

文章编号:1004-9037(2013)02-0226-05

阈值阵列模型下的超阈值随机共振信噪比增益

张礁石 杨子贤 卢结成

(中国科学技术大学信息科学技术学院,合肥,230027)

摘要:研究了阈值阵列模型和超阈值随机共振现象。对该模型进行剖析,认为阈值阵列系统可以分解为单个阈值系统与集总平均器的级联。为了研究周期输入下的超阈值随机共振现象,理论分析了周期输入下的阈值阵列模型输出随机过程的统计特性,以输出信噪比增益作为随机共振的测度,固定输入信噪比,观测输出信噪比增益相对于阈值噪声方差的变化规律。证实当输入噪声为高斯噪声时,在阈值阵列系统中加入统计独立的高斯白噪声可使输出信噪比增益大于1,当输入噪声为非高斯噪声时,可获得更高的输出信噪比增益。

关键词:超阈值随机共振;阈值阵列模型;集总平均;信噪比增益

中图分类号:TP183

文献标志码:A

Signal-to-Noise Ratio Gain of Suprathreshold Stochastic Resonance Based on Threshold Array Model

Zhang Jiaoshi, Yang Zixian, Lu Jiecheng

(School of Information Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei, 230027, China)

Abstract: The threshold-array model is presented to study suprathreshold stochastic resonance (SSR) phenomenon. The analysis of the presented model proves that the threshold-array system can be decomposed into a cascade of a single threshold system and an ensemble averager. In order to study the SSR with periodic input, the statistical properties of the output process of the threshold-array model are evaluated. With a fixed input signal-to-noise ratio(SNR), the output SNR gain of the model varies in a non-monotonic way when injecting independent threshold noises into the array. If the input noise is Gaussian, when adding independent Gaussian white threshold noises into the array, a SNR gain larger than unity can be obtained. Moreover, when the input noise is non-Gaussian, there will be a better SNR gain.

Key words: suprathreshold stochastic resonance; threshold array model; ensemble averaging; SNR gain

引 言

随机共振(Stochastic resonance, SR)是一种现象:在某些非线性系统中,衡量随机共振的测度(如输出信噪比增益、互信息量等)随着加入噪声的改变呈现出非单调变化的规律。国内外早期的研究大多集中在一类非线性动态系统——双稳态系统^[1]: $\frac{dx}{dt} = -V'(x) + A\cos\Omega t + \xi(t)$, 其中 $V(x) =$

$-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$, 但该模型受限于绝热近似理论 ($A \ll 1, \Omega \ll 1$)。

Wiesenfeld^[2]等在1994年首次提出SR实际上是一种阈值效应,低阈值信号、噪声、阈值系统是产生SR现象的必需因素。在2000年Stocks^[3]提出超阈值SR概念以前,人们仅研究由一个阈值单元组成的SR系统,并认为只有当输入信号幅值低于系统阈值时(即输入为低阈值信号),才能产生SR现象。Stocks提出阈值阵列模型,证实当输入

信号幅值高于系统阈值时(即输入为超阈值信号),通过此模型可得到另一种形式的 SR 现象——超阈值 SR(Suprathreshold SR)。目前,对于超阈值 SR 的研究主要针对非周期信号输入信号下,输入输出互信息量^[3]、输入输出相关系数^[4]等随阈值噪声的加入非单调变化的情况,但对于周期输入却很少有研究。

对于周期输入,采用输出信噪比增益来衡量其 SR 测度。本文采用阈值阵列模型为研究对象,研究输出信噪比增益是否大于 1 的问题。然而,与之前对于输出信噪比增益研究不同的是,本文所处理的输入信号为周期信号与噪声的混合信号,即含噪信号。这样一来,输入信噪比是固定的,通过阈值阵列系统,在阈值噪声的作用下(注意,含噪输入信号通过阈值阵列系统又受到阈值噪声的作用,相当于在本来就受污染的信号中再加入噪声),可观察到输出信噪比相对于输入信噪比有所提高(即输出信噪比增益大于 1),且输出信噪比增益随着阈值噪声方差的变化而非单调变化。从黑盒角度看,对原本含噪声的信号进行处理,期望其输出信噪比相比输入信噪比增加,相当于对输入信号进行滤波去噪。而阈值阵列系统就等价于这个滤波器。只不过这个特殊的非线性滤波器借助了噪声的有效性,对“模糊”的输入信号进行处理,得到更“清晰”的输出信号。

