

文章编号:1004-9037(2013)02-0160-06

# 全相位 FFT 测相方差及其 Cramer-Rao 下限

黄翔东 王 博 杜宇彬 王兆华

(天津大学电子信息工程学院,天津,300072)

**摘要:**为揭示全相位 FFT(All-phase FFT, apFFT)相位测量法相比于现有方法精度提高的内在原因,在前人基础上,结合谱泄漏分布特征及其参数估计理论,推导出了适用于 apFFT 测相的两未知参数估计模型的克拉罗下限(Cramer-Rao lower bound, CRLB),以及 apFFT 测相误差与频偏分布的关系。指出该理论下限比传统三参数的 CRLB 低 12 dB,基于此总结出一系列在不同信噪比和不同频偏情况下的 apFFT 测相性能结论。仿真结果表明:在不同的信噪比环境和不同的频偏情况下,apFFT 的测相方差都能被  $CRLB_2$  所界定,验证了上述结论及其新的 CRLB 正确性。

**关键词:**全相位 FFT;相位测量;克拉美罗下限;频偏;谱泄漏

**中图分类号:**TM933.3; TN911.72 **文献标志码:**A

## Variance of All-Phase FFT Measuring Phases and Its Cramer-Rao Lower Bound

Huang Xiangdong, Wang Bo, Du Yubin, Wang Zhaohua

(School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin, 300072, China)

**Abstract:** To disclose the underlying reasons of the superiority of apFFT in measuring phases compared with other existing methods, the distribution characteristics of spectral leakages and the theory of parameter estimation are combined. Therefore, one Cramer-Rao lower bound (CRLB) involving two-unknown-parameter estimation is deduced, which is suitable to apFFT measuring phases. Based on the deduction, the relationship of apFFT phase error and frequency offset distribution is also obtained. Moreover, it is also pointed out that the novel CRLB is 12 dB lower than the traditional CRLB involving three parameters. Consequently, several conclusions are drawn for apFFT measuring phases under different signal to noise ratios (SNRs) and different frequency offsets. Simulation results indicate that the phase measuring variance of apFFT can be defined by  $CRLB_2$  with different SNRs and different frequency offsets, verifying the above conclusions and the correctness of the novel CRLB.

**Key words:** all-phase FFT; measuring phase; CRLB; frequency offset; spectral leakage

## 引 言

相位测量在电力谐波分析、生物医学信号处理、信号分析及 GPS 导航等领域<sup>[1-4]</sup>均得到广泛应用,因而一直是学术界和工程界的研究热题,各种测相法(如希尔伯特变换法<sup>[5]</sup>、正弦曲线拟合法<sup>[6]</sup>及基于离散傅里叶变换(Discrete Fourier trans-

form)谱校正的各种相位测量法<sup>[7-9]</sup>)相继提出。然而文献[10]指出,这些测相法都需在先估测信号频偏值后,再用频偏值去校正相位,因而频率估计误差会带到相位估计误差中去,导致估计性能变差。

文献[11]中提出全相位 FFT(All-phase FFT, apFFT)测量法,而文献[12]则从极坐标相位谱图、矢量分析、矩阵分析等多个角度阐述了其测相机理,指出:给定  $2N-1$  个样点,  $N$  阶 apFFT 可测出

**基金项目:**国家自然科学基金(61271069)重点资助项目;国家重点基础研究发展计划(“九七三”计划)(2010CB327806)资助项目。

**收稿日期:**2011-10-24; **修订日期:**2012-09-17

中间样点的瞬时相位(即具有“相位不变性”<sup>[11]</sup>),实验表明:apFFT 测相方差至少比同阶数 FFT 测相方差低 2/3 以上<sup>[12]</sup>。众所周知,克拉美罗下限(Cramer-Rao lower bound, CRLB)是评判衡量参数估计算法的抗噪性能的客观尺度,为此文献[13]导出了频率、幅值、相位均未知情况下的相位估计方差的 CRLB。以此为参考,文献[10]推出了 apFFT 测相方差表达式,文献[10]的实验还验证了 apFFT 测相方差逼近文献[13]的 CRLB。

