文章编号:1004-9037(2012)05-0521-07

# MISO 系统中上下行链路对偶性分析

张　瑞[1,2]　宋荣方[1,3]

(1. 南京邮电大学通信与信息工程学院,南京,210003;2. 河南工业大学信息科学与工程学院,郑州,450001;
3. 东南大学移动通信国家重点实验室,南京,210096)

**摘要**:TDD 系统中,利用上下行链路的对偶性可以将非凸的下行优化问题转换到上行链路,从而极大简化问题的分析和数值求解。上下行链路在波束成形和容量域两方面都存在对偶性。本文在统一的系统模型下,针对总功率约束和每天线功率约束两种情况,利用拉格朗日对偶法分别对波束成形对偶、容量域对偶做了推导、分析。此外,用凸优化软件包 CVX 简化了问题的建模。分析表明,上下行对偶等价于拉格朗日对偶,对偶问题可更一般地表示为极大极小问题。针对每天线功率约束下的波束成形问题,用迭代法和内点法分别对其进行了 MATLAB 仿真。仿真结果表明,非凸的下行优化问题可以利用对偶性转化为上行链路中的凸优化问题,从而得以解决。

**关键词**:时分双工;上行链路;下行链路;上下行对偶;凸优化;总功率约束

**中图分类号**:TN929.5　　　　**文献标识码**:A

# Duality of Uplink and Downlink Channels in MISO Systems

*Zhang Rui*[1,2], *Song Rongfang*[1,3]

(1. College of Telecommunications & Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, 210003, China;
2. College of Information Science & Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou, 450001, China;
3. National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing, 210096, China)

**Abstract**: The non-convex problems of the downlink channel can be transformed into the ones of the dual uplink channel in time division duplex (TDD) systems by uplink-downlink duality so that they are simplified and numerically traced. With Lagrangian duality, the duality on beamforming and capacity region under sum power constraint and per-antenna power constraint are deduced and analyzed, respectively. The software package convex (CVX) relevant to convex optimization is used to simplify the problem modeling. The analysis result shows that uplink-downlink duality is equivalent to Lagrangian duality. The min-max characterization is more general than uplink-downlink duality. The dual beamforming problem under per-antenna power constraint is simulated with MATLAB using the iterative algorithm and the interior point algorithm. Simulation results show that non-convex problems of the downlink channel can be resolved as a convex problem with uplink-downlink duality in the dual uplink channel.

**Key words**: time division duplex; uplink channel; downlink channel; uplink-downlink duality; convex optimization; sum power constraint

## 引　言

在时分双工(Time division duplex, TDD)系统中,由于其上、下行传输使用同一频率载波的不同时隙,上下行信道是互易的,即上行的信道矩阵是下行信道矩阵的共轭转置。对偶性基于上下行链路的互易性,是研究上下行链路相似性、容量及最

**基金项目**:国家自然科学基金(60972041)资助项目;东南大学移动通信国家重点实验室开放课题基金资助项目;江苏省高校自然科学基础研究计划(08KJD510001)重大资助项目;教育部博士点基金(20080293004)资助项目;国家重大专项(2009ZX03003-006)资助项目;国家重点基础研究发展计划("九七三"计划)(2007CB310607)资助项目;河南工业大学校科研基金(09XGG010)资助项目;普通高校研究生科研创新计划(CXLX11_0405, CX10B_187Z)资助项目;南京邮电大学攀登计划(NY210006)资助项目。

**收稿日期**:2011-08-10;**修订日期**:2011-12-01

优发送策略的有利工具，能极大地简化系统容量及可达容量域的数值计算。传统的总功率约束下，下行链路的容量域(或SINR域)等于相同总功率约束下的对偶上行信道的容量域(或SINR域)[1]，对偶上行链路的信道矩阵是下行链路信道矩阵的共轭转置，两者的噪声协方差矩阵相等。上下行对偶可以扩展到任意线性约束的广播信道[2-4]。文献[1]考虑了总功率约束下的容量域对偶，文献[2-4]考虑了多个线性协方差约束下的容量域对偶。文献[3]将总功率约束下的传统意义的上下行对偶扩展到有多个线性协方差约束的广义上下行对偶，用于解决多个线性协方差约束的下行信道容量计算问题。广义上下行对偶有更简单的表达形式。文献[5]讨论了每天线功率约束下下行功率最小化及可达容量最大化的对应的波束成形设计问题，但没有考虑总功率约束。上下行的对偶性也逐渐应用于多小区协作波束成形和容量计算中，常常可以通过对偶性得到分布式的算法。文献[6]证明了每基站功率约束下多小区上下行吞吐量对偶，文献[7]在文献[5]的基础上通过拉格朗日对偶分解，将基于每天线功率约束和每基站功率约束的多小区下行基站协作波束成形问题转换到对偶的上行链路中解决，找到了全局最优解，并得到一种分布式的算法，极大降低了回传反馈量。

