

文章编号:1004-9037(2012)02-0202-08

# 基于正则化约束最小二乘的稳健频率不变波束形成器设计方法

李 静 陈华伟

(南京航空航天大学电子信息工程学院,南京,210016)

**摘要:**频率不变波束形成器(Frequency invariant beamformer, FIB)在无畸变宽带声信号采集等方面具有重要应用。经典的FIB设计方法通常是在理想的模型条件下提出的,当存在由麦克风的幅度和相位响应不一致性所引起的阵列通道失配误差时,其性能会变差,无法满足实际的设计要求。本文提出了一种基于正则化约束最小二乘的稳健FIB设计方法,有效克服了麦克风阵列通道失配误差对FIB设计性能的影响。该方法适用于任意结构的阵列,并且具有闭式解,无需迭代步骤,计算复杂度较低。仿真实例证明了所提方法的有效性和理论分析的正确性。

**关键词:**波束形成;稳健性;约束最小二乘;正则化

中图分类号:TN911.7

文献标识码:A

## Robust FIB Design Using Regularized Constrained Least Squares

*Li Jing, Chen Huarwei*

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics

& Astronautics, Nanjing, 210016, China)

**Abstract:** The frequency invariant beamformer (FIB) has important applications in distortionless acoustic signal acquisition. Conventional FIB design approaches are usually proposed with ideal microphone array models. Since there is no gain and phase mismatch in microphone array characteristic, the performance of conventional FIBs degrade in practical applications. Therefore, a robust FIB design approach based on regularized constrained least squares is presented. It can work well in the presence of microphone mismatches. The proposed approach is applicable to arbitrary array geometries, and it has a closed-form solution, thus avoiding iterative computation and leading to a lower computational complexity in design. Several design examples are presented to verify the effectiveness of the proposed approach and the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** beamforming; robustness; constrained least squares; regularization

## 引 言

麦克风阵列波束形成技术在高性能声信号采集、声源定位等领域具有广泛的应用<sup>[1]</sup>。波束形成技术利用了声场的空间信息,即所谓的空域滤波,因而能够获得比单麦克风系统更为优越的性能。对于经典的波束形成方法,如延迟-求和波束形成,其空间响应的主瓣宽度随信号频率的增大而减小,因此往往会导致由低通滤波效应所造成的信号畸

变<sup>[1]</sup>。为了实现宽带信号的无失真获取,频率不变波束形成器(Frequency-invariant beamformer, FIB)设计近年来引起了人们的重视<sup>[2-7]</sup>。所谓FIB是指空间响应不随频率变化的波束形成器,在整个通带频率范围内主瓣的宽度保持恒定。目前,已提出的典型FIB设计方法有基于特殊阵列结构的方法<sup>[2-3]</sup>、凸优化方法<sup>[4-5]</sup>、最小二乘法<sup>[6-7]</sup>等。

值得注意的是,现有的FIB设计方法大都是基于理想的麦克风特性提出的,没有考虑麦克风阵列存在的通道失配误差。而实际应用中,麦克风的响

应特性不可避免的会存在幅度和相位不一致的问题<sup>[8-9]</sup>,而且研究表明,麦克风的响应特性还会随时间的推移而发生变化<sup>[8]</sup>。正如本文的结果所表明,当麦克风通道失配误差存在时,基于理想阵列模型的FIB设计方法的性能会变差,无法满足实际的设计要求。也就是说,基于理想模型的FIB设计对阵列通道失配误差较为敏感。因此,为了麦克风阵列的实际工程应用,稳健的FIB设计值得进一步深入研究。值得注意的是,近年来提出的稳健波束形成器设计方法<sup>[8-9]</sup>需要预先设定一个常数期望响应值。这些方法存在的问题是,波束形成器空间响应的频率不变性能将受到预先设定的期望响应值的影响。当预先设定的期望响应值选择不合适时,设计得到的波束形成器空间响应的频率不变性能将变差。为了克服目前稳健波束形成器设计的这一缺点,本文提出了一种基于正则化约束最小二乘的稳健FIB设计方法,并且利用参考频率上的波束形成器响应作为其期望响应,充分利用了波束形成器的设计自由度。

## 1 阵列数学模型

不失一般性,考虑一个由  $M$  个麦克风组成的宽带线阵列。这里,采用滤波一求和的宽带波束形成器结构,即每个麦克风阵元后接一个  $L$  阶FIR滤波器,然后对  $M$  个通道求和,从而得到波束形成器输出。记  $\mathbf{w}_m = [\tau_{m,0}, \tau_{m,1}, \dots, \tau_{m,L-1}]^T$  为第  $m$  个通道的FIR滤波器权向量,则波束形成器的权向量为  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_0^T, \mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_{M-1}^T]^T \in \mathbf{R}^{ML \times 1}$ ,其中,  $(\cdot)^T$  表示矩阵转置。

