

文章编号:1004-9037(2013)02-0173-05

一种改进的基于 FFT 的信号插值算法

张翼鹏¹ 陈亮¹ 郝欢¹ 郑国宏¹ 梁晓明²

(1. 解放军理工大学通信工程学院, 南京, 210007; 2. 海军兵种指挥学院教育技术中心, 广州, 510430)

摘要:在传统运用 FFT 进行信号插值运算的基础上,提出了一种提高插值精度的改进算法。通过子序列重叠和裁剪,舍弃重建序列边缘误差较大的样点,再将相对准确的样点进行重组,从而大幅提高插值精度。实验结果表明:与 Prasad 等算法相比,在计算量增加 3.1% 的情况下,不同子序列长度对应的归一化均方误差平均下降至原来的 1/19;在计算量增加 2 倍的情况下,不同子序列长度对应的归一化均方误差平均下降至原来的 1/75。

关键词:快速傅里叶变换(FFT);抽样;插值

中图分类号:TN911.72 **文献标志码:**A

Improved Algorithm for Interpolation Based on FFT

Zhang Yipeng¹, Chen Liang¹, Hao Huan¹, Zheng Guohong¹, Liang Xiaoming²

(1. Institute of Communications Engineering, PLA University of Science & Technology, Nanjing, 210007, China;
2. Educational Technology Center, Navy Arms Command College, Guangzhou, 510430, China)

Abstract: On the basis of the traditional interpolation algorithm using FFT, an algorithm is proposed to improve the accuracy of interpolation. The algorithm overlaps and cuts the subsequences. Then it discards the samples with great error at both ends of interpolated sequence and reconstructs the relatively accurate samples. In this way, the accuracy of interpolation can be significantly improved. Experimental results show that, compared with the interpolation algorithm proposed by Prasad, in case of computational amount increasing by 3.1%, the normalized mean square errors corresponding to different subsequence lengths decrease to 1/19 of their original in average. In case of computational amount increasing by twice, the normalized mean square errors corresponding to different subsequence lengths decrease to 1/75 of their original in average.

Key words: fast Fourier transform (FFT); sampling; interpolation

引 言

现代数字信号处理经常会遇到信号插值的问题,例如语音信号处理、数字图像处理、采样率变换等。在运用快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)之前,数字信号的插值运算一般通过在相邻的数据点之间补零,再将补零后的信号送到数字低通滤波器进行滤波来实现^[1]。但是,这种信号插值方法要达到良好的插值效果,需要在计算量上花费较大的代价。之后,一种利用 FFT 来实现信号插值的新奇算法被学者们广泛研究^[2]。这种算法的突出优点是计算量小,可以快速实现信号插

值,而缺点是在信号插值的准确性上略显不足。针对这一问题,不断有学者提出新的改进算法。Fraser 在进行细致的实验研究后发现,利用加窗 FFT 进行插值运算可有效减少频谱泄露,提高插值运算的准确性^[3]。之后,学者在窗函数的选择上做了大量研究,先后将 Blackman-Harris, Rife-Vincent, Kaiser 等窗函数运用到 FFT 中,以此来减小频谱泄漏和栅栏效应^[4-5],并将研究的成果运用到谐波分析^[6], OFDM^[7]等领域中。也有一些学者没有从窗函数着手,而是直接对原始信号进行处理。文献[8]就将原始信号通过线性变换进行重建,使其满足一定的周期性,进而提高插值运算的准确性。而本文算法从另一个角度改进原始的插值算法,提出

通过对序列分段、重叠、裁剪和重组来达到提高插值准确性的目的。

本文首先介绍了传统基于 FFT 的插值算法,通过与插值公式比较,分析该算法产生较大误差的原因。然后在此基础上,提出一种改进的基于 FFT 的信号插值算法。最后进行了实验仿真,并对实验结果进行了对比分析。

1 FFT 插值算法的实现及分析

假设 $x(t)$ 是一带限连续的实信号,最高频率为 f_c 。原始序列 $x(n)(n=0, 1, \dots, N-1)$ 和测试序列 $x(m)(m=0, 1, \dots, M-1)$ 通过采样 $x(t)$ 得到,采样周期分别为 T 和 T/L s,采样满足 Nyquist 采样定理,即 $2f_c < 1/T$,就可以保证通过插值运算无失真地恢复 $x(t)$ 。这里,离散序列插值的目标就是由长度为 N 的原始序列 $x(n)$ 获得一个长度为 $M=L \times N$ 的序列 $\hat{x}(m)$, L 为插值因子。通过比较 $\hat{x}(m)$ 和 $x(m)$ 的一致程度,可以考察信号插值的质量。