然而文献[10]考虑的测相情况还不全面(仅给出了 1 种频偏情况的测相及其仿真实验),而且文献[10]并没有充分论证文献[13]给出的 CRLB 能否适用于 apFFT 测相。本文指出,对于余弦信号测相问题,由于 apFFT 具有特殊的“相位不变性”(即无需估计频率即可估计相位),因而其测相参数估计模型相比于传统参数估计模型可作进一步简化,基于此导出了适合于 apFFT 测相的新的 CRLB。另外,针对存在不同频率偏离情况,本文还研究了 apFFT 测相误差与传统 FFT 测相误差的分布规律。

### 1 apFFT 相位测量及样点选取

“相位”与两个物理量紧密相连:频率和时间。工程上所测相位通常是指某频率成分在某时刻的瞬时相位。以信号  $x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$  为例,若采样频率为  $f_s$ ,样点间隔为  $T_s = 1/f_s$ ,则  $t = nT_s$  的样点值为  $x(n) = a \cdot \cos(2\pi f_0 nT_s + \theta_0)$ ,其瞬时相位为  $\phi(n) = 2\pi f_0 nT_s + \theta_0$ 。为测出瞬时相位,传统做法是采集  $N$  个样点  $x_n = x(nT_s), n = 0, 1, \dots, N-1$ ,先估计出频率  $f_0$  后,再估计起始样点  $n=0$  处的瞬时相位  $\phi(0) = \theta_0$ 。

apFFT 相位测量情况则不同。如图 1 所示<sup>[11]</sup>,输入  $2N-1$  个样点  $x(n), n \in [-N+1, N-1]$ ,首先用长为  $(2N-1)$  的卷积窗  $w_c$  对输入数据加权,然后将间隔为  $N$  的数据两两叠加(中间元素除外)形成数据  $y(0), y(-1), \dots, y(-N+1)$ ,再进行 FFT 即得到 apFFT 输出  $Y(k)$  及其振幅谱  $|Y(k)|$ ,直接取最大振幅谱  $k=k^*$  处的相角  $\varphi_Y(k^*)$  即为测相结果。

文献[11]已证明,对于  $\{x(n) = e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}\}, \omega_0 = \beta\Delta\omega$  ( $\beta$  可以是小数),  $\Delta\omega = 2\pi/N$ ,其传统 FFT 谱  $X(k)$  为

$$X(k) = e^{j[\theta_0 + (1-\frac{1}{N})(\beta-k)\pi]} \cdot \frac{\sin[(\beta-k)\pi]}{\sin[(\beta-k)\pi/N]}$$

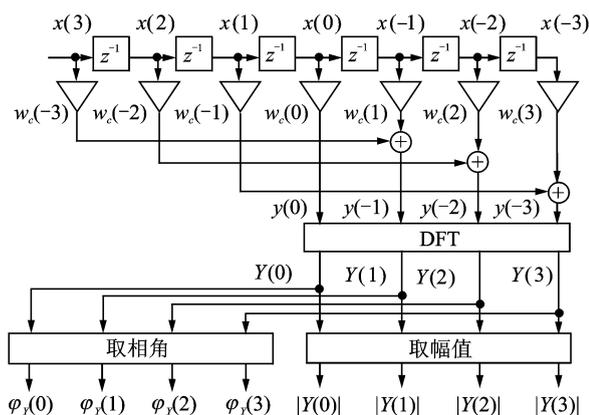


图 1 全相位 FFT 谱分析的基本框图(N=4)

$$k \in [0, N-1] \tag{1}$$

其阶数为  $N$  的无窗 apFFT 谱  $Y(k)$  为<sup>[10,14]</sup>

$$Y(k) = \frac{e^{j\theta_0} \sin^2[(\beta-k)\pi]}{\sin^2[(\beta-k)\pi/N]} \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