理想情况下,宽带波束形成器的响应可表示为

$$P(\omega, \theta) = \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\omega, \theta) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{g}(\omega, \theta)$  为理想条件下的麦克风阵列导向矢量,可以表示成

$$\mathbf{g}(\omega, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(\omega) e^{-j\omega\tau_0(\theta)} \\ \mathbf{e}(\omega) e^{-j\omega\tau_1(\theta)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}(\omega) e^{-j\omega\tau_{M-1}(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{e}(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(L-1)\omega}]^T$ , 且第  $m$  个阵元信号与参考点处信号之间的时间延时(本文将线阵的中心选作参考点)  $\tau_m(\theta) = \frac{d_m f_s \cos\theta}{c}$ ;  $c \approx 340$  m/s 为空气声速;  $f_s$  为信号采样频率;  $d_m$  为第  $m$  个阵元与线阵中心点之间的距离。

下面考虑存在麦克风通道失配误差情况下阵列数学模型。记  $A_m(\omega, \theta) = a_m(\omega, \theta) e^{-j\varphi_m(\omega, \theta)}$  为第  $m$

个麦克风的响应特性,  $a_m(\omega, \theta)$  和  $\varphi_m(\omega, \theta)$  分别表示其幅度和相位响应。则存在阵列失配误差情况下的导向矢量为

$$\bar{\mathbf{g}}(\omega, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(\omega) A_0(\omega, \theta) e^{-j\omega\tau_0(\theta)} \\ \mathbf{e}(\omega) A_1(\omega, \theta) e^{-j\omega\tau_1(\theta)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}(\omega) A_{M-1}(\omega, \theta) e^{-j\omega\tau_{M-1}(\theta)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)又可记为

$$\bar{\mathbf{g}}(\omega, \theta) = \mathbf{A}(\omega, \theta) \cdot \mathbf{g}(\omega, \theta) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{A}(\omega, \theta) = \mathbf{I}_{L \times L} \otimes \text{diag}[A_0(\omega, \theta), \dots, A_{M-1}(\omega, \theta)]$  为描述麦克风阵元特性的  $ML \times ML$  维对角矩阵。这里,  $\mathbf{I}_{L \times L}$  是  $L \times L$  维的单位阵,  $\otimes$  为矩阵Kronecker积,  $\text{diag}[\cdot]$  表示对角阵。

## 2 约束最小二乘FIB设计方法

为便于下文分析,这里简要介绍约束最小二乘FIB设计方法<sup>[7]</sup>。该方法基于文献[4]所提出的空间响应变化(Spatial response variation, SRV)的概念。假设麦克风阵列无误差存在,即  $A_m(\omega, \theta) = 1$ 。约束最小二乘FIB设计方法采用的代价函数定义为

$$J_{\text{cls}}(\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \mathbf{g}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\omega_r, \theta_r)|^2 + \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \mathbf{g}(\omega_r, \theta_m)|^2 \quad (5)$$

式中:  $\omega_r$  为预先定义的参考频率,  $N$  和  $K$  分别是笔者感兴趣的频带和整个空间范围内的均匀离散点数,  $\Theta_s$  表示旁瓣区域,  $\beta$  为控制频率不变特性和旁瓣级之间折衷的参数。

基于约束最小二乘的FIB设计问题可表示为

$$\min_{\mathbf{w}} J_{\text{cls}}(\mathbf{w}) \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{g}(\omega_r, \theta_r) = 1 \quad (6)$$

这里的约束是保证在参考频率  $\omega_r$  和参考方向  $\theta_r$  上的波束响应为1。为实现方便,式(6)可进一步化简为只含实值运算的优化问题

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\text{cls}} \mathbf{w} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{Q}_{\text{cls}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re}\{[\mathbf{g}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}(\omega_r, \theta_k)] \times [\mathbf{g}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}(\omega_r, \theta_k)]^H\} + \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} \text{Re}\{\mathbf{g}(\omega_r, \theta_k) \mathbf{g}^H(\omega_r, \theta_m)\} \quad (8)$$

$$\mathbf{C} = [\text{Re}\{\mathbf{g}(\omega_r, \theta_r)\}, \text{Im}\{\mathbf{g}(\omega_r, \theta_r)\}] \quad (9)$$

$$\mathbf{f} = [1, 0]^T \quad (10)$$

式中,  $\text{Re}\{\cdot\}$  和  $\text{Im}\{\cdot\}$  分别表示取实部和虚部,  $(\cdot)^H$  表示共轭转置。

对式(7)求解,可得FIB的权向量为

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}_{\text{cls}}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{\text{cls}}^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \quad (11)$$

