

文章编号:1004-9037(2012)02-0254-05

# 取邻抽取任意倍数采样率变换算法

李天昀 许漫坤 葛临东

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州, 450002)

**摘要:**定量分析了取邻抽取任意倍数采样率变换算法的取邻误差。首先基于分数倍采样率变换结构,从取邻抽取的角度阐述了软件无线电中的任意倍数采样率变换算法,推导了其实现结构和计算量。在此基础上,详细地定量分析了取邻误差,将取邻抽取的影响等价于信噪比的降低,并以此为指导选取算法参数。结果表明,这种取邻抽取任意倍数采样率变换算法具有通用性和高效性的优势,通用性表现为以统一的算法结构来实现任意倍数的采样率变换,高效性表现为在同样性能要求下其计算量与传统方法相当。

**关键词:**软件无线电;任意倍数采样率变换;取邻抽取

中图分类号:TN911.7

文献标识码:A

## Conversion Algorithm Between Arbitrary Sampling Rate Based on Neighbor Decimation

*Li Tianyun, Xu Mankun, Ge Lindong*

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, 450002, China)

**Abstract:** A novel approach is presented to quantitatively analyze the error caused by neighbor decimation in the conversion between arbitrary sampling rates. Based on a fractional sampling rate conversion structure, an arbitrary sampling rate conversion algorithm for software radio based on neighbor decimation is proposed. The computational complexity of the structure is deduced. Furthermore, the error of neighbor decimation is quantitatively analyzed in detail. Treated as a kind of signal-to-noise ratio (SNR) reduction, the effects of neighbor decimation can be the guideline of parameter selection. Results prove that the method is superiority to other methods both in currency and efficiency. The currency behaves as a uniform structure to realize all arbitrary sampling rate conversion. And the high efficiency behaves as the equivalent computation complexity to traditional methods with the same performance.

**Key words:** software radio; arbitrary sampling rate conversion; neighbor decimation;

## 引 言

现代软件无线电技术条件下的信号接收过程中,采样率变换已成为其中的核心环节。硬件上采用统一的软件无线电平台,这种平台一般具有较高的模拟数字转换(Analog-to-digital, AD)采样率,以适应更多的应用、进行高效接收、或通过过采样改善信噪比性能。因此根据接收信号的不同,需要将AD采样数据进行数字混频、数字滤波和采样率变换等处理,以适应同步、均衡等后续处理算法。

通常的采样率变换方法有整数倍抽取和内插、分数倍采样率变换、多级实现等<sup>[1-2]</sup>,而Farrow结构重构、Lagrange插值等算法<sup>[2-5]</sup>则通过滤波器系数插值的方式来实现任意时刻的插值。本文的算法基于低通信号过采样序列的取邻抽取理论,其优势在于通用性和高效性。通用性表现在以统一的算法结构来实现任意倍数采样率变换,而不管采样率变换倍数是整数还是小数、抑或是上采样还是下采样。高效性表现在其计算量与传统方法相当,而且由于其结构上的统一性和易并行性,非常适合在多核CPU, GPU等高性能并行计算环境实现。

文中推导了这种取邻抽取任意倍数采样率变换算法的实现结构和参数选取,并详细推导了其取邻抽取性能的定量表达,将其误差等价于信噪比的损失。

## 1 算法结构

### 1.1 算法原理

无理数倍采样率变换的一种思路是在重采样过程中对采样位置进行近似。对过采样倍数较高的低通信号进行大倍数的抽取来得到输出信号,其抽取倍数可以是无理数,并将各抽取位置近似到相邻的整数位置<sup>[2]</sup>。这种近似所导致的误差可以看作是对一个低通信号进行高倍过采样过程中的采样时钟抖动误差,反映在抽取之后的低倍过采样信号中其采样值的误差将非常小。

假设输入采样数据的采样率为 $f_{s_i}$ ,其中某信号位于以 $f_c$ 为中心的 $BW$ (Hz)带宽内,现需将该信号变为基带信号且其采样率变换为 $f_{s_o}$ 。采用如图1所示的采样率变换结构,该结构与分数倍采样率变换类似,只是抽取倍数 $D$ 可以是小数值。其中,先将 $f_c$ 处信号数字混频至零频,其后的处理对象将为等效低通信号即复包络<sup>[6]</sup>。

