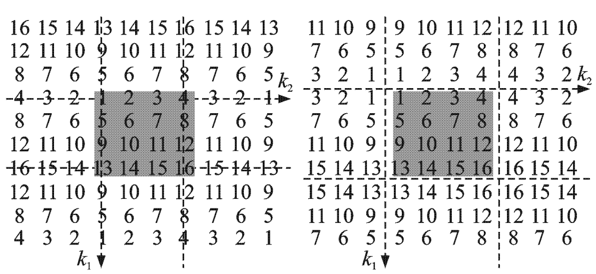
对称延拓的两种方式如图 4 所示，虚线为其对称轴。对于以 (A,B)，$A,B\in\mathbf{Z}$ 为起点的行列长度分别为 L_1 和 L_2 的原始数据 $c_{j-1}(k_1,k_2)$，$(A\leqslant k_1<A+L_1,B\leqslant k_2<B+L_2)$，以边界点为中心对称重复，即

$$\begin{aligned}&c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+r_1(L_1-1)+k_1,B+r_2(L_2-1)+\\ &\quad k_2)=c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+r_1(L_1-1)-k_1,\\ &\quad B+r_2(L_2-1)-k_2)\end{aligned}\tag{19}$$

式中 r_1，r_2，k_1，$k_2\in\mathbf{Z}$，且有

$$\begin{aligned}&c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+2r_1(L_1-1)+k_1,B+2r_2(L_2-1)+\\ &\quad k_2)=c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+r_1(L_1-1)+r_1(L_1-1)+k_1,\\ &B+r_2(L_2-1)+r_2(L_2-1)+k_2)=\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+r_1(L_1-1)-(r_1(L_1-1)+k_1)),\\ &B+r_2(L_2-1)-(r_2(L_2-1)+k_2))=\\ &\quad c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A-k_1,B-k_2)=c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(A+k_1,B+k_2)\end{aligned}\tag{20}$$

由式(20)可以看出边界点对称延拓后，$c_{j-1}^{\mathrm{ext}}(k_1,k_2)$ 的行和列分别是以 $2(L_1-1)$ 和 $2(L_2-1)$ 为周期的。



(a) 边界点对称延拓　　(b) 边界对称延拓

图 4　边界点对称延拓和边界对称延拓

3 分解后 4 个子带的性质

3.1 1 级分解情况

由式(13,17,19)可推出式(21),由于篇幅所限,只证明式(21)中的第 1 式。

$$c'_j(A+r_1(L_1-1)+k_1,B+r_2(L_2-1)+k_2)=\sum_{l_1=-M_3-M_5}^{M_3+M_5}\sum_{l_2=-N_3-N_5}^{N_3+N_5}\widetilde{h}(l_1,l_2)c_{j-1}^{\text{ext}}(l_1+A+r_1(L_1-1)+k_1,l_2+B+r_2(L_2-1)+k_2)=\sum_{l_1=-M_3-M_5}^{M_3+M_5}\sum_{l_2=-N_3-N_5}^{N_3+N_5}\widetilde{h}(-l_1,-l_2)c_{j-1}^{\text{ext}}(-l_1+A+r_1(L_1-1)-k_1,-l_2+B+r_2(L_2-1)-k_2)=\sum_{l_1=-M_3-M_5}^{M_3+M_5}\sum_{l_2=-N_3-N_5}^{N_3+N_5}\widetilde{h}(l_1,l_2)c_{j-1}^{\text{ext}}(l_1+A+r_1(L_1-1)-k_1,l_2+B+r_2(L_2-1)-k_2)=c'_j(A+r_1(L_1-1)-k_1,B+r_2(L_2-1)-k_2)$$

$$\begin{cases}c'_j(A+r_1(L_1-1)+k_1,B+r_2(L_2-1)+k_2)=c'_j(A+r_1(L_1-1)-k_1,B+r_2(L_2-1)-k_2)\\ d'_j(A+r_1(L_1-1)+k_1,B+r_2(L_2-1)+k_2)=d'_j(A+r_1(L_1-1)-k_1-2,B+r_2(L_2-1)-k_2)\\ e'_j(A+r_1(L_1-1)+k_1,B+r_2(L_2-1)+k_2)=e'_j(A+r_1(L_1-1)-k_1-2,B+r_2(L_2-1)-k_2)\end{cases}\tag{21}$$