取其相位部分,故峰值谱  $k=k^*$  处(对应的频偏值为  $\delta = \beta - k^*$ )的相位值为

$$\begin{cases} \varphi_X(k^*) = \theta_0 + (1 - \frac{1}{N})(\beta - k^*)\pi \\ \varphi_Y(k^*) = \theta_0 \end{cases} \tag{3}$$

对于序列  $x(n) = a \cdot \cos(2\pi f_0 nT_s + \theta_0)$ ,存在两个边带谱,但由于 apFFT 可以很好地抑制谱泄漏,即两边带谱相互影响可忽略,故  $\varphi_Y(k^*) = \theta_0$  仍近似成立。

式(2)表明:apFFT 所测相位是中间样点(输入样点中第  $N$  个样点  $n=0$  处)的瞬时相位<sup>[15]</sup>。实际工程中,不一定输入样点序号  $n \in [-N+1, N-1]$ ,而是可能存在一段平移。然而不变的是,apFFT 所测的永远是中间样点的瞬时相位。如图 2 所示  $N=16$  的情形:

当输入为  $x_{-15} \sim x_{15}$  时,apFFT 所测的是中间样点  $x_0$  的瞬时相位;当输入为  $x_{-10} \sim x_{20}$  时,测出的则是中间样点  $x_5$  的瞬时相位。

需强调,在 apFFT 所测相位值是直接从峰值谱线上取出的,式(3)的测相表达式  $\varphi_Y(k^*)$  并不

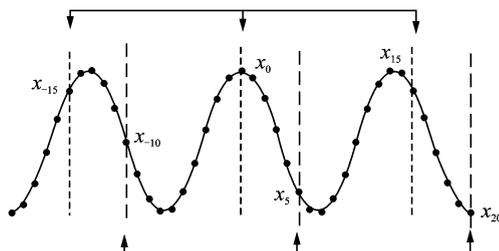


图 2 基于 apFFT 测相的样点选取(N=16)

像 FFT 测相表达式  $\varphi_X(k^*)$  那样需要利用频偏值  $\delta = \beta - k^*$  信息, 故其测相参数估计模型有望得到简化。

## 2 apFFT 测相参数模型及新的 CRLB

针对相位、幅值和频率 3 未知参数  $\alpha = [\theta_0, a, \omega_0]^T$  情况, Rife 首先在文献[14]中推导出复指数信号  $\{x(n) = a \cdot e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}\}$  相位估计的 CRLB, 而文献[13]曾针对高斯噪声干扰下的实信号情形, 即

$$s(n) = x(n) + w(n) = a \cdot \cos(\omega_0 n + \theta_0) + w(n) \quad (4)$$

推导出当噪声方差为  $\sigma^2$  时, 其相位估计克拉美罗限 CRLB<sub>3</sub> 为 ( $N$  为样点数)[13]

$$\text{CRLB}_3 = \frac{2(2N-1)}{N(N+1)\rho} \approx \frac{4}{N\rho} \quad (5)$$

式中  $\rho$  为信噪比  $a^2/(2\sigma^2)$ , 由于式(3)的 apFFT 测相表达式  $\varphi_Y(k^*)$  不依赖于频偏值  $\delta$ , 但依赖于幅值  $a$  (在测相中需搜索幅度谱峰值), 故其测相参数估计模型可以由三参数模型  $\alpha = [\theta_0, a, \omega_0]^T$  简化为两参数模型  $\alpha = [\theta_0, a]^T$ 。基于此模型可推导出适合于 apFFT 的克拉美罗下限 CRLB<sub>2</sub> 的表达式。

令  $M = 2N - 1$ , 可推出输入观测向量  $\mathbf{S} = [s_{-N+1}, \dots, s_0, \dots, s_{N-1}]^T$  的联合概率密度函数

$$f(\mathbf{S} | \alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{M}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=-N+1}^{N-1} (s_n - x_n)^2} \quad (6)$$

根据参数估计理论, 可导出  $2 \times 2$  的 Fisher 信息阵  $\mathbf{J}$  为

$$J_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial \ln f(\mathbf{S} | \alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (7)$$