但上述文献只考虑了对偶的某一方面或者只用到了某一种功率约束，而没有分析两个方面的内在联系。本文在统一的多输入单输出(Multiple input single output, MISO)系统模型下，在传统的总功率约束和更实际的每天线功率约束下，从波束成形对偶和容量域对偶两方面分别进行描述，分析其凸性，用凸优化中的拉格朗日对偶方法，将下行的非凸问题转换到上行解决。只要转化后的上行问题是凸的，算法收敛，则相当于对应的下行问题得到了解决。在解决对偶的上行问题时，用到了凸优化的专用软件包，简化了问题的建模。最后，针对每天线功率约束下的波束成形对偶问题，用迭代法和内点法分别对算法的收敛性进行了MATLAB仿真。

## 1 系统模型

容量域对偶可以自然地从波束成形对偶得到。本文先讨论波束成形对偶。

MISO下行链路(Downlink, DL)及其对偶MISO上行链路(Uplink, UL)信道模型如图1所示。设基站有$N$根发送天线，小区内共有$K$个用户，每个用户端单根天线。每个用户的接收信号表示为

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}_i \quad i = 1,\cdots,K \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_N]^{\mathrm{T}}$为$N\times 1$的发送信号；$\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}$为用户$i$的$N$维的信道矩阵，假设基站端和接收端均能获得准确的信道状态信息(Channel state information, CSI)信息。$\boldsymbol{y}_i$为接收信号向量。设噪声为服从$\boldsymbol{n}_i\sim\mathrm{CN}(0,\sigma^2\boldsymbol{I})$的独立同分布的加性高斯白噪声。

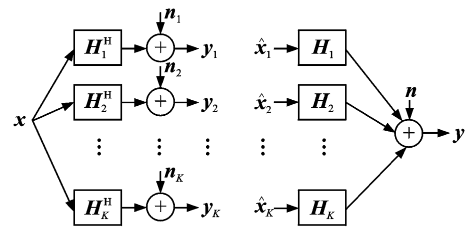


图1 MISO下行链路及其对偶的上行链路信道模型

对偶上行链路中，基站端的接收信号表示为

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{UL}} = \sum_{i=1}^{K}\boldsymbol{H}_i\hat{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{n} \tag{2}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{x}}_i\in\mathbf{C}$为上行的发送信号；$\boldsymbol{H}_i\in\mathbf{C}^{N\times 1}$为上行信道矩阵。

上行链路和下行链路有着本质的区别：对于UL，每个发送端有单独的功率约束，信号和干扰来自不同的发送端，从而有不同的信道增益；而对于DL，基站端只有一个总的功率约束，每个接收端的接收信号来自相同的信源，干扰和期望信号有相同的信道增益。下行、上行的总功率约束分别可以表示为

$$\begin{aligned}&\text{下行：}\quad E[\|\boldsymbol{x}\|^2]\leqslant P_{\mathrm{DL}}\\&\text{上行：}\quad \sum_{i=1}^{K}E[\|\boldsymbol{x}_i\|^2]\leqslant P_{\mathrm{UL}}\end{aligned} \tag{3}$$

MISO下行信道的SINR约束可以转换成二阶锥规划(Seoond-order cone program, SOCP)[4]，而这种方法不适合多输入多输出下行链路。当接收端有一根天线时，可以找到最优解，当有多根天线时，对偶性仍然存在，但是只能找到局部解[5]。在本文中，均假设接收端有一根天线。