第 j 级分解后,由式(18,21,28)得式(22~25)

$$c_j\left(\left\lceil\frac{A}{2}\right\rceil+r_1(L_1-1)-k_1,\left\lceil\frac{B}{2}\right\rceil+r_2(L_2-1)-k_2\right)=$$
$$\begin{cases}c'_j(A+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+2r_2(L_2-1)-2k_2)=c'_j(A+r_1(L_1-1)+(r_1(L_1-1)-2k_1),B+r_2(L_2-1)+(r_2(L_2-1)-2k_2))=c'_j(A+r_1(L_1-1)-(r_1(L_1-1)-2k_1),B+r_2(L_2-1)-(r_2(L_2-1)-2k_2))=c'_j(A+2k_1,B+2k_2)=c_j\left(\frac{A}{2}+k_1,\frac{B}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为偶数}\\ c'_j(A+1+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+1+2r_2(L_2-1)-2k_2)=c'_j(A+r_1(L_1-1)+(r_1(L_1-1)-2k_1+1),B+r_2(L_2-1)+(r_2(L_2-1)-2k_2+1))=c'_j(A+r_1(L_1-1)-(r_1(L_1-1)-2k_1+1),B+r_2(L_2-1)-(r_2(L_2-1)-2k_2+1))=c'_j(A+2k_1-1,B+2k_2-1)=c_j\left(\frac{A-1}{2}+k_1,\frac{B-1}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{22}$$

$$d_j\left(\left\lfloor\frac{A}{2}\right\rfloor+r_1(L_1-1)-k_1,\left\lfloor\frac{B}{2}\right\rfloor+r_2(L_2-1)-k_2\right)=$$
$$\begin{cases}d'_j(A+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+1+2r_2(L_2-1)-2k_2)=d'_j(A+2k_1-2,B+2k_2-1)=d_j\left(\frac{A}{2}-1+k_1,\frac{B}{2}-1+k_2\right) & A,B\text{ 为偶数}\\ d'_j(A-1+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+2r_2(L_2-1)-2k_2)=d'_j(A+2k_1-1,B+2k_2)=d_j\left(\frac{A-1}{2}+k_1,\frac{B-1}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{23}$$

$$e_j\left(\left\lfloor\frac{A}{2}\right\rfloor+r_1(L_1-1)-k_1,\left\lceil\frac{B}{2}\right\rceil+r_2(L_2-1)-k_2\right)=$$
$$\begin{cases}e'_j(A+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+2r_2(L_2-1)-2k_2)=e'_j(A+2k_1-2,B+2k_2)=e_j\left(\frac{A}{2}-1+k_1,\frac{B}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为偶数}\\ e'_j(A-1+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+1+2r_2(L_2-1)-2k_2)=e'_j(A+2k_1-1,B+2k_2-1)=e_j\left(\frac{A-1}{2}+k_1,\frac{B-1}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{24}$$

$$f_j\left(\left\lceil\frac{A}{2}\right\rceil-1+r_1(L_1-1)-k_1,\left\lfloor\frac{B}{2}\right\rfloor+r_2(L_2-1)-k_2\right)=$$
$$\begin{cases}e'_j(A-1+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+1+2r_2(L_2-1)-2k_2)=e'_j(A+2k_1-1,B+2k_2-1)=f_j\left(\frac{A}{2}-1+k_1,\frac{B}{2}-1+k_2\right) & A,B\text{ 为偶数}\\ e'_j(A+2r_1(L_1-1)-2k_1,B+2r_2(L_2-1)-2k_2)=e'_j(A+2k_1-2,B+2k_2)=f_j\left(\frac{A-3}{2}+k_1,\frac{B-1}{2}+k_2\right) & A,B\text{ 为奇数}\end{cases}\tag{25}$$