由于  $x(n) = a \cdot \cos(\omega_0 n + \theta_0)$ , 故采用类似于文献[13]的推理, 式(7) 可进一步表示为

$$J_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial x_n}{\partial \theta_0} = -a \cdot \sin(\omega_0 n + \theta_0) \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial x_n}{\partial a} = \cos(\omega_0 n + \theta_0) \end{aligned} \quad (9)$$

将式(8,9)代入式(7)有

$$J_{11} = \frac{a^2}{\sigma^2} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sin^2(\omega_0 n + \theta_0) = \frac{a^2}{2\sigma^2} M \quad (10)$$

$$J_{12} = J_{21} = 0 \quad (11)$$

$$J_{22} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \cos^2(\omega_0 n + \theta_0) = \frac{M}{2\sigma^2} \quad (12)$$

故 Fisher 信息阵  $\mathbf{J}_{2 \times 2}$  可表示为对角阵形式

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} Ma^2 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (13)$$

易得出其逆矩阵为

$$\mathbf{J}^{-1} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 1/(Ma^2) & 0 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \quad (14)$$

从而 apFFT 测相方差的克拉美罗限 CRLB<sub>2</sub> 为

$$\text{CRLB}_2 = \frac{2\sigma^2}{M \cdot a^2} = \frac{1}{M(a^2/2\sigma^2)} = \frac{1}{M\rho} \quad (15)$$

任何 CRLB 只与耗费的样点长度和信噪比有关, 假定在同样信噪比下, 由于 apFFT 测相需耗费  $M = 2N - 1$  个样本, 故为便于比较, 式(5) CRLB<sub>3</sub> 表达式中的  $N$  需用  $2N - 1$  替代, 将式(15)除以式(5)可得

$$\frac{\text{CRLB}_2}{\text{CRLB}_3} = \frac{1}{(2N-1)\rho} \left/ \left( \frac{4}{(2N-1)\rho} \right) \right. = \frac{1}{4} \quad (16)$$

从式(16)可看出, 由于 apFFT 具有特殊的“相位不变性”, 其测相参数估计模型可简化为两参数模型, 其对应的克拉美罗限仅为传统三参数模型克拉美罗限的 1/4 (即对应差别  $20 \log_{10}(4) \approx 12$  dB)。

## 3 apFFT 测相误差与频偏分布关系

文献[10]导出的已得到实验验证的高斯白噪声干扰下的 apFFT 测相方差理论式为

$$\text{var}[\varphi_Y(k^*)] \approx \frac{4\sigma^2}{3Na^2 \text{sinc}^4(\delta)} = \frac{2}{\rho 3N \text{sinc}^4(\delta)} \quad (17)$$

从式(17)可看出, 虽然式(3)所示的 apFFT 测相表达式与式(15)所示的克拉美罗限均与频偏值  $\delta = \beta - k^*$  无关, 然而其测相误差却与  $\delta$  有关。

在离散谱中,  $|\delta| \in [0, 0.5]$ , 由于式(17)的  $\text{sinc}^4(\delta) = \text{sinc}^4(|\delta|)$  恰好是减函数, 因而式(17)的  $\text{var}[\varphi_Y(k^*)]$  为  $|\delta|$  的增函数, 即频偏  $|\delta|$  越大, 测相误差也越大。

图 3 给出  $x(n) = 2 \cdot \cos(\omega_0 n + \pi/3)$ ,  $\omega_0 = (3 + \delta)2\pi/N$ , 在频偏  $\delta$  取不同值时的 apFFT 振幅谱分析结果  $|Y(k)|$ 。

从图 3 可看出,  $\delta$  值越大, apFFT 的谱泄漏越大。众所周知, 谱泄漏是造成离散谱分析误差的根本原因, 不仅 FFT 谱分析如此, apFFT 谱分析也是如此。而文献[11,14]已证明, 在同样频偏下,