## 2 波束成形对偶

波束成形设计即设计波束成形向量$\boldsymbol{w}_i$，使之在满足用户SINR约束的同时总功率或者每根发送天线的功率最小。

### 2.1 总功率约束

基于总功率约束的波束成形设计即设计波束

成形向量 $\boldsymbol{w}_i$，使之在满足每个用户 SINR 约束的同时最小化基站发送天线的总功率。

问题规划为

$$\begin{aligned}&\min \quad \alpha\sum_{i=1}^{K}\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i\\&\text{s.t.}\quad \frac{|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i|^2}{\sum_{j\neq i}|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2+\sigma^2}\geqslant\gamma_i\quad i=1,\cdots,K\end{aligned}\tag{4}$$

式(4)中，由于 SINR 约束的波束成形向量是耦合的(不但与本用户的波束成形向量有关，与其他用户的波束成形向量也有关)，该优化问题为非凸问题。利用拉格朗日对偶将式(4)转换到对偶的上行链路解决。

式(4)的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{w}_i,\lambda_i)&=\alpha\sum_{i=1}^{K}\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i-\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\Big[\frac{|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i|^2}{\gamma_i}-\\&\sum_{j\neq i}|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2-\sigma^2\Big]=\alpha\sum_{j=1}^{K}\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i-\\&\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\Big[\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i|^2-\sum_{j=1}^{K}|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2-\\&\sigma^2\Big]=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\sigma^2+\sum_{i=1}^{K}\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}}\Big(\alpha\boldsymbol{I}-\\&\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}+\sum_{j=1}^{K}\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\Big)\boldsymbol{w}_i\end{aligned}\tag{5}$$

对偶函数为

$$g(\lambda_i)=\min_{\boldsymbol{w}_i}L(\boldsymbol{w}_i,\lambda_i)\tag{6}$$

显然，若 $\alpha\boldsymbol{I}-\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}+\sum_{j=1}^{K}\lambda_i|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2$ 为非正定矩阵，则存在 $\boldsymbol{w}_i$ 使 $g(\lambda_i)=-\infty$。故式(4)的拉格朗日对偶函数为

$$\begin{aligned}&\max\ \sum_{i=1}^{K}\lambda_i\sigma^2\\&\text{s.t.}\quad \Sigma_i\succeq\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\end{aligned}\tag{7}$$

式中：$\Sigma_i=\alpha\boldsymbol{I}+\sum_{j=1}^{K}\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}$，$\succeq$ 表示矩阵元素间大于等于。

下行问题式(4)可以通过求解如下上行问题式(8)来解决

$$\begin{aligned}&\min\ \sum_{i=1}^{K}\lambda_i\sigma^2\\&\text{s.t.}\quad \frac{\lambda_i\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2}{\sum_{j\neq i}\lambda_j\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_j|^2+\alpha\sigma^2\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{w}}_i}\geqslant\gamma_i\end{aligned}\tag{8}$$

可以证明，式(8)和式(7)等价。证明如下：

上行链路中，最大化基站端 SINR 的最优的接收波束成形向量为最小均方误差(Minimum mean square error，MMSE)接收，可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{w}}_i=\Big(\sum_{j=1}^{K}\lambda_j\sigma^2\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{H}_j^{\mathrm{H}}+\alpha\sigma^2\boldsymbol{I}\Big)^{\dagger}\boldsymbol{H}_i\tag{9}$$

将式(9)代入式(8)的 SINR 约束，可将该 SINR 约束表示为

$$\alpha\boldsymbol{I}+\sum_{j=1}^{K}\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\preceq\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\tag{10}$$

式中 $\preceq$ 表示矩阵元素间小于等于。

故式(8)可以表示为

$$\begin{aligned}&\min\ \sum_{i=1}^{K}\lambda_i\sigma^2\\&\text{满足}\ \Sigma_i\preceq\Big(1+\frac{1}{\gamma_i}\Big)\lambda_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\end{aligned}\tag{11}$$

比较式(11)和式(7)，可以发现，将式(7)恒等变形，最大用最小代替，同时将 SINR 约束反向，即用 $\succeq$ 代替 $\preceq$，式(7)即为式(11)。

式(8)中目标函数为线性，SINR 约束中的变量已经解耦，可以用迭代的方法解决[8]。

最优的 $\hat{\boldsymbol{w}}_i$ 为最大化 SINR 的最优的接收波束成形向量，即 MMSE 滤波器，表达式为

$$\hat{\boldsymbol{w}}_i=\Big(\sum_{j=1}^{K}\lambda_j\sigma^2\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{H}_j^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{Q}\Big)^{\dagger}\boldsymbol{H}_i\tag{12}$$