式(22～25)只讨论 A，B 均为偶数和 A，B 均为奇数两种情况，A 为偶数、B 为奇数和 A 为奇数、B 为偶数的情况为其另外组合，不再赘述。

综合奇偶各情况如下

$$\begin{cases} c_j\left(\left\lceil \frac{A}{2}\right\rceil + r_1(L_1-1)-k_1, \left\lceil \frac{B}{2}\right\rceil + r_2(L_2-1)-k_2\right) = c_j\left(\left\lfloor \frac{A}{2}\right\rfloor + k_1, \left\lfloor \frac{B}{2}\right\rfloor + k_2\right) \\ d_j\left(\left\lfloor \frac{A}{2}\right\rfloor + r_1(L_1-1)-k_1, \left\lfloor \frac{B}{2}\right\rfloor + r_2(L_2-1)-k_2\right) = d_j\left(\left\lfloor \frac{A}{2}\right\rfloor -1+ k_1, \left\lceil \frac{B}{2}\right\rceil -1+ k_2\right) \\ e_j\left(\left\lfloor \frac{A}{2}\right\rfloor + r_1(L_1-1)-k_1, \left\lceil \frac{B}{2}\right\rceil + r_2(L_2-1)-k_2\right) = e_j\left(\left\lceil \frac{A}{2}\right\rceil -1+ k_1, \left\lfloor \frac{B}{2}\right\rfloor + k_2\right) \\ f_j\left(\left\lceil \frac{A}{2}\right\rceil -1+ r_1(L_1-1)-k_1, \left\lfloor \frac{B}{2}\right\rfloor + r_2(L_2-1)-k_2\right) = f_j\left(\left\lfloor \frac{A}{2}\right\rfloor -1+ k_1, \left\lceil \frac{B}{2}\right\rceil -1+ k_2\right) \end{cases} \tag{26}$$

式(26)说明：$c_j(k_1,k_2)$，$d_j(k_1,k_2)$，$e_j(k_1,k_2)$，$f_j(k_1,k_2)$的行和列都是以 L_1-1 和 L_2-1 为周期的。

3.2　多级分解情况

对于第 1 级分解输入的原始数据 $c_0(k_1,k_2)$，$(m_0\leqslant k_1<m_1, n_0\leqslant k_2<n_1)$，第 j 级分解后 4 个子带的周期对称关系如下

$$c_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil + r_1\left(\left\lceil \frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil + r_2\left(\left\lceil \frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_2\right) = c_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + k_2\right)$$

$$d_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + r_1\left(\left\lceil \frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + r_2\left(\left\lceil \frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil \right)-k_2\right) = d_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil -1+ k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil -1+ k_2\right)$$

$$e_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + r_1\left(\left\lceil \frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil + r_2\left(\left\lceil \frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil \right)-k_2\right) = e_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil + k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + k_2\right)$$

$$f_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil -1+ r_1\left(\left\lceil \frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil + r_2\left(\left\lceil \frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil -1\right)-k_2\right) = f_j\left(\left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil -1+ k_1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil -1+ k_2\right) \tag{27}$$

其第 j 级分解后 4 个子带的最小数据量的支撑区计算方法[3]如下

$$\begin{cases} c_j(k_1,k_2), \left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil \leqslant k_1 < \left\lceil \frac{m_1}{2^j}\right\rceil, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil \leqslant k_2 < \left\lceil \frac{n_1}{2^j}\right\rceil \\ d_j(k_1,k_2), \left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \leqslant k_1 < \left\lceil \frac{m_1}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \leqslant k_2 < \left\lceil \frac{n_1}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \\ e_j(k_1,k_2), \left\lceil \frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \leqslant k_1 < \left\lceil \frac{m_1}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}\right\rceil \leqslant k_2 < \left\lceil \frac{n_1}{2^j}\right\rceil \\ f_j(k_1,k_2), \left\lceil \frac{m_0}{2^j}\right\rceil -1 \leqslant k_1 < \left\lceil \frac{m_1}{2^j}\right\rceil -1, \left\lceil \frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \leqslant k_2 < \left\lceil \frac{n_1}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil \end{cases} \tag{28}$$