### 3 正则化约束最小二乘稳健 FIB 设计方法

#### 3.1 稳健 FIB 设计

由于受环境温度、振动、湿度和工作时间等因素的影响,麦克风的幅度和相位响应特性往往会随时间发生变化,因此,麦克风的响应特性  $A_m(\omega, \theta) = a_m(\omega, \theta) e^{-j\phi_m(\omega, \theta)}$  可视为随机变量<sup>[8]</sup>。数学上,  $A_m(\omega, \theta)$  的统计特性可以通过其幅度响应  $a_m(\omega, \theta)$  和相位响应  $\phi_m(\omega, \theta)$  的联合概率密度函数来描述。为了分析的方便,这里我们做如下假设:所有麦克风的幅度响应  $a_m(\omega, \theta)$  和相位响应  $\phi_m(\omega, \theta)$  具有相同的联合概率密度函数,且不依赖于工作频率  $\omega$  和角度  $\theta$ ;麦克风的幅度响应和相位响应特性之间相互统计独立。基于上述假设,麦克风的幅度和相位响应的联合概率密度函数可表示为  $f_A(A) = f_{a,\phi}(a, \phi)$ , 其中  $A = ae^{-j\phi}$ 。

为了提高约束最小二乘 FIB 设计方法的稳健性能,在式(6)优化问题的基础上,类似文献[8]的思想,这里考虑如下加权形式

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \bar{J}_{\text{cls}}(\mathbf{w}, A_0, \dots, A_{M-1}) \times \\ & f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} \\ \text{s. t.} \quad & \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_r, A_0, \dots, A_{M-1}) \cdot \\ & f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{cls}}(\mathbf{w}, A_0, \dots, A_{M-1}) = \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_m)|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

通过仿真分析可知,由上述的优化问题导出的 FIB 具有良好的稳健性,本文将在 3.2 节通过理论分析揭示其能够提高设计稳健性的物理实质,并且在此基础上提出进一步改进的稳健设计方法。

下面导出优化问题式(12)的解。首先,对式(12)中的代价函数进行化简,可得

$$\begin{aligned} \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \bar{J}_{\text{cls}}(\mathbf{w}, A_0, \dots, A_{M-1}) \times \\ f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} = \\ \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_n, \theta_k) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_k)|^2 + \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_m)|^2 \right\} \times \\ f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} = \\ \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\text{tot}} \mathbf{w} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{tot}} = \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re} [(\bar{\mathbf{g}}(\omega_n, \theta_k) - \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_k)) \times \right. \\ \left. (\bar{\mathbf{g}}(\omega_n, \theta_k) - \bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_k))^H] + \right. \\ \left. \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} \text{Re} [\bar{\mathbf{g}}(\omega_r, \theta_m) \bar{\mathbf{g}}^H(\omega_r, \theta_m)] \right\} \times \\ f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} \end{aligned} \quad (15)$$

为了推导的方便,这里引入以下定义

$$\sigma_a^2 = \int_a a^2 f_a(a) da \quad (16)$$

$$\mu_a = \int_a a f_a(a) da \quad (17)$$

$$\mu_\phi^c = \int_\phi \cos \phi f_\phi(\phi) d\phi \quad (18)$$

$$\mu_\phi^s = \int_\phi \sin \phi f_\phi(\phi) d\phi \quad (19)$$

$$\sigma_\phi = (\mu_\phi^c)^2 + (\mu_\phi^s)^2 \quad (20)$$

则式(15)可以化简为

$$\mathbf{Q}_{\text{tot}}^{(m,n)} = \begin{cases} \sigma_a^2 \mathbf{Q}_{\text{cls}}^{(m,n)} & m = n \\ \mu_a^2 \sigma_\phi \mathbf{Q}_{\text{cls}}^{(m,n)} & m \neq n \end{cases} \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{Q}_{\text{tot}}^{(m,n)}$  和  $\mathbf{Q}_{\text{cls}}^{(m,n)}$  分别表示  $\mathbf{Q}_{\text{tot}}$  和  $\mathbf{Q}_{\text{cls}}$  的第  $m$  行, 第  $n$  列的元素。式(21)还可以写成如下的等价形式

$$\mathbf{Q}_{\text{tot}} = \{ [\text{diag}((\sigma_a^2 - \mu_a^2) \sigma_\phi) \mathbf{I}_{M \times M}] + \mu_a^2 \sigma_\phi \mathbf{J}_{M \times M} \} \otimes \mathbf{I}_{L \times L} \odot \mathbf{Q}_{\text{cls}} \quad (22)$$

式中:  $\mathbf{I}_{m \times n}$  是  $m \times n$  维的全 1 矩阵,  $\odot$  表示矩阵 Hadamard 积。

这里定义平均导向矢量(即对由式(3)定义的导向矢量作概率密度函数加权)为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_m(\omega, \theta) = \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \bar{\mathbf{g}}(\omega, \theta, A_0, \dots, A_{M-1}) \times \\ f_A(A_0) \cdots f_A(A_{M-1}) dA_0 \cdots dA_{M-1} \end{aligned} \quad (23)$$