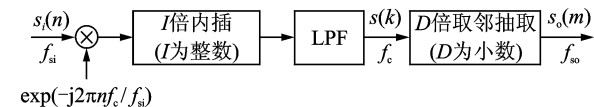


图1 算法原理

低通滤波器(Low pass filter, LPF)为内插抽取滤波器,其幅频响应特性如图2所示<sup>[1-2]</sup>。由Remez算法,滤波器阶数为

$$N = K(\delta_1, \delta_2)f_s/\Delta f \quad (1)$$

式中 $\delta_1, \delta_2$ 为通带与阻带的波纹系数<sup>[2]</sup>。

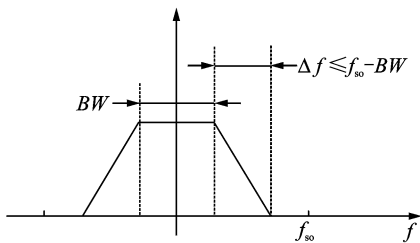


图2 LPF幅频特性

取邻抽取模块中,抽取倍数 $D$ 可以是整数或小数值,取邻抽取指的是从 $s(k)$ 中进行 $D$ 倍抽取时,抽取出的序列为

$$s_o(m) = s(\lceil mD \rceil) \quad (2)$$

即将准确抽取位置 $mD$ 取邻近近似为整数位置 $\lceil mD \rceil$ ,其中符号 $\lceil \cdot \rceil$ 指四舍五入取整运算。

### 1.2 算法实现

在图1的处理过程中,对于 $s(k)$ 的计算,由于 $s_i(n)$ 中插入的零值样点不对滤波器加权求和的输出产生任何影响,而且非零样点对应的滤波器系数位置可以持续跟踪得出,因此可以仅对非零样点进行加权求和来得到 $s(k)$ 。另外,并不需要计算全部的 $s(k)$ 序列,仅需计算其中输出为 $s_o(m)$ 的这部分样本,没有必要计算最终将丢弃掉的样本。

设 $s_i(n); n=0, 1, 2, \dots$ 在 $I$ 倍内插零后记为 $s'_i(k), k=0, 1, 2, \dots$ ,且 $s'_i(nI) = s_i(n)$ 。

记 $N$ 阶低通滤波器为 $h(k), k=0, 1, \dots, N-1$ 。结合算法具体实现结构,滤波器阶数 $N$ 通常取为 $I$ 的整数倍,记 $N=cI$ ,其中 $c$ 为整数。由滤波卷积关系,可知

$$s(k) = \sum_{p=0}^{N-1} s'_i(k+p)h(N-1-p) \quad (3)$$

考虑到 $N=cI$ ,将式(3)写为

$$s(k) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{c-1} s'_i(k+i+jI)h(N-1-i-jI) \quad (4)$$

考虑 $s'_i(k)$ 中 $I$ 倍内插零的特殊性,式(4)中的 $s'_i(k+i+jI)$ 仅当 $k+i$ 整除 $I$ 时有值。对于某 $k$ ,令 $q = \lceil k/I \rceil$ 以及 $i' = qI - k$ ,其中 $\lceil \cdot \rceil$ 指向上取整运算,则

$$s(k) = \sum_{j=0}^{c-1} s'_i((q+j)I)h(N-1-i'-jI) \quad (5)$$

记 $h_i(j) = h(N-1-i-jI) (i=0, 1, \dots, I-1; j=0, 1, \dots, c-1)$ ,即将 $N$ 阶滤波器 $h$ 排列为长度为 $c$ 的 $I$ 组,则

$$s(k) = \sum_{j=0}^{c-1} s_i(q+j)h_{i'}(j) \quad (6)$$

算法实际实现过程可以表述为如下步骤:(1)输出序列 $s_o(m); m=0, 1, 2, \dots$ 的当前序号 $m$ 加1;(2)由式(2)求得此时对应的序列 $s(k)$ 的序号 $k = \lceil mD \rceil$ ;(3)求得此时的 $q = \lceil k/I \rceil$ 以及 $i' = qI - k$ ;(4)从已预先排列好的滤波器系数表中取得 $h_{i'}$ ,由式(6)求得 $s(k)$ 作为 $s_o(m)$ 输出。

由式(6)分析可知,算法的计算量将为 $N/I$ (ops/输出样点)或 $N/D$ (ops/输入样点),其中ops指一次与滤波器系数的加权求和运算。结合式(1),

简单分析一下计算量的量级,如果要求输出采样率为  $f_{s_0} = 4 \cdot BW$ ,且  $K(\delta_1, \delta_2)$  取典型值 3,过渡带宽取为  $\Delta f = f_{s_0} - BW$ ,则计算量将为 4(ops/输入采样点)。后续推导将得到,增大内插倍数  $I$  将提高取邻抽取性能,此时滤波器系数  $N$  也将成比例地增加,但  $N/I$  保持不变,因此并不增加计算量,这一优点可以充分用来减小取邻抽取的影响。