由式(27,28)可知，已知有限长度的第 1 级分解输入原始数据 $c_0(k_1,k_2)$的起点坐标和支撑区，即可求出任意分解级数下 4 个子带的支撑区，最大分解级数的计算方法见文献[3]。由于各子带都存在周期和对称关系，没有必要求出子带一个周期内的全部数据，只须求出一部分行列区间的数据，再沿其右边界或右边界点为中心对称延拓，便能得到整个对称区间内的数据，各子带的行列区间和行列右边界的计算方法见表 1。

四种起点：(偶，偶)、(奇，奇)、(偶，奇)、(奇，偶)。两种长度：偶、奇。对于不同起点、不同行列长度下各子带的对称关系是不同的。其中 S_1，S_2为其上一级 c 子带的行列长度，$S_1=\left\lceil \frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil$，$S_2=\left\lceil \frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil - \left\lceil \frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil$，各种组合的子带对称性见表 2～5，其中“点”表示以右边界点为中心对称，“边”表示以右边界为中心对称。

设各子带的起点为(P,Q)，则其行对称区间$[P,P+S_1-2]$，列对称区间$[Q,Q+S_2-2]$。

例如，已知 $c_0(k_1,k_2)$，$(7\leqslant k_1<21,\ 7\leqslant k_2<24)$，$L_1=14$，$L_2=17$。若需计算其 2 级分解后 4 个子带在一个对称区间内的数据，对于 $c_2(k_1,k_2)$，可按照以下 5 个步骤进行，$d_2(k_1,k_2)$，$e_2(k_1,k_2)$，$f_2(k_1,k_2)$的计算方法依此类推。

(1)根据式(28)可得 $c_2(k_1,k_2)$的行支撑区为$\left[\left\lceil \frac{7}{2^2}\right\rceil, \left\lceil \frac{21}{2^2}\right\rceil\right)=[2,6)$，列支撑区为$\left[\left\lceil \frac{7}{2^2}\right\rceil,\right.$

表 1 各子带的行列区间和行列右边界计算方法

子带	行区间 行右边界	列区间 列右边界
$c_j(k_1,k_2)$	$\left[\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$	$\left[\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil,\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$
$d_j(k_1,k_2)$	$\left[\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$	$\left[\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$
$e_j(k_1,k_2)$	$\left[\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{m_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$	$\left[\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil,\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$
$f_j(k_1,k_2)$	$\left[\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil-1,\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-2\right]$ $\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{3}{2}$	$\left[\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]$ $\left\lceil\frac{n_0}{2^j}-\frac{1}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil}{2}\right\rfloor-\frac{1}{2}$

表 2 偶偶起点

子带	S_1 偶	S_2 偶	S_1 奇	S_2 奇	S_1 奇	S_2 偶	S_1 偶	S_2 奇
c	边	边	点	点	点	边	边	点
d	点	点	边	边	边	点	点	边
e	点	边	边	点	边	边	点	点
f	边	点	点	边	点	点	边	边

表 3 奇奇起点

子带	S_1 偶	S_2 偶	S_1 奇	S_2 奇	S_1 奇	S_2 偶	S_1 偶	S_2 奇
c	点	点	边	边	边	点	点	边
d	边	边	点	点	点	边	边	点
e	边	点	点	边	点	点	边	边
f	点	边	边	点	边	边	点	点

表 4 偶奇起点

子带	S_1 偶	S_2 偶	S_1 奇	S_2 奇	S_1 奇	S_2 偶	S_1 偶	S_2 奇
c	边	点	点	边	点	点	边	边
d	点	边	边	点	边	边	点	点
e	点	点	边	边	边	点	点	边
f	边	边	点	点	点	边	边	点