根据采样定理,可以得到由序列 $x(n)$ 插值成序列 $\hat{x}(m)$ 的方法

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \phi(\theta)$$

$$\phi(\theta) = \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{m}{L} - n\right)\right]}{\pi\left(\frac{m}{L} - n\right)} \quad m=0, 1, \dots, M-1 \quad (1)$$

可以看出,利用插值公式(1)进行信号插值的运算全部在时域进行,而另一种基于 FFT 的插值过程通过一次傅里叶变换和一次傅里叶反变换来实现,其运算过程主要分为 3 步^[2]。首先对长度为 N 的原始序列 $x(n)$ 进行 FFT

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

然后由 $X_N(k)$ 构造一个长度为 M 的新序列 $X_M(k)$ 。由于 N 的奇偶不同,因此构造的 $X_M(k)$ 也略有差别。

(1) 当 N 为奇数时

$$X_M(k) = \begin{cases} L \times X_N(k) & k \in [0, (N-1)/2] \\ 0 & k \in [(N-1)/2+1, M-(N-1)/2-1] \\ L \times X_N(k-M+N) & k \in [M-(N-1)/2, M-1] \end{cases} \quad (3)$$

(2) 当 N 为偶数时

$$X_M(k) = \begin{cases} L \times X_N(k) & k \in [0, N/2-1] \\ 0.5 \times L \times X_N(k) & k = N/2 \\ 0 & k \in [N/2+1, M-N/2-1] \\ 0.5 \times L \times X_N(N/2) & k = M-N/2 \\ L \times X_N(k-M+N) & k \in [M-N/2+1, M-1] \end{cases} \quad (4)$$

最后对构造的序列 $X_M(k)$ 做 M 点的 IFFT 得到 $\hat{x}(m)$

$$\hat{x}(m) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M(k) e^{j\frac{2\pi}{M}km} \quad m=0, 1, \dots, M-1 \quad (5)$$

通过以上 3 步,可以得到插值之后长度为 $M=L \times N$ 的目标序列 $\hat{x}(m)$ 。

与插值公式(1)相似,基于 FFT 的插值算法也可以表达成式(6)的乘累加形式,通过这种乘累加的形式可以更好地分析该插值算法的性能^[2]。

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \phi_N\left(\pi\left[\frac{m}{M} - \frac{n}{N}\right]\right) \quad m=0, 1, \dots, M-1 \quad (6)$$

式中,当 N 为奇数时

$$\phi_N(\theta) = \frac{\sin(N\theta)}{N\sin(\theta)} \quad (7)$$

当 N 为偶数时

$$\phi_N(\theta) = \frac{\sin(N\theta)}{N\tan(\theta)} \quad (8)$$

图 1 和图 2 分别给出了当 N 为奇数(以 $N=15$ 为例)和偶数(以 $N=16$ 为例)时, $\phi_N(\theta)$ 的函数波形。

观察图 1 和图 2,并比较插值函数式(1)可以发现, $\phi(\theta)$ 是关于原点偶对称,且不断衰减的函数。而无论 N 为奇数或者偶数,基于 FFT 算法的插值函数 $\phi_N(\theta)$ 都是一个以 π 为周期的周期函数,其没

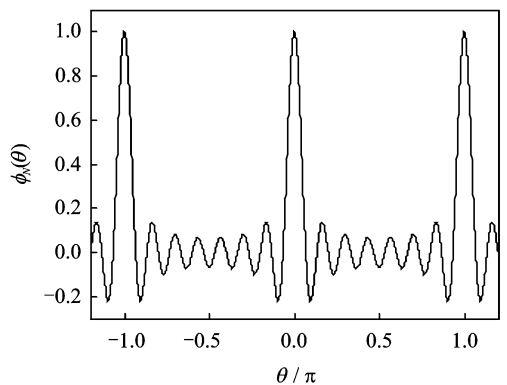
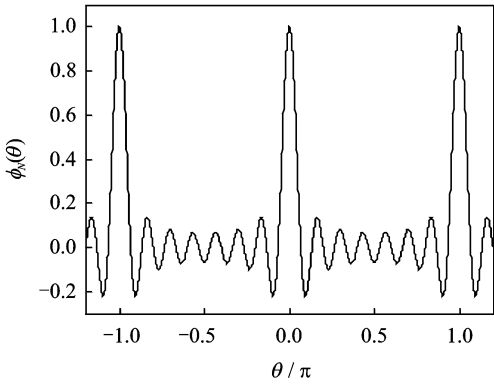