同样性能要求下,本算法的计算量与传统采样率变换方法如整数倍抽取、整数倍内插、分数倍采样率变换等的计算量相当,但是很多情况下本算法的空间复杂度要更大。本算法的优点在于采用统一的算法结构可以完成任意倍数的采样率变换,其中包括任意小数倍的采样率变换,从而不用根据各种采样率变换倍数要求在各种传统采样率变换算法和滤波器设计之间进行复杂的评估和选择。

Farrow 结构内插算法<sup>[4-5]</sup>采用滤波器系数内插的思路。与 Farrow 算法相比,如果由多项式来计算内插滤波器系数,显然其计算量比本算法大得多,但是其空间复杂度要小;而如果 Farrow 算法中采用滤波器系数存储的形式,则与本算法在性能、计算量、空间复杂度等方面是等价的。

## 2 取邻误差分析

### 2.1 分析模型

取邻近似将导致输出样本值误差,称为取邻误差或取邻噪声。对取邻误差的分析将是算法的关键所在,其结论将指导参数  $I, D$  的选取。

假设图 1 中各模块是理想的,即先不考虑信号和滤波器系数的有限精度表示、LPF 滤波器的波纹和过渡带等诸多实际因素的影响。在这种假设条件下,输出信号  $s_o(m)$  中的取邻误差可以在下述简化模型下来进行等价讨论。

设  $s(t)$  为低通型信号,  $s(k) = s(t_k) = s(kT_s)$  是以  $T_s$  为采样间隔对  $s(t)$  的理想采样序列,采样率为  $f_s = 1/T_s$ 。如图 3 所示,  $t_k + \tau$  位置取邻近似为  $t_k$  时刻,取邻误差为

$$e = s(t_k) - s(t_k + \tau) \quad (7)$$

式中  $\tau = (mD - [mD])T_s$  为取邻抖动。  $D$  为整数时,  $\tau = 0$ ,此时将不存在取邻误差。而  $D$  不为整数时,可以假定  $\tau$  在  $(-T_s/2, T_s/2)$  范围内均匀分布。

直观地,同样采样率  $f_s$  条件下,  $s(t)$  含有越高的频率分量,则含有越丰富的变化信息,信号电平变化的瞬时速率即扭曲速率(Slew rate, SR)<sup>[1]</sup>更大,其取邻误差也将越大。下面根据  $s(t)$  的不同情况来定量推导取邻误差和信号质量损失。

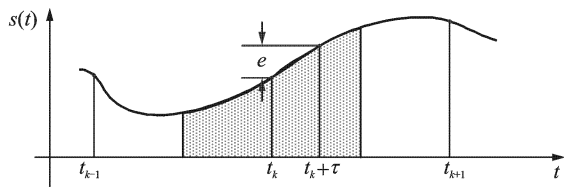


图 3 取邻抖动与取邻误差

### 2.2 单频信号情形

先分析  $s(t)$  为单频信号  $s(t) = A \cos 2\pi f t$  的情形。取邻误差为

$$e = s(t) - s(t + \tau) = A \cos 2\pi f t - A \cos 2\pi f (t + \tau) \quad (8)$$

对式(8)求导来分析  $e$  的极值可得,一定  $f_s$  和  $f$  取值下的取邻误差最大值  $|e|_{\max}$  为

$$|e|_{\max} = |2A \sin \pi f \tau| \quad (9)$$

由于一般满足  $f\tau \ll 1$ ,该最大值可近似为  $2A\pi \cdot f|\tau|$ 。当  $|\tau| = T_s/2$  时,将出现最大可能的取邻误差,其值近似为  $A\pi f/f_s$ 。在一定  $f_s$  和  $f$  取值下,通过实验统计得到的取邻误差的概率密度函数如图 4 所示<sup>[1]</sup>,较大误差出现的概率更小。

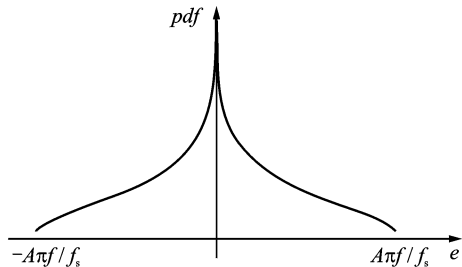


图 4 单频下取邻误差概率分布

由式(8),考察其一个周期,可以求得取邻噪声的平均功率为

$$P_e = f \cdot \int_{-1/2f}^{1/2f} e^2 dt = A^2 (1 - \cos 2\pi f \tau) \quad (10)$$