则优化问题(12)的约束条件可以表示为:  $\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega, \theta) = 1$ 。记  $\mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_r)$  和  $\mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_r)$  分别表示  $\mathbf{g}(\omega_r, \theta_r)$  的实部和虚部,由式(23)可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_r) = [\mu_a \mu_\phi^c \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_r) + \mu_a \mu_\phi^s \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_r)] + \\ j[\mu_a \mu_\phi^s \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_r) - \mu_a \mu_\phi^c \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_r)] \end{aligned} \quad (24)$$

因此,式(12)中约束项可以化简为

$$\mathbf{C}_m^T \mathbf{w} = f \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mu_a \mu_\phi^c \mathbf{g}_R^T(\omega_r, \theta_r) + \mu_a \mu_\phi^s \mathbf{g}_I^T(\omega_r, \theta_r) \\ \mu_a \mu_\phi^s \mathbf{g}_I^T(\omega_r, \theta_r) - \mu_a \mu_\phi^c \mathbf{g}_R^T(\omega_r, \theta_r) \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

通过以上的分析计算,综合式(14,25),可得优

化问题式(12)的等价形式为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\text{tot}} \mathbf{w} \quad \text{s. t. } \mathbf{C}_m^T \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (27)$$

求解式(27),可得稳健FIB的权向量为

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}_{\text{tot}}^{-1} \mathbf{C}_m [\mathbf{C}_m^T \mathbf{Q}_{\text{tot}}^{-1} \mathbf{C}_m]^{-1} \mathbf{f} \quad (28)$$

### 3.2 性能分析与改进

这里,通过理论分析以揭示上一节导出的FIB具有稳健性的物理实质,并且提出进一步改进算法性能的方法。首先,给出以下结论。

**引理1** 优化问题式(12)中的代价函数具有如下的等价形式

$$\begin{aligned} & \int_{A_0} \cdots \int_{A_{M-1}} \bar{J}_{\text{cls}}(\mathbf{w}, A_0, \dots, A_{M-1}) \times \\ & f_A(A_0) \cdots f_A A_{M-1} dA_0 \cdots dA_{M-1} = \\ & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_m)|^2 + \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 \quad (29) \end{aligned}$$

式中  $\|\cdot\|$  表示欧氏范数,并且

$$\Gamma = \{[\text{diag}((\sigma_a^2 - \mu_a^2 \sigma_\phi) \mathbf{I}_{M \times 1})] \otimes \mathbf{I}_{L \times L}\} \odot \mathbf{Q}_{\text{cls}} \quad (30)$$

式(29)等号右边可化简为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ & \beta \sum_{\theta_k \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 = \quad (31) \\ & \mathbf{w}^T \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} [\bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)] \times \right. \\ & \quad [\bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)]^H + \\ & \quad \left. \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k) \bar{\mathbf{g}}_m^H(\omega_r, \theta_m) \right\} \mathbf{w} + \\ & \quad \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 = \\ & \mathbf{w}^T \left\{ \mu_a^2 \sigma_\phi \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} [(\mathbf{g}_R(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_k)) \times \right. \\ & \quad (\mathbf{g}_R(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_k))^H + \\ & \quad (\mathbf{g}_I(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_k)) \times \\ & \quad (\mathbf{g}_I(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_k))^H] + \\ & \quad \left. \beta \mu_a^2 \sigma_\phi \sum_{\theta_m \in \Theta_s} [\mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_m) \mathbf{g}_R^H(\omega_r, \theta_m) + \right. \\ & \quad \left. \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_m) \mathbf{g}_I^H(\omega_r, \theta_m)] \right\} \mathbf{w} + \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 \quad (32) \end{aligned}$$

又根据式(8),可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{cls}} = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re} \{ [\mathbf{g}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}(\omega_r, \theta_k)] \times \\ & [\mathbf{g}(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}(\omega_r, \theta_k)]^H \} + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} \text{Re} \{ \mathbf{g}(\omega_r, \theta_m) \mathbf{g}^H(\omega_r, \theta_m) \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \{ [\mathbf{g}_R(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_k)] \times \\ & [\mathbf{g}_R(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_k)]^H + \\ & [\mathbf{g}_I(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_k)] \times \\ & [\mathbf{g}_I(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_k)]^H \} + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} [\mathbf{g}_R(\omega_r, \theta_m) \mathbf{g}_R^H(\omega_r, \theta_m) + \\ & \quad \mathbf{g}_I(\omega_r, \theta_m) \mathbf{g}_I^H(\omega_r, \theta_m)] \quad (33) \end{aligned}$$

将式(30,33)代入式(32),则式(29)等号右边可化简为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_m)|^2 + \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 = \\ & \mu_a^2 \sigma_\phi \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\text{cls}} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \{ [(\text{diag}((\sigma_a^2 - \mu_a^2 \sigma_\phi) \mathbf{I}_{M \times 1})) \otimes \\ & \quad \mathbf{I}_{L \times L}] \odot \mathbf{Q}_{\text{cls}} \} \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\text{tot}} \mathbf{w} \quad (34) \end{aligned}$$