式中 $(\cdot)^{\dagger}$ 表示矩阵的伪逆。

最优的波束成形向量 $\hat{\boldsymbol{w}}_i$ 和下行优化问题式(4)的最优波束成形向量 $\boldsymbol{w}_i$ 之间存在简单的加权关系[5]

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{w}_i=\sqrt{\delta_i}\,\hat{\boldsymbol{w}}_i\\&[\delta_1,\cdots,\delta_K]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{l}\sigma^2\\&\boldsymbol{G}_{i,j}=\begin{cases}\boldsymbol{G}_{ii}=\dfrac{1}{\gamma_i}|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2 & i=j\\ \boldsymbol{G}_{ij}=-|\hat{\boldsymbol{w}}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2 & i\neq j\end{cases}\end{aligned}\tag{13}$$

## 2.2　每天线功率约束

基于每天线功率约束的波束成形设计即设计波束成形向量 $\boldsymbol{w}_i$，使之在满足每个用户 SINR 约束的同时最小化每根发送天线的功率。每天线功率约束可以表示为 $|\boldsymbol{x}_i|^2\leqslant P_i$，$i=1,\cdots,N$；$P_i$ 为发送天线 $i$ 的最大发送功率。

则问题规划为

$$\begin{aligned}&\min\ \alpha\\&\text{满足}\ E|\boldsymbol{x}_i|^2\leqslant\alpha P_i,\quad\forall\ i\\&\mathrm{SINR}_i\geqslant\gamma_i,\quad\forall\ i\end{aligned}\tag{14}$$

式中：$\alpha$ 为功率加权因子；$\gamma_1,\cdots,\gamma_K$ 为各用户的

SINR 门限；$P_1,\cdots,P_N$ 为给定的对应发送天线的最大功率。

为了更加直观，式(14)可以等效地表达为

$$\begin{aligned}&\min\ \alpha\sum_{i=1}^{N}P_i\\&\text{s.t.}\quad\Big[\sum_{j=1}^{K}\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{w}_j^{\mathrm{H}}\Big]_{i,i}\leqslant\alpha P_i,\quad\forall\ i\\&\qquad\frac{|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i|^2}{\sum\limits_{j\neq i}|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2+\sigma^2}\geqslant\gamma_i,\quad\forall\ i\end{aligned}\tag{15}$$

式中$[\cdot]_{i,i}$表示矩阵的$(i,i)$个元素。式(15)中第 1 个约束条件为每天线功率约束，优化变量为 $\alpha$ 和 $\boldsymbol{w}_i$；$\gamma_i$，$P_i$ 和 $\boldsymbol{H}_i$ 固定。由凸优化理论可知，优化问题由于式(15)第 2 个约束条件中优化变量的耦合，不是一个凸优化问题，不能直接解决。

在对偶的上行链路中，每个发送端单根天线，接收端多根天线。接收波束成形的设计问题是联合优化每个发送端的功率约束 $\hat{P}_i=|\hat{x}_i|^2$ 和接收波束成形向量 $\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}$ 使之满足一系列的 SINR 约束 $\gamma_i$。令 $\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}$ 为上行链路的接收噪声协方差矩阵。则上行优化问题表示为

$$\begin{aligned}&\min\ \sum_i\hat{P}_i\\&\text{s.t.}\quad\frac{\hat{P}_i|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2}{\sum\limits_{j\neq i}\hat{P}_j|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_j|^2+\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}\hat{\boldsymbol{w}}_i}\geqslant\gamma_i\end{aligned}\tag{16}$$

式(15)的拉格朗日对偶为以下的极大极小问题(推导类似总功率约束下的波束成形对偶)

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{Q}}\ \min_{\lambda_i,\hat{\boldsymbol{w}}_i}\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\sigma^2\\&\text{s.t.}\quad\frac{\lambda_i\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2}{\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_j|^2+\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\sigma^2\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{w}}_i}\geqslant\gamma_i\\&\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}\,\Phi)\leqslant\mathrm{tr}(\Phi),\boldsymbol{Q}\geq 0\end{aligned}\tag{17}$$