图 1 $N=15$ 时 $\phi_N(\theta)$ 的波形

图 2 $N=16$ 时 $\phi_N(\theta)$ 的波形

有不断衰减的特点。信号插值的过程是一个原始样点与加权值乘累加的计算过程,原始样点与重建位置的距离越近,之间的相关度就越大,与原始样点相乘的加权值就应该越大。但分析式(6)后可以发现,利用 FFT 方法进行插值的过程并非如此。当给定了插值位置 m 的值后,式(6)可以改写成

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega(n)$$

$$\omega(n) = \phi_N\left(\pi\left(\frac{m}{M} - \frac{n}{N}\right)\right) \quad (9)$$

可以看出,当 $\left|n - \frac{m}{M}N\right| > \frac{N}{2}$ 时,离插值位置 m 越远的原始样点反而将乘以更大的权值。利用离散傅里叶变换的性质, n 的取值范围是定义在区间 $[0, N-1]$ 上的,如果将 n 的取值范围扩展, $x(n)$ 将是一个周期为 N 的序列。同样, $\omega(n)$ 也是一个周期为 N 的序列。

$$x(n) = x(n \pm PN)$$

$$\omega(n) = \omega(n \pm PN) \quad P=0, 1, \dots \quad (10)$$

这样,当 $\left|n - \frac{m}{M}N\right| > \frac{N}{2}$ 时,根据序列的周期性,与原始样点 n 相邻 N 点的样点 n' 与其值相同,且其加权值也相同。此时如果原始样点 n 离插值位置 m 越远,其对应的 n' 将会离 m 越近,从而满足了相关度的关系。如果换一个求和区间,式(9)可以等价成

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega(n) = \sum_{n=i}^{N-1+i} x(n) \omega(n)$$

$$i = \left[\frac{m}{M}N \right] - \frac{N}{2} + 1 \quad (11)$$

式中符号 $[\cdot]$ 表示取整运算。此时式 $\sum_{n=i}^{N-1+i} x(n)$ 与插值公式(1)非常接近,其权值均是以插值位置 m 为中心,两端衰减的函数,不同的是 n 的取

值,一个是 N ,一个是无穷。可以证明,如果原始序列 $x(n)$ 是一个以 N 为周期的序列,那么式(1)与式(9)等价^[2]。也就是说,只有当 $x(n)$ 满足周期性时,利用 FFT 进行插值运算才是准确的,否则将出现较大误差。在 $x(n)$ 不满足周期性的情况下,位于重建序列两端的插值点误差较大,而序列中间的插值点的误差较小。随着 N 的增加, $M=L \times N$ 也随之增加,发生较大误差的插值点基本位于重建序列两端,其归一化均方误差(Normalized mean square error, NMSE)与输入序列的长度 N 成反比^[3]。NMSE 的定义式为

$$\text{NMSE} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} |\hat{x}(m) - x(m)|^2}{\sum_{m=0}^{M-1} |x(m)|^2} \quad (12)$$

但是,尽管增加 N 可以提高插值精度,但同时也会带来运算量的大幅增加,而且在实际运用中,考虑到信号处理的实时性以及语音信号的短时平稳性等因素, N 的选择也不会太长。

2 改进的 FFT 插值算法

为了改善基于 FFT 插值算法的准确性,文献[8]曾提出一种改进算法。该算法利用线性变换构造新的序列 $x'(n)$,使其满足 $x'(0) = x'(N)$,从而在一定程度上提高了插值的准确性。在实际运用中,对于一个长序列 $x(n)$,为了保证实时处理并且减少运算量,通常将 $x(n)$ 分成 K 个不重叠的子序列,每一个子序列的长度为 N_0 。此时如果原始序列不是周期序列,那么位于重建序列 $\hat{x}(m)$ 两端的点将会出现较大的误差。对于语音信号等而言,原始序列 $x(n)$ 通常不会是周期序列,那么采用传统算法得到的序列 $\hat{x}(m)$ 两端出现较大误差的情况将不可避免。此时,若可以舍弃 $\hat{x}(m)$ 数据两端误差较大的点,只保留 $\hat{x}(m)$ 数据中间相对准确的点,则裁剪组合后可以提高总体插值的准确性。基于这种思想,本文提出了改进的基于 FFT 的插值算法,具体通过以下 3 步实现:

(1) 将序列 $x(n)$ 分成 K 个有重叠的子序列,每一个子序列的长度为 N_0 ,表示为

$$x_i(n) = x(n + iD)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1$$

$$i = 0, 1, \dots, K - 1 \quad (13)$$

式中 D 的取值范围从 $N_0/2$ 到 N_0 。若 $D = N_0$,此时子序列的总数是 $[N/N_0] + 1$,子序列之间不会有重叠;若 $D = N_0/2$,此时插值精度最高,但是产

生的子序列个数增加到 $\lceil 2N/N_0 \rceil + 1$,这意味着增加了计算的复杂度。

(2)运用基于 FFT 的插值算法对每一个长度为 N_0 的子序列进行插值,得到一组新的长度为 $N_0 \times L$ 的子序列 $\hat{x}_i(m)$ 。

(3)通过裁剪 $\hat{x}_i(m)$ 得到 $\hat{x}'_i(m)$,将按照 i 的顺序组合得到 $\hat{x}(m)$ 。

$$\hat{x}'_0(m) = \hat{x}_0(m)$$

$$m = 0, 1, \dots, \frac{N_0 - D}{2} - 1 \quad (14)$$

$$\hat{x}'_i(m) = \hat{x}_i(m + \frac{N_0 - D}{2})$$

$$m = 0, 1, \dots, N_0 - D - 1;$$

$$i \neq 0, i \neq K - 1 \quad (15)$$

$$\hat{x}'_{K-1}(m) = \hat{x}_{K-1}(m + \frac{N_0 - D}{2})$$

$$m = 0, 1, \dots, \frac{N_0 - D}{2} - 1 \quad (16)$$

经过以上 3 步,将最终得到插值后的序列 $\hat{x}(m)$ 。

3 实验结果及分析

假设 N_0 是 2 的幂函数,那么完成整个插值的过程需要 $K(N_0 \log_2 N_0 + LN_0 \log_2 LN_0)/2$ 次复乘, $K(N_0 \log_2 N_0 + LN_0 \log_2 LN_0)$ 次复加,这里 $K = \lceil N/N_0 \rceil + 1$ 。因此,计算复杂度与 N_0 成正比,与 D 成反比。在实践中,根据实际准确度和复杂度的需要来选择 N_0 与 D 的值。

选择标准语音库中的语音作为测试信号,比较 NMSE 与 N_0 和 D 之间的关系。其中 $N=76\ 800$, $L=8$, $M=614\ 400$ 。结果见表 1。

图 3 和图 4 分别给出了各个算法的 NMSE 和计算复杂度。其中,计算复杂度由实数乘法与加法总和来表征。

表 1 NMSE 比较结果

参数	NMSE/ 10^{-4}					
	$N_0=32$	$N_0=64$	$N_0=128$	$N_0=256$	$N_0=512$	$N_0=1\ 024$
文献[2]	120	94	54	30	12	6.2
文献[8]	30	13	5.4	2.6	1.4	0.61
$D=31N_0/32$	26	9.5	2.6	0.83	0.37	0.13
$D=3N_0/4$	4.6	1.8	0.74	0.30	0.21	0.069
$D=N_0/2$	3.3	1.4	0.55	0.25	0.18	0.063

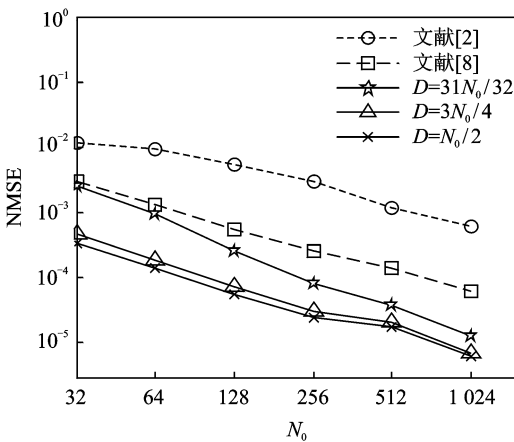


图 3 NMSE 比较图

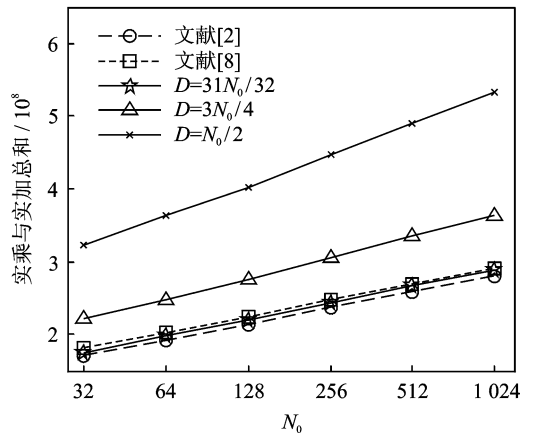


图 4 计算量比较图

从图 3 可以看出,NMSE 随着 N_0 的增加而大幅度下降。当 $D=N_0/2$ 时,本文提出的改进的基于 FFT 的插值算法可以获得最高的准确性,与文献[2]中的插值算法相比,对于不同的子序列长度,