再由式(14)可知,式(29)成立。

根据引理1得,优化问题式(12)的等价形式为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_m)|^2 + \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 \\ \text{s. t. } & \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega, \theta) = 1 \quad (35) \end{aligned}$$

与优化问题(6)的形式相比较,这里的稳健FIB设计问题实质上为正则化优化问题<sup>[10]</sup>。具体来讲,式(35)中的代价函数包含第3项对波束形成器权向量范数的约束。而已知在波束形成器设计中,对波束形成器权向量范数的约束实际上等价于对波束形成器白噪声增益的约束<sup>[11]</sup>。换句话说,优化问题式(12)导出的稳健FIB实质上属于对白噪声增益进行约束的波束形成器。

更一般地,式(35)可以看作是具有单位正则化参数的优化问题。也就是说,式(35)为如下正则化优化问题的一种特例

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_n, \theta_k) - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_k)|^2 + \\ & \beta \sum_{\theta_m \in \Theta_s} |\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega_r, \theta_m)|^2 + \lambda \|\Gamma^{1/2} \mathbf{w}\|^2 \\ \text{s. t. } & \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{g}}_m(\omega, \theta) = 1 \quad (36) \end{aligned}$$

式中, $\lambda$ 称为正则化参数。正则化优化问题(36)的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = & (\mu_a^2 \sigma_\phi \mathbf{Q}_{\text{cls}} + \lambda \Gamma)^{-1} \mathbf{C}_m \times \\ & [\mathbf{C}_m^T (\mu_a^2 \sigma_\phi \mathbf{Q}_{\text{cls}} + \lambda \Gamma)^{-1} \mathbf{C}_m]^{-1} \mathbf{f} \quad (37) \end{aligned}$$

在正则化优化问题中,正则化参数的选取对优化结果具有重要影响<sup>[10]</sup>。优化问题式(35)采用固定的单位正则化参数值,从而导致设计出的稳健FIB是次最优的。可通过选取合适的正则化参数值,以进一步提高稳健FIB设计的性能,本文下面

的分析结果也印证了这一点。

与目前文献中已有的 FIB 设计方法<sup>[2-5]</sup>相比,本文所提出的方法具有以下优点:(1)当存在麦克风通道失配误差时,本文所提方法具有良好的稳健性,能够保持良好的通带空间响应的频率不变性;(2)前文为了分析的方便,以线阵为例进行了讨论。而实际上,本文所提方法对阵列的结构没有限制,因此适用于任意几何结构的麦克风阵列;(3)具有闭式解,无需迭代搜索运算,不存在解的收敛性等问题,计算复杂度较低;(4)在代价函数中的期望响应选择上没有采用通常的定常期望响应值,而是利用参考频率上的波束形成器响应作为其期望响应,充分利用了设计自由度,以达到较好的波束形成器响应的频率不变特性。

与文献[8,9]中的稳健波束形成器设计方法相比,本文所提出的方法在代价函数中的期望响应选择上没有采用通常的定常期望响应值,而是利用参考频率上的波束形成器响应作为其期望响应,充分利用了波束形成器设计的自由度,因而可以获得较好的波束形成器空间响应的频率不变特性。所提出方法的缺点是,不适用于具有任意主瓣形状的宽带波束形成器的设计。

## 4 仿真实验

本节通过几个仿真实例验证本文所提出的稳健 FIB 设计方法的有效性。考虑一均匀线列阵,阵元数  $M=12$ ,相邻阵元间距为  $4.25\text{ cm}$ 。每个通道所采用的 FIR 滤波器的长度为  $L=25$ ,信号的采样频率为  $f_s=8\ 000\text{ Hz}$ 。波束形成器设计的旁瓣区域定义为  $\Theta_s=[0^\circ -50^\circ]\cup[130^\circ -180^\circ]$ ,参考角频率  $\omega$ ,参考方向  $\theta_r=90^\circ$ , $\beta=0.5$ 。假设麦克风的幅度响应  $a_m(\omega, \theta)$ 服从  $[0.9, 1.1]$ 上的均匀分布,即幅度相对误差范围为  $\pm 10\%$ ;相位响应  $\varphi_m(\omega, \theta)$ 服从  $[-10^\circ, 10^\circ]$ 上的均匀分布,即相位误差范围为  $\pm 10^\circ$ 。下面给出的存在麦克风通道失配误差时的结果均为 100 次随机试验的统计平均结果。

### 4.1 仿真实验 1

波束形成器的工作频率范围为  $[1\ 600, 3\ 600]\text{ Hz}$  时,在无麦克风通道失配误差的理想情况下,图 1 给出了由约束最小二乘 FIB 设计方法<sup>[7]</sup>得到的阵列响应图。由图 1 可以看出,无通道失配误差时,约束最小二乘 FIB 设计方法具有良好的性能,在整个设计通带范围内,保持了良好的频率不变特性。下面,分析存在通道失配误差时,约束最小二乘 FIB 设计方法的性能。图 2 给出了有通道失配误差