1 随机共振的测度——信噪比增益

最早用于衡量 SR 现象是否存在的标志就是信噪比是否得到改善,人们对于 SR 是否能够使系统输出信噪比高于输入信噪比存在争论^[4]。但公认的是,在线性响应理论下,限定输入信号幅值远小于噪声幅值,SR 不能提供大于 1 的信噪比增益。本文利用超阈值 SR 理论模型证实在周期输入信号下可获得大于 1 的信噪比增益。

Chapeau^[5]提出的静态阈值 SR 理论中给出输出信噪比为输出信号谐频 m/T_s 上的谱线高度与附近带宽 ΔB 内噪声功率之比

$$\text{SNR}_{\text{out}}\left(\frac{m}{T_s}\right) = \frac{|\langle E[Y(t)] \cdot \exp(-im2\pi t/T_s) \rangle|^2}{\langle \text{var}[Y(t)] \rangle \Delta t \Delta B} \quad (1)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 代表时域平均, $E[Y(t)]$ 为输出信号均值, $\text{var}[Y(t)]$ 为输出信号方差。

输入信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{in}}\left(\frac{m}{T_s}\right) = \frac{|\langle s(t) \cdot \exp(-im2\pi t/T_s) \rangle|^2}{\sigma_{\xi}^2 \Delta t \Delta B} \quad (2)$$

式中: $s(t)$ 为输入有用信号, σ_{ξ}^2 为输入噪声 $\xi(t)$ 的方差。

输出信噪比增益为

$$G_{\text{SNR}}\left(\frac{m}{T_s}\right) = \frac{\text{SNR}_{\text{out}}(m/T_s)}{\text{SNR}_{\text{in}}(m/T_s)} \quad (3)$$

式中: m/T_s 表示输出信号谐频,文中仅研究 $m=1$ 的情况,即输出信号基频。

2 阈值阵列模型

最初,人们研究的阈值 SR 是基于单阈值模型的,该模型的传递函数为

$$y(t) = \begin{cases} 1 & s(t) + \xi(t) - \theta > 0 \\ -1 & s(t) + \xi(t) - \theta < 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $s(t)$ 为输入信号, $\xi(t)$ 为引入的噪声项, θ 为系统阈值, $y(t)$ 为输出信号。对于超阈值周期信号输入,单阈值系统输出信噪比增益小于 1。

文献[3]研究以非周期信号为输入的超阈值 SR,提出了阈值阵列模型,如图 1 所示,该模型由 N 个独立的阈值单元组成,在 N 个阈值单元的输入端分别引入独立同分布的加性阈值噪声,将 N 个阈值单元的输出累加得到系统的输出。

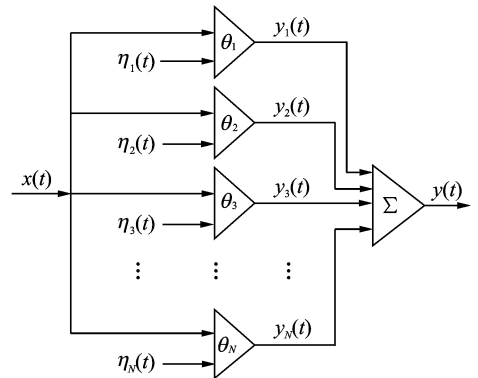


图 1 非周期输入超阈值 SR 阈值阵列模型

此处引入集总平均(Ensemble averaging, EA)的概念^[6]:最初由统计学中提出,后被引入到信息领域,EA 技术曾广泛应用在声纳信号处理中,并在生物信号、雷达信号、神经元信号处理等中得到应用。

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(t) + \eta_i(t)] \quad (5)$$

EA 可由式(5)描述,输入周期信号 $x(t)$ 与噪声的 N 次独立实现样本 $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_N(t)$ 相加(N 个独立同分布的噪声样本与输入周期信号叠加得到 N 个含噪信号样本),并对累加结果取平均,得到输出信号 $y(t)$ 。若输入噪声 $\eta(t)$ 的方差