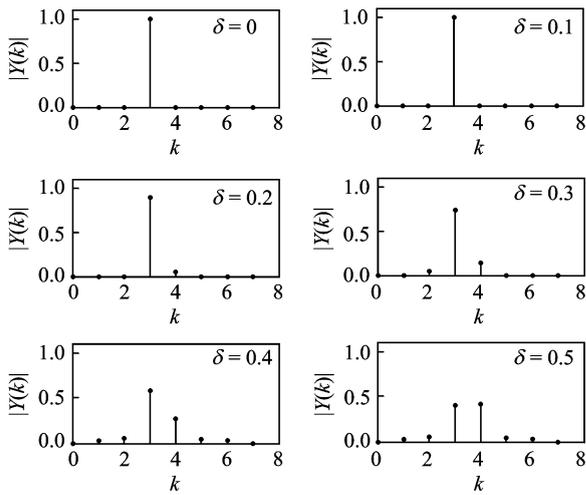


图 3 不同频偏情况下 apFFT 幅值谱

apFFT 谱泄漏远低于 FFT 谱,故 apFFT 测相精度远远高于 FFT 测相精度。

### 4 仿真实验

令谱分析阶数  $N=128$ ,  $x(n)=2 \cdot \cos(\omega_0 n + \pi/3)$ ,  $\omega_0=(32+\delta)2\pi/128$ , 分别采用无窗 apFFT 和第 1 类 FFT 时移相位差法(需对两时延量为  $N$  个样点的序列分别作 FFT 再求取其主谱线相位差,故所用数据  $2N$  个,详见文献[8])进行 2 000 次蒙特卡罗测相仿真。在不同频偏情况下( $\delta=0$ ,  $\delta=0.1$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\delta=0.3$ ,  $\delta=0.4$ ,  $\delta=0.5$ ),由 FFT

时移相位差法、apFFT 法所测得的相位方差及其理论方差(对式(17)的结果作  $20\log_{10}(\cdot)$  计算而得),以及三参数  $CRLB_3$  和本文献推导的两参数  $CRLB_2$  随信噪比( $SNR=20\log_{10}(\rho)$ )变化的曲线分别如图 4(a~f)所示。

观察图 4(a~f),可总结出如下规律与结论:

(1)不论是 FFT 还是 apFFT 测相,频偏值  $\delta$  越大,测相误差也越大,与对应  $CRLB$  相差越来越大。例如  $\delta=0$  和  $\delta=0.5$  时 apFFT 测相方差与  $CRLB_2$  间距分别为 2 dB 和 18 dB,而  $\delta=0$  和  $\delta=0.5$  时 FFT 时移测相方差与  $CRLB_3$  间距分别为 7.6 dB 和 30 dB。

(2)频偏  $\delta$  较小时( $\delta$  在 0.1~0.4 间),apFFT 测相方差低于传统  $CRLB_3$ ;频偏  $\delta$  较大时( $\delta > 0.4$ ),apFFT 测相方差高于  $CRLB_3$ 。但 apFFT 测相方差均高于本文推导的  $CRLB_2$ ,故  $CRLB_2$  才是真正适合于 apFFT 测相的克拉美罗限。文献[10]的仿真实验中,谱阶数  $N=128$ ,采样频率  $f_s=3\ 000$  Hz,信号频率  $f_0=759.47$  Hz,故其数字角频率  $\omega_0=2\pi f_0/f_s=(32+0.404)2\pi/128$ ,正好相对应于图 4(e)的  $\delta \approx 0.4$  情况,故片面地造成了 apFFT 测相方差被  $CRLB_3$  界定的假象。