式中：$\Phi=\mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_K)$为对角矩阵，对角元素为每根天线的功率；$\lambda_i$ 为 SINR 约束的对偶变量(即拉格朗日乘子)；$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_K)$为下行问题式(15)中每根天线功率约束的对偶变量组成的对角阵。

将式(17)与式(16)对比，可以发现，令式(16)中的 $\hat{P}_i=\lambda_i\sigma^2$，$\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}=\sigma^2\boldsymbol{Q}$，则式(16)与式(17)等价。即：每天线功率约束$(P_1,\cdots,P_N)$下的最优下行波束成形问题式(15)可以通过 SINR 约束不变、噪声不确定的对偶的上行信道解决。

极大极小问题通常可以通过在最大化和最小化之间迭代解决。但是，这种方法的收敛性很难确定。对于本文的优化问题，收敛性是非常必要的。观察式(17)，目标函数是线性的，SINR 约束是非耦合的，功率约束是线性的，问题为凸优化问题。可以通过标准的凸优化方法如内点法[9]解决。

## 3 容量域对偶

相同的总功率约束下，高斯 DL 的容量域等于对偶的高斯 UL 的容量域，即高斯 DL 的容量等于对偶的高斯 UL 在每个单独功率约束下的容量域的并集，这些单独功率约束加起来等于总的功率约束。UL 容量域等于对偶的 DL 容量域的交集。

### 3.1 总功率约束

MISO DL 的可达总速率域可由脏纸编码得到[10-11]，为了便于理解，设噪声均值为 0，方差为单位矩阵。下行的容量域表达式可以表示为

$$\begin{aligned}&C_{\mathrm{DL}}(\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{H}},\cdots,\boldsymbol{H}_K^{\mathrm{H}},P)=\\&\max_{\{\Sigma_i\}_{i=1}^{K}:\Sigma_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{K}\mathrm{tr}(\Sigma_i)\leqslant P}\log|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{H}}\Sigma_1\boldsymbol{H}_1|+\\&\log\frac{|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{H}}(\Sigma_1+\Sigma_2)\boldsymbol{H}_2|}{|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{H}}\Sigma_1\boldsymbol{H}_2|}+\cdots+\\&\log\frac{|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_K^{\mathrm{H}}(\Sigma_1+\cdots+\Sigma_K)\boldsymbol{H}_K|}{|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_K^{\mathrm{H}}(\Sigma_1+\cdots+\Sigma_{K-1})\boldsymbol{H}_K|}\end{aligned}\tag{18}$$

式中：$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_K$ 为下行的协方差矩阵，$\Sigma_i=E(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}})$，为 $N\times N$ 维的半正定矩阵。$\sum\limits_{i=1}^{K}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_i)\leqslant P$ 为总功率约束。优化问题式(18)是基于下行协方差矩阵的最大化，关键是找到能取得最大值对应的协方差矩阵。显然，式(18)不是$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_K$ 的凸函数，找到式(18)的数值解非常困难。

MISO DL 的总容量等于对偶 MISO UL 的总容量[10]，即

$$C_{\mathrm{DL}}(\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{H}},\cdots,\boldsymbol{H}_K^{\mathrm{H}},P)=C_{\mathrm{UL}}(\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_K,P)\tag{19}$$

$C_{\mathrm{UL}}(\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_K,P)$表示为

$$C_{\mathrm{UL}}(\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_K,P)=\max_{\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=1}^{K}:\boldsymbol{S}_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{K}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_i)\leqslant P}\log\Big|\boldsymbol{I}+\sum_{i=1}^{K}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\Big|\tag{20}$$

式中，半正定矩阵 $\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_K$ 为上行的发送协方差矩阵，$\boldsymbol{S}_i=E(\hat{\boldsymbol{x}}_i\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{H}})$，$\sum\limits_{i=1}^{K}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_i)\leqslant P$ 为总功率约束。

显然，式(20)是协方差矩阵的凹函数。在保证

对偶的上下行链路在相同的总功率约束下取得相同总速率的前提下，上行协方差矩阵可以转换为下行协方差矩阵（即由 $\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_K$ 转换为 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_K$）[11]。所以，找到式(20)的所对应的 $\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_K$，然后按照转换公式即可找到 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_K$，式(20)即可解决。式(20)可以通过总功率注水[12]解决。