为 σ^2 , 那么输出信号 $y(t)$ 的方差为 σ^2/N ; 则输出信号的信噪比 SNR 会提高约 N 倍。鉴于集总平均能改善周期信号的信噪比, 可在单阈值系统之后级联集总平均器, 改善单阈值系统的输出信噪比。本文提出适用于周期输入的超阈值 SR 系统, 如图 2 所示。图 2 所示系统展开可得图 3 所示的周期输入下的超阈值 SR 阈值阵列模型。

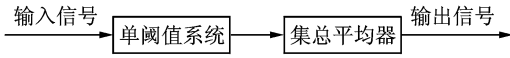


图 2 阈值系统与集总平均器的级联

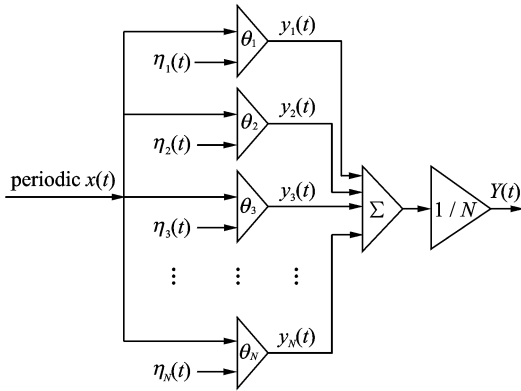


图 3 周期输入的超阈值 SR 阈值阵列模型

基于超阈值 SR 的阈值阵列共有 N 个阈值单元, 每个阈值单元有两个输入端。其中一个为共同输入 $x(t)$, 另一个输入端引入阈值噪声 $\eta_i(t)$, N 个阈值单元输入的阈值噪声彼此独立且同分布, 其概率密度函数 (Probability density function, PDF) 为 $f_\eta(\eta)$, 分布函数 (Cumulative distribution function, CDF) 为 $F_\eta(\eta)$ 。第 i 个阈值单元的阈值为 θ_i , 在阈值噪声 $\eta_i(t)$ 的作用下, 其输出为

$$y_i(t) = \text{sign}[x(t) + \eta_i(t) - \theta_i] \quad (6)$$

式中: sign 为符号函数, $x(t) + \eta_i(t) - \theta_i > 0$, $y_i(t) = 1$, 或 $y_i(t) = -1$ 。 N 个阈值单元的输出累加后平均得到系统输出, 即

$$Y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) \quad (7)$$

本文研究的输入为有用信号和噪声的混合, $x(t) = s(t) + \xi(t)$, 即 $s(t)$ 为输入周期信号, $\xi(t)$ 为高斯白噪声, 其 PDF 为 $f_\xi(\xi)$ 。固定所有阈值单元的阈值为 $\theta_i = \theta, i = 1, 2, \dots, N$ 。则根据条件期望公式可知

$$E[y_i(t)] = E\{E[y_i(t) | x(t)]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E[y_i(t) | x(t)] \cdot f_x(x) dx = 1 - 2F_\eta(\theta - x(t)) \quad (8)$$

由 $x(t) = s(t) + \xi(t)$, 则 $x(t)$ 的 PDF 为 $f_\xi(x - s(t))$, 且 $E[y_i(t)], i = 1, 2, \dots, N$ 都相等, 所以

$$E[Y(t)] = E[y_i(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - 2F_\eta(\theta - x(t))] \cdot f_\xi(x - s(t)) dx \quad (9)$$

同理

$$E[Y^2(t) | x(t)] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t)\right)^2 | x(t)\right] = \frac{1}{N} \cdot$$

$$E[y_i^2(t) | x(t)] + \frac{N-1}{N} E^2[y_i(t) | x(t)]$$

由式(6)知 $E[y_i^2(t) | x(t)] = 1$, 所以

$$E[Y^2(t)] = 1 + 4 \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} F_\eta^2(\theta - x(t)) \cdot$$

$$f_\xi(x - s(t)) dx - 4 \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} F_\eta(\theta - x(t)) \cdot f_\xi(x - s(t)) dx \quad (10)$$