(3)当  $\delta=[0,0.4]$  时,apFFT 实际测相方差曲线与其理论曲线吻合得很好,这证明式(17)推导出的理论式的正确性。

(4) $\delta=0.5$  时,apFFT 测相情况出现了门限

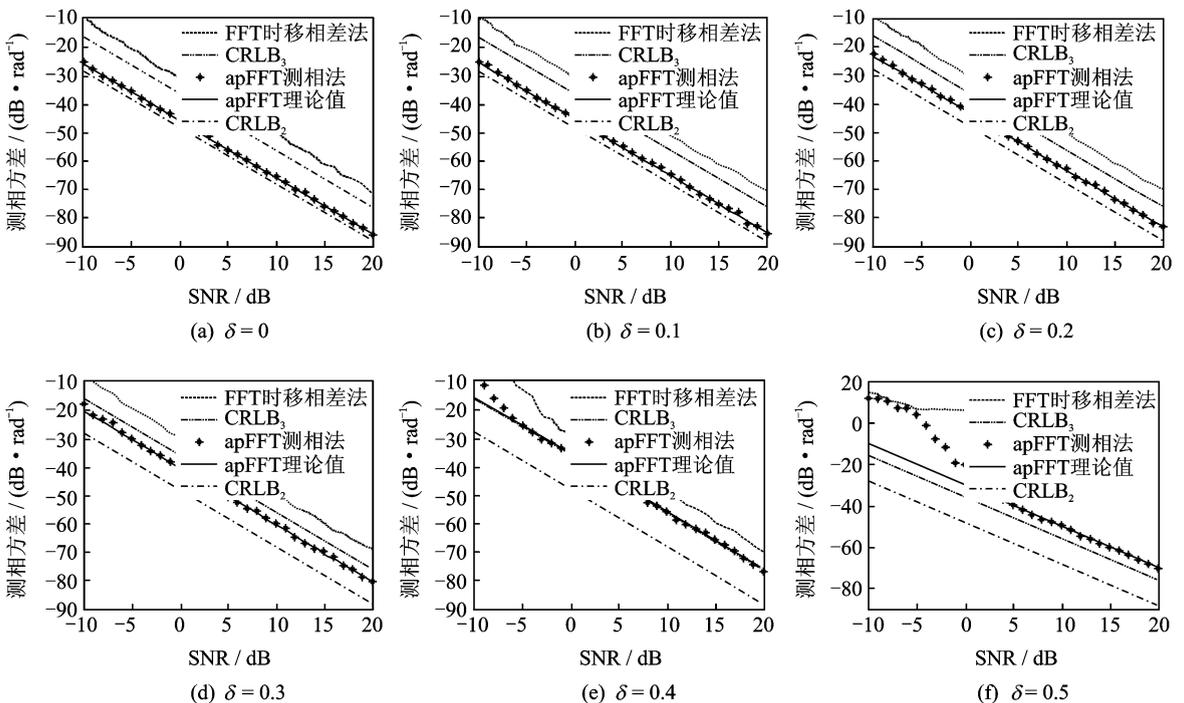


图 4 测相误差方差随信噪比及频偏值变化

效应,即  $\text{SNR} < 3 \text{ dB}$  时, apFFT 实际测相值与理论值出现较大偏离。结合图 3 中  $\delta = 0.5$  的谱图很好理解:大的频偏引起更严重的谱泄漏,使得无噪声时产生两根幅度相同的峰值谱线,故引入噪声后,会引起峰值谱搜索的不确定性,导致理论值产生较大偏离。

## 5 结束语

本文利用谱泄漏分布特征及其参数估计理论,成功推导出适用于 apFFT 测相的两未知参数克拉美罗下限  $\text{CRLB}_2$ 。通过仿真实验验证了在不同的信噪比环境和不同频偏情况下, apFFT 测相方差都能被  $\text{CRLB}_2$  所界定。新  $\text{CRLB}$  的提出对后续的测相改进研究有较强的理论指导意义。需注意的是,当频率偏离值  $\delta$  较低时, apFFT 测相方差与  $\text{CRLB}_2$  间距很近,故性能改进的空间不大;而  $\delta$  较高时, apFFT 测相方差与  $\text{CRLB}_2$  还有一段不可忽略的差距。因而如何提高大频偏下的 apFFT 测相性能是今后要进一步改进的工作。