表 5 奇偶起点

子带	S_1 偶	S_2 偶	S_1 奇	S_2 奇	S_1 奇	S_2 偶	S_1 偶	S_2 奇
c	点	边	边	点	边	边	点	点
d	边	点	点	边	点	点	边	边
e	边	边	点	点	点	边	边	点
f	点	点	边	边	边	点	点	边

$\left.\left\lceil\frac{24}{2^2}\right\rceil\right)=[2,6)$。

(2)1 级 $S_1=\left\lceil\frac{m_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{m_0}{2^{j-1}}\right\rceil=\left\lceil\frac{21}{2^{2-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{7}{2^{2-1}}\right\rceil=7$，$S_2=\left\lceil\frac{n_1}{2^{j-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{n_0}{2^{j-1}}\right\rceil=\left\lceil\frac{24}{2^{2-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{7}{2^{2-1}}\right\rceil=8$。因原始像块起点(7,7)为(奇,奇)，

(S_1,S_2)为(奇,偶),所以查表3中 c 子带(S_1 奇,S_2 偶),可知其行应按右边界、列应按右边界点对称延拓。

(3)再根据表1中 $c_j(k_1,k_2)$ 行的计算方法,得行区间:$\left[\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil,\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{21}{2^{2-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{7}{2^{2-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]=[2,5]$,行右边界:$\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{21}{2^{2-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{7}{2^{2-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$,列区间:$\left[\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil,\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{24}{2^{2-1}}\right\rceil-\left\lceil\frac{7}{2^{2-1}}\right\rceil}{2}\right\rceil-1\right]=[2,5]$,列右边界点为5。

(4)只需计算行区间[2,5]的数据,再以行右边界 $\frac{9}{2}$ 为轴对称延拓,即可得到行对称区间 $\left[\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_0}{2^j}\right\rceil+S_1-2\right]=\left[\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil,\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil+7-2\right]=[2,7]$的数据。

(5)只需计算列区间[2,5]的数据,再以列右边界点5为轴对称延拓,即可得到列对称区间 $\left[\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil,\left\lceil\frac{n_0}{2^j}\right\rceil+S_2-2\right]=\left[\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil,\left\lceil\frac{7}{2^2}\right\rceil+8-2\right]=[2,8]$的数据。

4　边界点对称延拓实例

以纯二维5/3小波滤波器组为例,各滤波器组的具体数值如图5所示。

从图6中可以看出 $c_1(k_1,k_2)$,$d_1(k_1,k_2)$,$e_1(k_1,k_2)$和 $f_1(k_1,k_2)$中的数据都是各自子带对称区间内最小数据量的数据,根据以上周期和对称性的计算方法即可得到整个频带的数据。