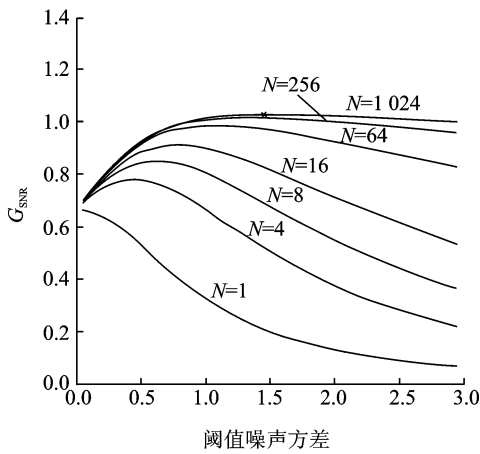
$$\text{var}[Y(t)] = E[Y^2(t)] - E[Y(t)]^2 \quad (11)$$

3 信噪比增益的实验分析

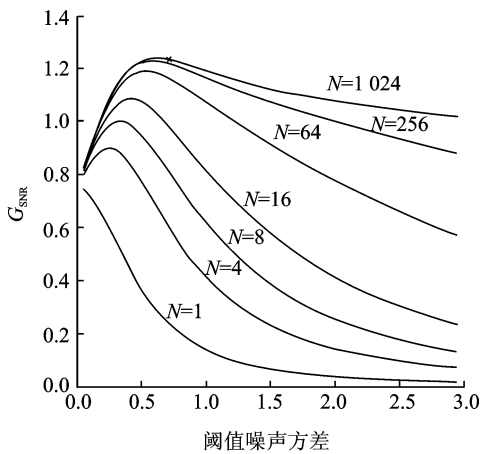
3.1 高斯输入噪声下的超阈值 SR

考虑输入信号 $x(t)$ 为余弦周期信号 $s(t) = a \cdot \cos(2\pi t/T_s)$ 与均值为 0、方差为 σ_ξ^2 的独立高斯白噪声 $\xi(t)$ 的混合, 在阈值阵列中, 每个单元的阈值噪声 $\eta_1(t), \dots, \eta_N(t)$ 为独立同分布的均值为 0、方差为 σ_η^2 的高斯白噪声, 且 $\eta_i(t)$ 独立于 $x(t)$ 。 $s(t)$ 频率 $1/T_s = 0.1$ Hz, 采样频率为 1 Hz, $\xi(t)$ 的方差 $\sigma_\xi^2 = 0.5$ 或 1, 固定所有单元的阈值为 $\theta_i = 0$ 。图 4 所示为输出信噪比增益 G_{SNR} 随阈值噪声 $\eta(t)$ 方差递增产生非单调的变化。因为输入信号 $x(t)$ 已经确定, 即输入信噪比 SNR_{in} 是常数, 所以图 4 也可以看作是输出信噪比 SNR_{out} 随着阈值噪声 $\eta(t)$ 加入产生的非单调变化。

图 4 中每条曲线代表不同的阈值单元个数, 从 1 到 1 024。当 $N=1$ 时, 输出信噪比增益 G_{SNR} 随阈值噪声 $\eta(t)$ 的加入逐渐降低, 这也是直观的感觉: 加入噪声使得有用信号变得模糊。这也证明了在输入为超阈值信号时, 单个阈值单元无法产生 SR 现象。此处“超阈值”并非指输入信号任何时候都大于阈值, 而是指输入信号有时在阈值之上, 有时在阈值之下。当阈值为输入信号均值时, 阈值阵列系统的性能将达到最优^[7]。这里选择的阈值 $\theta_i = 0$ 就是输入信号 $x(t)$ 的均值。当 $N > 1$, 随着阈值噪声的加入, 信噪比增益曲线会产生非单调的变化, 且 N 越大, 曲线峰值越高。但是当 N 很大(大



(a) $\sigma_{\xi}^2=1$ 时,不同 N 值对应的 G_{SNR}



(b) $\sigma_{\xi}^2=0.5$ 时,不同 N 值对应的 G_{SNR}

图 4 对于不同的阈值单元个数 N , G_{SNR} 随阈值噪声方差增加非单调地变化

于 256) 时, 峰值趋于稳定。当 $s(t)$ 的幅值为 1, 考虑输入噪声方差 $\sigma_{\xi}^2=1$ 和 $\sigma_{\xi}^2=0.5$ 两种情况, 分布如图 4(a, b) 所示。图 4(a) 中“×”标记 $N=1\ 024$ 时 G_{SNR} 的峰值为 1.036 2, 对应的阈值噪声方差为 1.45。图 4(b) 中“×”标记 $N=1\ 024$ 时 G_{SNR} 的峰值为 1.257 1, 对应的阈值噪声方差为 0.60。 $G_{\text{SNR}} > 1$ 被认为是阈值阵列系统对输入含噪信号产生积极作用的标志。图 4(a) 中随着 N 的继续增加, G_{SNR} 趋于恒定, 仅在 1 附近。图 4(b) 中当 $N=8$ 时, G_{SNR} 开始超越 1, 峰值在 1.2 附近。