### 参考文献:

- [1] Heydt G T, Field PS, Liu C C et al. Applications of the windowed FFT to electric power quality assessment[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1999, 14(4): 1411-1416.
- [2] Jia Chuan, Gao Xiaorong, Hong Bo, et al. Frequency and phase mixed coding in SSVEP-based brain-computer interface[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2011, 58(1): 200-206.
- [3] 刘海升,付志红,张淮清,等. 基于 Blackman-Harris 相位差校正信号谐波分析方法[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(4):468-472.  
Liu Haisheng, Fu Zhihong, Zhang Huaiqing, et al. Harmonic analysis based on Blackman-Harris window and phase difference correction[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2011, 26(4): 468-472.
- [4] Moon-Beom H, Pervan B. Carrier phase navigation architecture for shipboard relative GPS[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(2): 670-679.
- [5] 王凤鹏,邹万芳,尹真,等. 希尔伯特变换实时全息干涉条纹相位提取[J]. 光学工程, 2009, 36(4): 92-96.  
Wang Fengpeng, Zou Wanfang, Yin Zhen, et al. Phase extracting for real-time holographic interferometry fringe pattern based on Hilbert transform[J]. Opto-Electronic Engineering, 2009, 36(4): 92-96.
- [6] 梁志国,张大治,孙宇,等. 四参数正弦波曲线拟合的快速算法[J]. 计测技术, 2006, 26(1): 4-7.  
Liang Zhiguo, Zhang Dazhi, Sun Yu, et al. A fast arithmetic method of four-parameter sine wave curve-fit[J]. Measuring Technique, 2006, 26(1):4-7.
- [7] 丁康,钟舜聪. 通用的离散频谱相位差校正法[J]. 电子学报, 2003, 31(1): 142-145.  
Ding Kang, Zhong Shuncong. A universal phase difference correcting methods on discrete spectrum [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(1): 142-145.
- [8] 段虎明,秦树人,李宁. 离散频谱的校正方法综述[J]. 振动与冲击, 2007, 26(11): 138-144.  
Duan Huming, Qin Shuren, Li Ning. Review of correction methods for discrete spectrum[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(11): 138-144.
- [9] 齐国清. 利用 FFT 相位差校正信号频率和初相估计的误差分析[J]. 数据采集与处理, 2003, 18(1): 8-11.  
Qi Guoqing. Error analysis of frequency and phase estimations based on phase difference of segmented FFTs[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2003, 18(1): 8-11.
- [10] 黄翔东,王兆华. 全相位 FFT 相位测量法的抗噪性能[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(3): 286-291.  
Huang Xiangdong, Wang Zhaohua. Anti-noise performance of all-phase FFT phase measuring method [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2011, 26(3): 286-291.
- [11] Huang Xiangdong, Wang Zhaohua, Ren Limian, et al. A novel high-accuracy digitalized measuring phase method[C]//9th International Conference on Signal Processing Proceedings(ICSP 2008). Beijing, China: IEEE Press, 2008, 1:120-123.
- [12] 王兆华,黄翔东. 基于全相位谱分析的相位测量原理及其应用[J]. 数据采集与处理, 2009, 24(6): 777-782.  
Wang Zhaohua, Huang Xiangdong. Principal of phase measurement and its application based on all-phase spectral analysis[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2009, 24(6): 777-782.
- [13] 齐国清. 离散实正弦信号参数估计的 Cramer Rao 方差下限[J]. 数据采集与处理, 2003, 18(2): 151-155.  
Qi Guoqing. Cramer Rao bounds of real sinusoid parameter estimation from discrete-time observations

- [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2003, 18(2): 151-155.
- [14] Rife D, Boorstyn R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [15] Lu Jian, Qi Guoqing. Analysis of the influence of observation starting time on FFT-based phase estimation of sinusoid[C]// 2010 10th International Conference on Signal Processing Proceedings (ICSP 2010).

Beijing, China:[s. n.], 2010, 1: 26-29.

**作者简介:**黄翔东(1979-),男,副教授,研究方向:滤波器设计、频谱分析等, E-mail: xdhuang@tju.edu.cn; 王博(1989-),男,硕士研究生,研究方向:滤波器设计; 杜宇彬(1987-),男,硕士研究生,研究方向:滤波器设计; 王兆华(1937-),男,教授,博士生导师,研究方向:数字滤波器、频谱分析等。