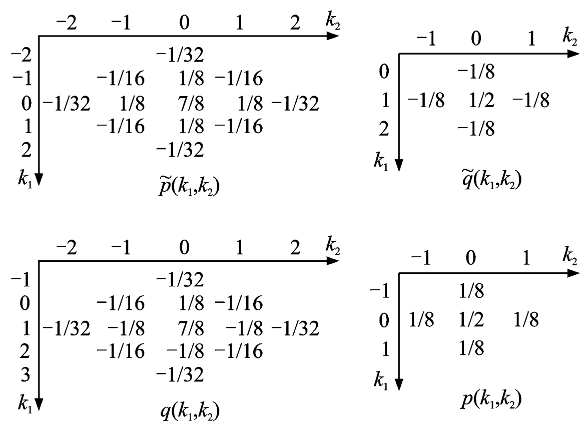


图5　纯二维5/3小波滤波器组

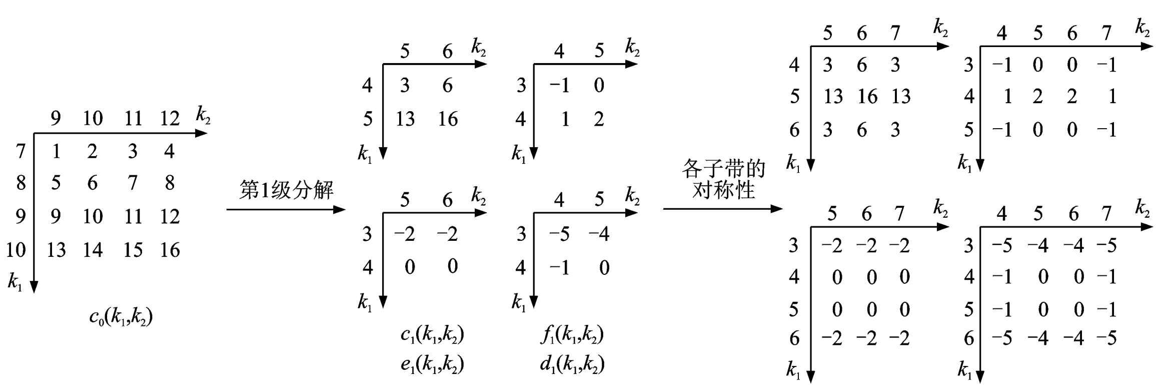


图6　原始数据 $c_0(k_1,k_2)$的第1级分解及其各子带的对称性

5　结束语

为了对边界点对称延拓有更清楚的认识,本文对其在纯二维小波滤波器组的应用进行了详细的研究。根据滤波器、边界点对称关系和纯二维小波的性质推导出了多级分解后各子带的周期和对称关系,并给出了应用实例,有一定的应用价值。

参考文献:

[1]　侯正信,王成优,杨爱萍.有限长度信号Mallat算法的边界延拓方法[J].数据采集与处理,2009,24(6):714-720.

Hou Zhengxin, Wang Chengyou, Yang Aiping. Boundary extension methods for Mallat algorithm of finite length signal[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2009,24(6):714-720.

[2]　小野定康,铃木纯司.JPEG2000技术[M].强增福,译.北京:科学出版社,2004.

Sadayasu Ono, Junji Suzuki. The JPEG2000 technology[M]. Beijing: Science Press, 2004.

[3] 杨雪玲,徐妮妮,王静. 纯二维全相位 IDCT 小波滤波器组的设计与实现[J]. 天津工业大学学报,2011,30(6):58-62.
Yang Xueling, Xu Nini, Wang Jing. Design and implementation of true 2-D APIDCT filter banks[J]. Journal of Tianjin Polytechnic University, 2011,30(6):58-62.

[4] 徐妮妮,侯正信,王兆华. 纯二维全相位滤波器及其在图像压缩中的应用[J]. 光电子激光,2007,18(5):608-611.
Xu Nini, Hou Zhengxin, Wang Zhaohua. True 2-D all phase filter bank and its application for image compression[J]. Journal of Optoelectronics Laser, 2007,18(5):608-611.

[5] 郭迎春,侯正信. 纯二维小波滤波器及其在图像压缩中的应用[J]. 光电子激光,2005,16(8):982-988.
Guo Yingchun, Hou Zhengxin. True 2-D wavelet filter bank and its application for image compression[J]. Journal of Optoelectronics Laser, 2005,16(8):982-988.

[6] Mallat S. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华,戴道清,黄文良,等译. 北京:机械工业出版社,2002.
Mallat S. A wavelet tour of signal processing[M]. Beijing: China Machine Press, 2002.

[7] Mallat S. A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989,11(7):674-693.

[8] Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets[J]. SIAM News, 1998, 29(2):511-546.

[9] Daubechines I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. J Fourier Anal Appl, 1998,4(3):245-267.

作者简介:谢玉芯(1977-),女,讲师,研究方向:数字图像处理、小波分析及应用,E-mail:xyxtx@tjpu.edu.cn;杨雪玲(1982-),女,硕士研究生,研究方向:数字图像处理与编码技术、小波分析及应用;王静(1987-),女,硕士研究生,研究方向:数字图像处理与编码技术、小波分析及应用。