值得一提的是, 超阈值 SR 不再适合强噪声下的微弱输入信号, 而是要求输入噪声强度小于有用信号幅度或二者相当。图 5 所示的每条曲线对应不同的输入有用信号 $s(t) = a \cdot \cos(2\pi t/T_s)$ 幅值 a , G_{SNR} 随阈值噪声 $\eta(t)$ 方差 σ_{η}^2 的递增产生非单调的变化。其中阈值单元个数 N 为 64, 输入噪声 $\xi(t)$ 的方差 $\sigma_{\xi}^2=1$ 。可知, 当 $a < 1$ 时, G_{SNR} 始终不

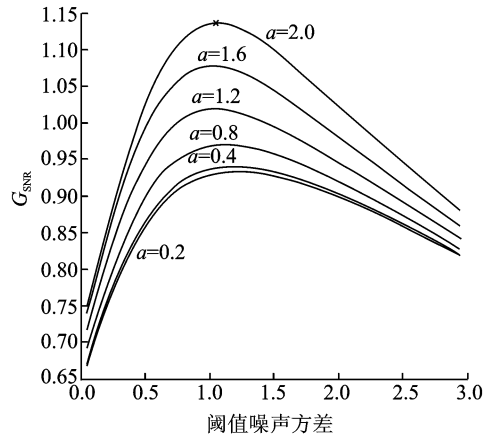


图 5 对不同的 $s(t)$ 幅值 a , G_{SNR} 随阈值噪声方差的变化

能突破 1, 而当 $a=1.2$ 时, G_{SNR} 大于 1, 并随着 a 的增加而上升。

3.2 非高斯输入噪声下的超阈值 SR

以上实验都是限定输入噪声服从高斯分布的情况下进行的。文献[8]研究在非高斯噪声中利用阈值阵列 SR 系统检测微弱周期信号。典型的非高斯噪声服从拉普拉斯分布(Laplacian Gaussian)和混合高斯分布(Gaussian mixture)。服从拉普拉斯分布, 均值为 0, 方差为 σ_{ξ}^2 的噪声其 PDF 为 $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}} \cdot \exp\left(-\sqrt{2}\left|\frac{\xi}{\sigma_{\xi}}\right|\right)$ 。

当输入信号为余弦信号与拉普拉斯噪声的混合时, 通过阈值阵列系统后, 输出 G_{SNR} 的变化如图 6 所示, 其中, $s(t)$ 幅值 a 为 1, $\xi(t)$ 均值为 0, 方差 $\sigma_{\xi}^2=1$ 。当输入噪声 $\xi(t)$ 服从 Laplacian 分布时, 输出信噪比增益 G_{SNR} 随阈值噪声方差的增加非单调地变化。

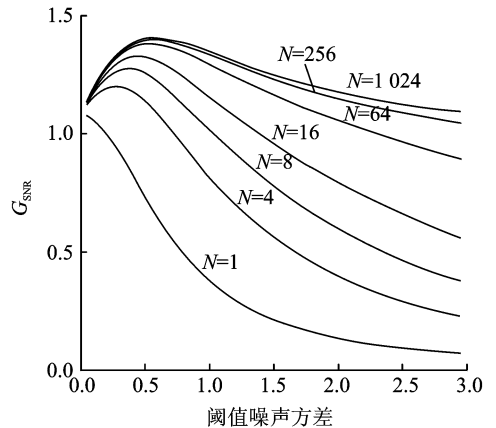


图 6 输入噪声服从 Laplacian 分布时, G_{SNR} 随阈值噪声方差的变化

服从混合高斯分布,均值为 0,方差为 σ_{ξ}^2 的噪声其 PDF 为

$$f(\xi) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \cdot \left[\alpha \cdot \exp\left(-\frac{c^2\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right) + \frac{1-\alpha}{\beta} \exp\left(-\frac{c^2\xi^2}{2\beta^2\sigma_{\xi}^2}\right) \right]$$

$$c = [\alpha + (1-\alpha)\beta^2]^{1/2} \quad 0 < \alpha < 1, \beta > 0$$

当输入噪声 $\xi(t)$ 服从混合高斯分布时, $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$, 其余条件同图 6, 输出信噪比增益 G_{SNR} 的变化如图 7 所示。当输入噪声 $\xi(t)$ 服从混合高斯分布时, 输出信噪比增益 G_{SNR} 随阈值噪声方差的增加非单调地变化。