若噪声方差不是单位矩阵，则对偶上行容量表达式为

$$C_{\mathrm{UL}}(\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_K,P)=\max_{\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=1}^K:\boldsymbol{S}_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^K \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_i)\leqslant P} \log\frac{\left|\sum_{i=1}^K \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{S}_z\right|}{|\boldsymbol{S}_z|} \tag{21}$$

该函数为 $\boldsymbol{S}_i$ 的凹函数，功率约束为凸函数。所以优化问题可以用凸优化的方法解决[9]。

### 3.2　每天线功率约束

使用 DPC 编码时，式(15)中的下行 SINR 约束变为

$$\frac{|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_i|^2}{\sum_{j>i}|\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_j|^2+\sigma^2}\geqslant\gamma_i,\ \forall\ i \tag{22}$$

式(17)中对偶的 SINR 表示为

$$\frac{\lambda_i\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_i|^2}{\sum_{j>i}\lambda_j\sigma^2|\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_j|^2+\hat{\boldsymbol{w}}_i^{\mathrm{H}}\sigma^2\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{w}}_i}\geqslant\gamma_i,\ \forall\ i \tag{23}$$

设 $\boldsymbol{S}_i$ 为用户 $i$ 在对偶上行链路中的发送协方差矩阵，$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_K\geqslant 0$ 为容量域不同边界点的权重，对偶的容量域问题为

$$\begin{aligned}\min_{\hat{\boldsymbol{Q}}}\ \max_{\boldsymbol{S}_i}\ &\sum_{k=1}^K\mu_k\log\frac{\left|\sum_{i=1}^k \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}+\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}\right|}{\left|\sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{H}}+\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}\right|}\\ \text{s.t.}\quad &\sum_{i=1}^K\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_i)\leqslant\mathrm{tr}(\Phi)\\ &\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{Q}}\,\Phi)\leqslant\mathrm{tr}(\Phi)\\ &\boldsymbol{S}_i\succeq 0,\ \hat{\boldsymbol{Q}}\succeq 0\end{aligned} \tag{24}$$

该对偶问题为发送协方差矩阵 $\boldsymbol{S}_i$ 的凹函数，$\hat{\boldsymbol{Q}}$ 的凸函数，可用凸优化的方法解决，比如内点法[5]。极大简化了原下行链路容量域的计算问题。

每天线功率约束 $(P_1,\cdots,P_K)$ 下的下行链路容量域等于总功率约束 $\sum_{i=1}^N P_i$ 下的对偶上行链路的容量域，该对偶上行链路噪声不唯一，噪声协方差矩阵 $\sigma^2\hat{\boldsymbol{Q}}$ 为对角矩阵，满足 $\sum_{i=1}^N\hat{\boldsymbol{Q}}_{ii}P_i\leqslant\sum_{i=1}^N P_i$，即 $\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{Q}}\,\Phi)\leqslant\mathrm{tr}(\Phi)$。容量域的对偶性对于任意数目的发送、接收天线均成立。

## 4　优化工具软件包

如果一个问题最终转化为凸优化问题，理论上可以说这个问题已经得到解决。在利用上下行对偶解决波束成形或者容量域问题时，往往需要判断问题是不是凸优化问题，怎样转化并解决凸优化问题，并保证算法的收敛性。YALMIP[13]，SeDuMi[14]，CVX[15]是常用的 3 个专门的 MATLAB 优化工具软件包，下面对 CVX 做简单介绍。

CVX 是 Michael Grant 和 Stephen Boyd 设计的专门解决规范凸规划(Disciplined convex programming，DCP)问题的建模系统，可以解决标准的线性规划(LP)，二次规划(QP)，二阶锥规划(SOCP)以及半定规划问题(SDP)。与直接解决这些问题相比，CVX 可以极大简化问题的描述。并且，CVX 还可以解决很多非可微问题。使用 CVX 的关键是将凸优化问题写成符合 CVX 规则的表达形式，一旦 CVX 接受了该表达式，将自动解决优化问题，并给出目标函数的最优值以及问题的求解状态。