时,约束最小二乘 FIB 设计方法得到的阵列响应图。由结果可以看出,受通道失配误差的影响,在低频段部分,约束最小二乘 FIB 设计方法的性能严重

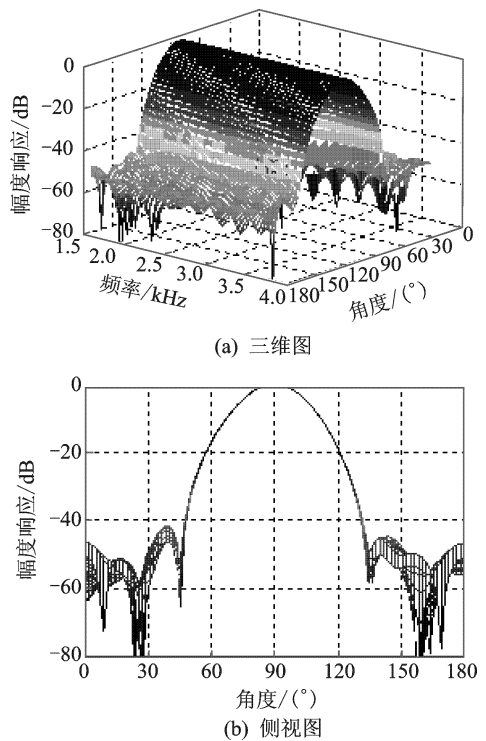


图 1 理想情况下约束最小二乘 FIB 设计方法得到的波束响应

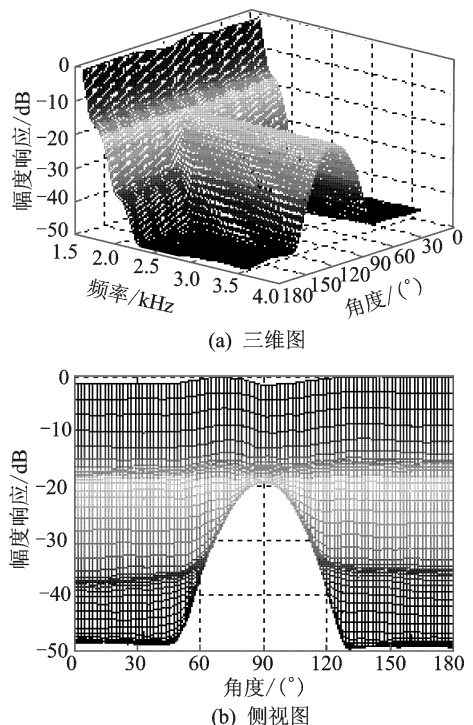


图 2 存在通道失配误差时,约束最小二乘 FIB 设计方法得到的波束响应

下降,从而在整个设计频带内,无法保持波束形成响应的频率不变性。

## 4.2 仿真实验2

波束形成器的工作频率范围同仿真实验1,存在通道失配误差条件下,当正则化参数 $\lambda=1$ 时,本文提出的稳健FIB设计方法得到的阵列响应如图3所示。与图2的结果相比较,约束最小二乘FIB设计方法在通道失配误差存在时,无法正常工作,而本文提出的稳健设计方法能够较好的满足设计要求,在整个通带设计频率范围内,保持了较好的频率不变性。图4给出了当正则化参数 $\lambda=0.01$ 时得到的阵列响应,与 $\lambda=1$ 时的结果(图3)相比,通带范围内波束的频率不变特性得到了改善。通过调整正则化参数取值,可以提高FIB的设计性能。

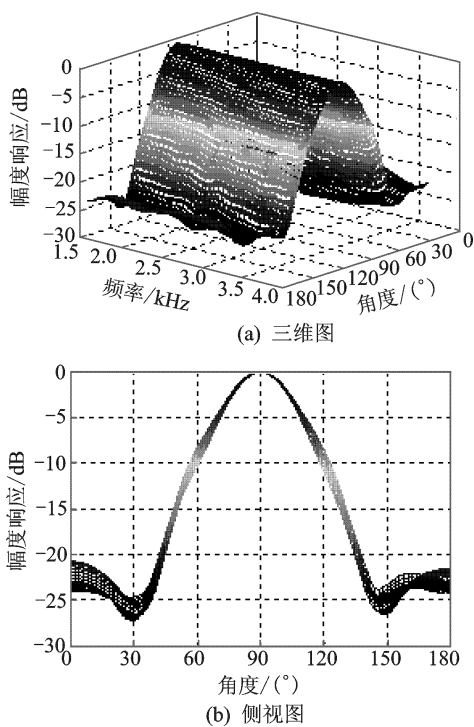


图3 存在通道失配误差时,正则化约束最小二乘稳健FIB设计方法(正则化参数 $\lambda=1$ )得到的波束响应

为了进一步分析正则化参数对FIB设计性能的影响,这里首先引入通带波动误差的概念。通带波动误差定义为:通带范围内波束形成器幅度响应的最大值与最小值之差。显然,通带波动误差越小,波束形成器在通带范围的频率不变特性就越好。图5给出了不同正则化参数情况下,100次随机试验时的最大通带波动误差。从分析结果可以看出,当正则化参数 $\lambda=1$ 时,最大通带波动误差为2.47 dB,而 $\lambda=0.01$ 时,最大通带波动误差仅为0.9 dB。