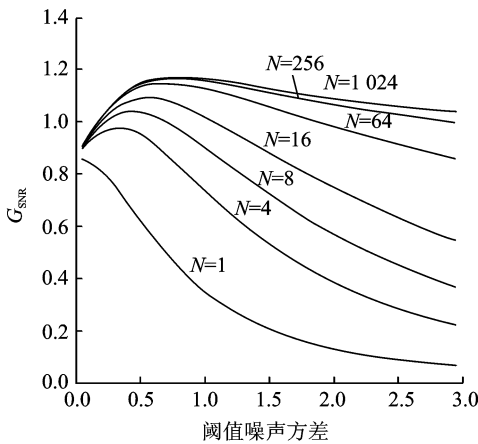


图 7 输入噪声服从混合高斯分布时, G_{SNR} 随阈值噪声方差的变化

由图 6, 7 可以看出, 在相同条件下, 当输入噪声服从非高斯分布, 相比服从高斯分布情况, 可以获得更好的输出信噪比增益。而且, 非高斯情况下, 当输入信号幅值不大于输入噪声的均方根时, 也可以产生大于 1 的信噪比增益。可以认为 $G_{\text{SNR}} > 1$ 不仅与阈值阵列模型参数有关, 也与输入噪声的分布及方差有关。

4 结束语

综上所述, 本文研究了输入超阈值周期信号和不同分布的输入噪声混合, 经阈值阵列系统得到了输出信噪比大于输入信噪比(即输出信噪比增益大于 1)的结果, 这正是超阈值 SR 现象的体现。尽管很多学者认为输出信噪比增益作为衡量 SR 的测度实践性较小。然而, 在一般的信号处理中, 总是先对输入信号进行滤波, 尽可能滤除有害噪声, 再将滤波后的信号送入信号处理单元, 如果利用阈值阵列系统对输入信号进行预处理, 利用噪声的有效

性, 提高其信噪比, 则可能会获得更好的效果。目前在图像分割^[9]和数字图像水印^[10]检测领域, 超阈值 SR 均得到应用。

参考文献:

- [1] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(1): 223-287.
- [2] Wiesenfeld K, Pierson D. Stochastic resonance on a circle[J]. *Physical Review Letters*, 1994, 72(14): 2125-2129.
- [3] Stocks N G. Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(11): 2310-2313.
- [4] McDonnell M D. Theoretical aspects of stochastic signal quantisation and suprathreshold stochastic resonance[D]. Australia: University of Adelaide, 2006: 102-130.
- [5] Chapeau F, Godivier X. Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems[J]. *Physical Review E*, 1997, 55(2): 1478-1495.
- [6] Rompelman O, Ros H H. Coherent averaging technique: A tutorial review. Part 1: Noise reduction and the equivalent filter[J]. *Journal of Biomedical Engineering*, 1986, 8(1): 24-29.
- [7] Stocks N G. Information transmission in parallel threshold arrays: Suprathreshold stochastic resonance[J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 1-9.
- [8] Rousseau D, Anand G V, Chapeau F. Noise-enhanced nonlinear detector to improve signal detection in non-Gaussian noise[J]. *Signal Processing*, 2006, 86: 3456-3465.
- [9] Jha R K, Biswas P K, Chatterji B N. Image segmentation using suprathreshold stochastic resonance[J]. *World Academy of Science, Engineer and Technology*, 2010, 72: 695-709.
- [10] Patel A, Kosko B. Noise benefits in quantizer-array correlation detection and watermark decoding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 488-505.

作者简介: 张礁石(1988-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 随机共振、智能信息处理, E-mail: zjs023@mail.ustc.edu.cn; 杨子贤(1985-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 随机共振、智能信息处理; 卢结成(1951-), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 智能信息处理。