## 5　算法收敛性仿真

基于上下行链路之间对偶性能的描述、推导，对每天线功率约束下的波束成形对偶进行 MATLAB 仿真。假设下行信道中，基站天线 $N=5$，小区中有 5 个单天线的用户，即 $K=5$。假设基站总功率为 1 W。利用上下行对偶，通过解决式(16)，从而使式(15)得到解决。只要式(15)是凸问题，算法收敛，即得到了最优的 $\hat{\boldsymbol{w}}_i$ 和 $\boldsymbol{w}_i$，问题即可解决。故本文仿真算法的收敛性。

首先通过定点迭代[10]得到 $\lambda_i$，然后用子梯度映射法[2]，迭代地找到 $\boldsymbol{Q}$，根据式(9)表示出 $\hat{\boldsymbol{w}}_i$，从而得到最优的 $\boldsymbol{w}_i$。由图 2 可以看出，该算法是收敛

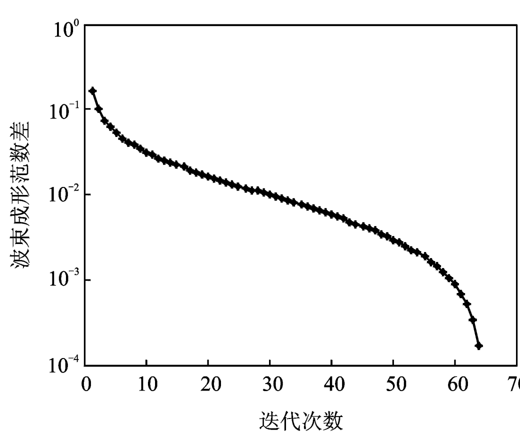


图 2　迭代法的收敛性能

的。由图 3 可以看出，算法的收敛速度随着 SINR 目标 $\gamma_i$ 的增大而变慢。由于迭代方法比较复杂，故也可以调用 CVX 函数包用内点法[9]解决。由图 4 可以看出，虽然该方法简单，但是该算法的收敛性比迭代方法快。由图 5 可以发现，随着 SINR 目标的增大，所需要的总功率以及用户天线发射功率都增大。