NMSE 的平均可以下降为原来的 $1/75$,大幅提高信号插值运算的准确度。计算量提高约 2 倍。当 $D=31N_0/32$ 时,本文算法与文献[2]算法相比,对于不同的子序列长度,NMSE 的平均下降为原来

的1/19,但是计算复杂度仅提高了约3.1%。与文献[8]相比,无论 N_0 取值多少,本文算法得到的NMSE都明显更小,且当 $D=31N_0/32$ 时,本文算法计算量也少于文献[8]。综上所述,本文算法可以在牺牲少量计算的前提下,大幅提高信号插值的准确性。实验结果表明,本文提出的改进的基于FFT插值算法要明显优于文献[2,8]中的算法。

4 结束语

本文在传统信号插值算法的基础上,提出了一种改进的基于FFT的插值算法。理论分析和实验结果表明,与传统基于FFT的插值算法相比,本文算法可以在牺牲少量计算的前提下,大幅提高信号插值的准确性,同时满足信号实时处理的需要。下一阶段的研究可以通过本文算法与加窗FFT、全相位FFT^[9]相结合,从而进一步提高插值运算的准确性。

参考文献:

- [1] Proakis J G, Manolakis D G. 数字信号处理[M]. 4版. 北京: 电子工业出版社, 2007: 314-318.
- [2] Prasad K P, Satyanarayana P. Fast interpolation algorithm using FFT [J]. Electronics Letters, 1986, 22(4): 185-187.
- [3] Fraser D. Interpolation by the FFT revisited—An experimental investigation[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(5): 665-675.
- [4] 许珉, 刘凌波. 基于三次样条函数的加 Blackman-harris 窗插值 FFT 算法[J]. 电力自动化设备, 2009, 29(2): 59-63.
Xu Min, Liu Lingbo. Blackman-harris window interpolated FFT algorithm based on cubic spline function [J]. Electric Power Automation Equipment, 2009, 29(2): 59-63.
- [5] 张文强, 杨耀明, 许珉. 基于三次样条函数的加 Rife-Vincent(III)窗 FFT 插值算法[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(12): 36-39.
Zhang Wenqiang, Yang Yaoming, Xu Min. The Rife-Vincent(III) window interpolation FFT algorithm by using cubic spline function [J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(12): 36-39.
- [6] 高云鹏, 滕召胜, 卿柏元. 基于 Kaiser 窗双谱线插值 FFT 的谐波分析方法[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(2): 287-292.
Gao Yunpeng, Teng Zhaosheng, Qing Boyuan. Harmonic analysis based on Kaiser window double spectrum line interpolation FFT [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(2): 287-292.
- [7] 宋水正, 田丹, 李浩, 等. OFDM 中基于导频的加窗 FFT 信道估计[J]. 通信技术, 2011, 44(2): 19-21.
Song Shuizheng, Tian Dan, Li Hao, et al. Channel estimation for pilot-based windowed FFT in OFDM system [J]. Communications Technology, 2011, 44(2): 19-21.
- [8] Wang Z W, Soltis J J, Miller W C. Improved approach to interpolation using the FFT[J]. Electronics Letters, 1992, 28(25): 2320-2322.
- [9] 黄翔东, 王兆华. 全相位 FFT 相位测量法的抗噪性能[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(3): 286-291.
Huang Xiangdong, Wang Zhaohua. Anti-noise performance of all-phase FFT phase measuring method [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2011, 26(3): 286-291.

作者简介:张翼鹏(1988-),男,硕士研究生,研究方向:语音信号处理,E-mail:plakksam@yahoo.cn;陈亮(1974-),男,教授,研究方向:语音与图像处理;郝欢(1988-),男,硕士研究生,研究方向:神经网络与信息隐藏;郑国宏(1976-),男,讲师,研究方向:语音与图像处理;梁晓明(1979-),男,讲师,研究方向:通信系统设计。