因此,选取较小的正则化参数值,可以提高通带波束的频率不变特性。

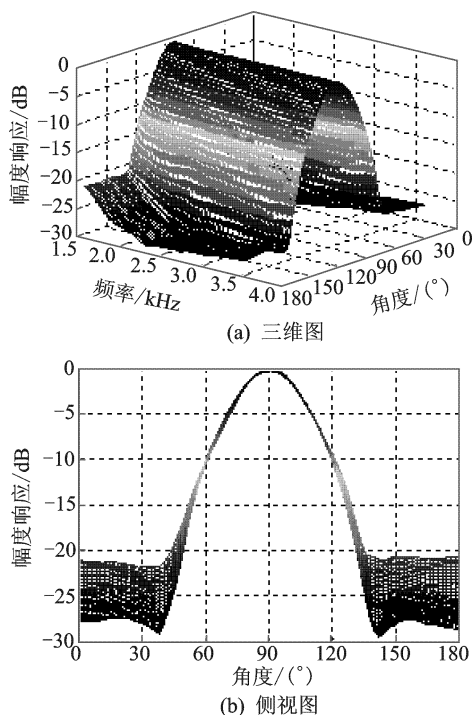


图4 存在通道失配误差时,正则化约束最小二乘稳健FIB设计方法(正则化参数 $\lambda=0.01$ )得到的波束响应

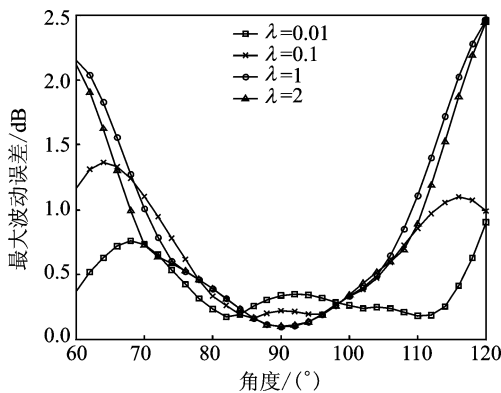


图5 不同正则化参数条件下,稳健FIB的最大通带波动误差

## 4.3 仿真实验3

这里设定波束形成器的工作频率范围为 $[300, 4000]$  Hz,其余参数设置如仿真实验1。图6和图7分别给出了理想情况下及存在麦克风通道失配误差时,约束最小二乘FIB设计方法得到的波束响应图。与仿真1的结果相同,当存在通道失配误差时,约束最小二乘FIB设计方法将失效。另外,由图6和图1比较可以看出,对于相同尺寸的阵列,当