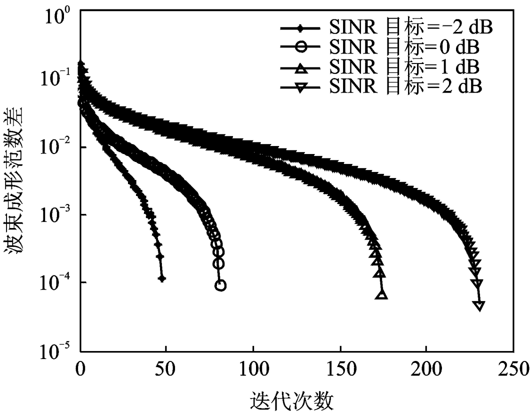


图 3　不同 SINR 目标下的收敛性能比较

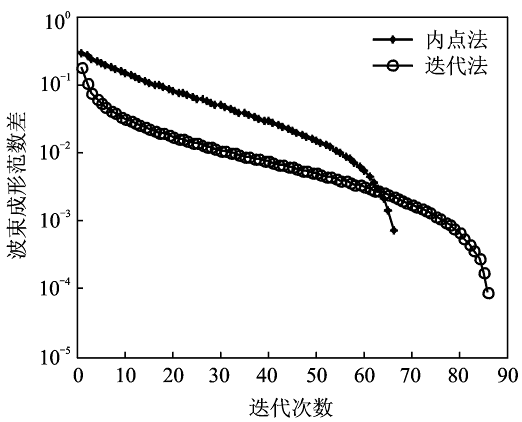


图 4　精度差范数-迭代次数关系曲线

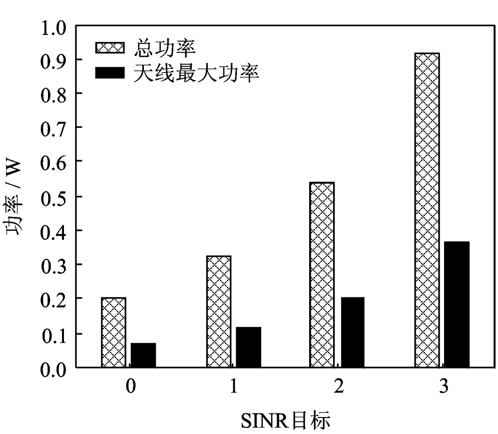


图 5　总功率与每天线最大功率——SINR 目标关系曲线

## 6　结　　论

本文利用拉格朗日对偶法对单小区 MISO 系统中上下行链路的对偶性做了全面的分析、推导。上下行链路在波束成形和容量域两方面都存在对偶性。分析表明，总功率约束下，下行的容量域（或 SINR 域）等于相同总功率约束下的对偶上行的容量域（或 SINR 域）。两种约束下的波束成形问题均可以通过拉格朗日对偶转换为噪声不确定的对偶上行问题，其中，与 SINR 约束对应的对偶变量与上行的用户发送功率有关，而与功率约束对应的对偶变量与对偶上行的噪声协方差矩阵有关。上下行对偶等价于拉格朗日对偶。然而在一般的非线性的凸约束条件下，对偶性将不再存在，但仍存在拉格朗日对偶。上下行对偶的不同表示均可归类为拉格朗日对偶问题。拉格朗日对偶问题在凸优化中常转化为极大极小问题。对偶性能极大简化 TDD 系统的容量及可达容量域的数值计算，是研究上下行链路相似性、容量及最优发送策略的非常有利的工具。研究多小区协作情况下的上下行链路的对偶性并将其用于多小区协作的分布式算法是今后进一步研究的方向。

**参考文献：**

[1] Jindal N, Vishwanath S, Goldsmith A. On the duality of Gaussian multiple-access and broadcast channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004,50(5):768-783.

[2] Yu W. Uplink-downlink duality via minimax duality [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,52(2):361-374.

[3] Zhang Lan, Zhang Rui, Liang Yingchang, et al. On Gaussian MIMO BC-MAC duality with multiple transmit covariance constraints [C]//ISIT 2009. Seoul, Korea: [s. n. ], 2009:2502-2506.

[4] Wiesel A, Eldar Y C, Shamai S. Linear precoding via conic optimization for fixed MIMO receivers[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54 (1):161-176.

[5] Yu W, Lan Tian. Transmitter optimization for the multi-antenna downlink with per-antenna power constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007,55(6):2646-2660.

[6] Yang J, Kim D K. Multi-cell uplink-downlink beamforming throughput duality based on lagrangian duality with per-base station power constraints [J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12 (4): 277-279.

[7] Dahrouj H, Yu W. Coordinated beamforming for the multicell multi-antenna wireless system[J]. IEEE

Transactions on Wireless Communications，2010，9(5)：1748-1759.

[8] Visotsky E，Madhow U. Optimal beamforming using transmit antenna arrays［C］//IEEE Vehicle Technology Conference. Houston，TX：［s. n.］，1999(1)：851-856.

[9] Boyd S，Vandenberghe L. Convex optimization［M］. Cambridge，U K：Cambridge Univ Press，2004.

[10] Vishwanath S，Jindal N，Goldsmith A. Duality，achievable rates，and sum-rate capacity of MIMO broadcast channels［J］. IEEE Transactions on Information Theory，2003，49(10)：2658-2668.

[11] Yu W，Cioffi J M. Sum capacity of a Gaussian vector broadcast channels［J］. IEEE Transactions on Information Theory，2004，50(9)：1875-1892.

[12] Jindal N，Rhee W，Vishwanath S，et al. Sum power iterative water-filling for multi-antenna Gaussian broadcast channels［J］. IEEE Transactions on Information Theory，2005，51(4)：1570-1580.

[13] Löfberg J. YALMIP：A toolbox for modeling and optimization in MATLAB［C］//2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design. Taipei：［s. n.］，2004.

[14] Sturm J F. Using SEDUMI 1.02，a MATLAB toolbox for optimizations over symmetric cones［J］. Optimization Methods and Software，1999，12：625-653.

[15] Grant M，Boyd S. CVX Users' Guide for CVX version 1.2［EB/OL］. http://www.stanford.edu/~boyd/cvx/，［2009-11-02］/［2010-12-15］.

**作者简介**：张瑞（1981-），女，博士研究生，研究方向：多点协作技术、干扰协调、联合处理及资源分配等，E-mail：windflowers_zr@yahoo.com.cn；宋荣方（1964-），男，教授，博士生导师，研究方向：宽带无线通信理论与技术。