大波束形成器的工作带宽时,波束形成器的性能有所下降,但在通带范围内仍保持了较好的频率不变特性。图 8 给出了存在通道失配误差时,本文所提

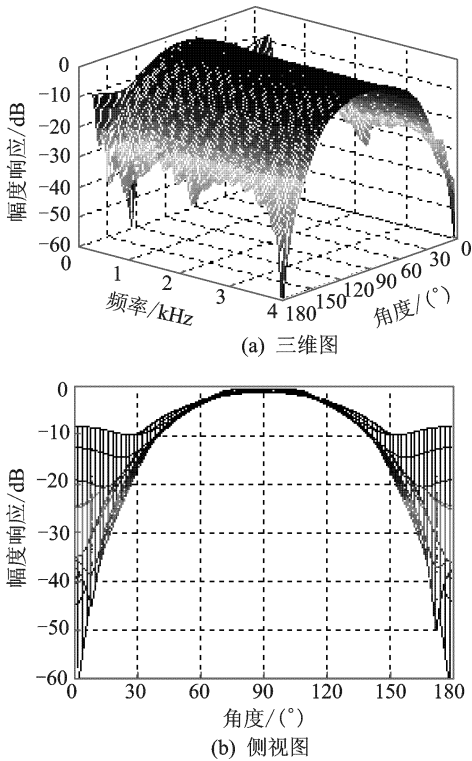


图 6 理想情况下约束最小二乘 FIB 设计方法得到的波束响应

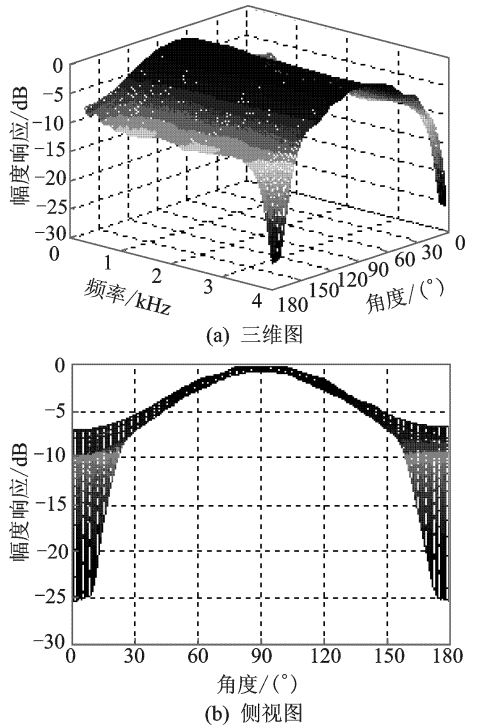


图 8 存在通道失配误差时,正则化约束最小二乘稳健 FIB 设计方法(正则化参数  $\lambda=0.1$ )得到的波束响应

出方法的波束响应图。与图 7 相比可以看出,本文所提出的设计方法在频率范围较宽时仍然能保持较好的频率不变特性。

## 5 结束语

本文提出了一种基于正则化约束最小二乘的稳健 FIB 设计方法。理论和仿真分析结果表明,在算法的稳健性实质上,该方法等效于白噪声约束类方法,并且通过调整正则化参数的取值,可以有效提高 FIB 设计的通带频率不变特性。与目前已有的 FIB 设计方法相比,本文方法具有以下优点:能够有效克服麦克风通道失配误差对 FIB 设计性能的影响;适用于任意几何结构的阵列;具有闭式解,无需迭代运算,因而不存在算法的收敛性等问题,设计运算的复杂度较低。

### 参考文献:

- [1] Benesty J, Chen J, Huang Y. Microphone array signal processing [M]. Germany: Springer, 2008.
- [2] Ward D B, Kennedy R A, Williamson R C. Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant far-field beam patterns [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(2): 1023-1034.

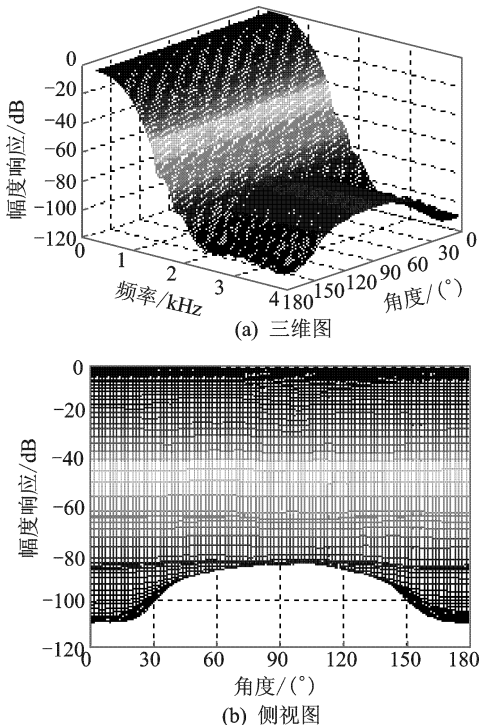


图 7 存在通道失配误差时,约束最小二乘 FIB 设计方法得到的波束响应

- [3] Zhang X, Ser W, Zhang Z, et al. Selective frequency invariant uniform circular broadband beamformer [J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010; 678306.
- [4] Duan H, Ng B P, See C M, et al. Applications of the SRV constraint in broadband pattern synthesis [J]. *Signal Processing*, 2008, 88(4): 1035-1045.
- [5] Chen P, Liang Y, Hou C, et al. SRV constraint based FIB design for wideband linear array [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2010, 21(6): 941—947.
- [6] Parra L C. Least squares frequency-invariant beamforming [C]// *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*. New Paltz, New York, USA:[s. n. ], 2005: 102-105.
- [7] Zhao Y, Liu W, Langley R. A least squares approach to the design of frequency invariant beamformers [C]// *The 17th European Signal Processing Conference*. Glasgow, Scotland:[s. n. ], 2009: 844-848.
- [8] Doclo S, Moonen M. Design of broadband beamformers robust against gain and phase errors in the microphone array characteristics [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2511-2526.
- [9] Chen H, Ser W, Yu Z L. Optimal design of nearfield wideband beamformers robust against errors in the microphone array characteristics [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 2007, 54(9): 1950-1959.
- [10] Golub G H, Hansen P C, O'Leary D P. Tikhonov regularization and total least squares [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1999, 21(1): 185-194.
- [11] Cox H, Zeskind R, Kooij T. Practical supergain [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1986, 34(3): 393-398.

**作者简介:**李静(1987-),女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理,E-mail:nanhanglijing@163.com;陈华伟(1977-),男,教授,研究方向:阵列信号处理。