考虑取邻抖动  $\tau$  的均匀分布特性,可以进一步求得  $P_e$  的均值为

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &= E[P_e] = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} P_e \frac{1}{T_s} d\tau = \\ &A^2 (1 - \text{sa}(\pi f/f_s)) \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $\text{sa}(\cdot)$  函数为抽样函数。而信号  $s(t)$  的平均功率为  $P_s = A^2/2$ ,因此可以求得取邻噪声导致的取邻信噪比(单位 dB)为

$$\begin{aligned} r_e &= 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_s}{\bar{P}_e} \right) = -10 \cdot \\ &\log_{10} (2(1 - \text{sa}(\pi f/f_s))) \end{aligned} \quad (12)$$

图 5 以取邻信噪比的形式示出了单频情形取

邻噪声所导致的信号质量损失。

$s(t)$ 为单频信号时,取邻噪声的功率谱特性并不理想。由于信号本身的单频周期性,以及取邻抖动 $\tau$ 的近似周期性,导致取邻误差 $e$ 中包含周期分量,其功率谱中将包含谐波分量。例如图6所示取邻噪声功率谱中即含明显谐波分量,取邻噪声平均功率虽不大,但其能量集中在少数谐波分量上,将造成无杂散动态范围(Spurious-free dynamic range, SFDR)<sup>[1]</sup>的降低。

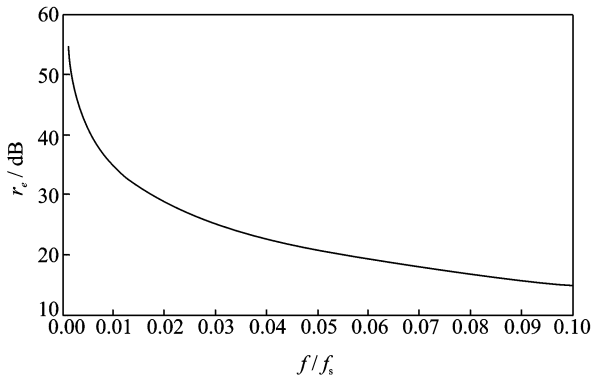
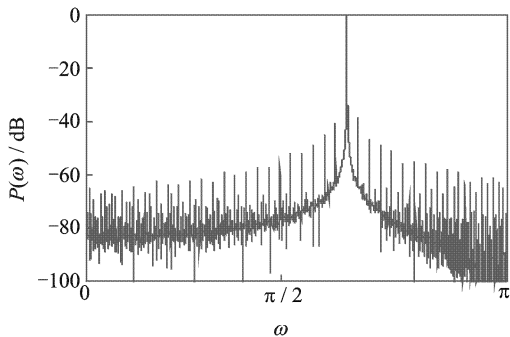
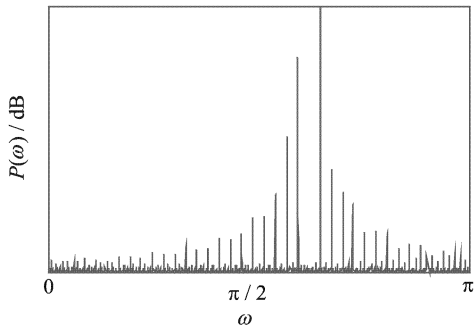


图5 单频信号情形下取邻信噪比



(a) 取邻后信号功率谱



(b) 取邻噪声功率谱

图6 单频下取邻噪声功率谱示例

### 2.3 均匀低通带限信号情形

假设 $s(t)$ 为在带宽 $B$ 上均匀分布的低通信号。实际通信应用中的很多情况都可以近似为这种情形,例如升余弦成形正交调制信号的接收等。

在这种情形下,取邻误差的概率分布可以近似

为高斯分布。此时,取邻噪声的功率谱中将不再含有明显谐波分量。实际应用中,均匀低通带限信号情形下的取邻噪声可以近似为高斯白噪声。

根据单频信号情形下的结论,由式(11),此时,取邻噪声的平均功率将为

$$\bar{P}_e = \int_0^B A^2 (1 - \text{sa}(\pi f / f_s)) \frac{1}{B} df = A^2 \left( 1 - \frac{f_s}{\pi B} \text{Si} \left( \frac{\pi B}{f_s} \right) \right) \quad (13)$$

式中,  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ <sup>[7]</sup>, 信号 $s(t)$ 的平均功率为  $P_s = A^2/2$ 。

因此,取邻信噪比将为

$$r_e = -10 \cdot \log_{10} \left( 2 \left( 1 - \frac{f_s}{\pi B} \text{Si} \left( \frac{\pi B}{f_s} \right) \right) \right) \quad (14)$$

图7以取邻信噪比的形式给出了均匀低通带限信号情形下取邻噪声所导致的信号质量损失。与图5比较,在 $B=f$ 时,均匀低通带限信号情形下的取邻信噪比比单频信号情形下的取邻信噪比要高约5 dB。

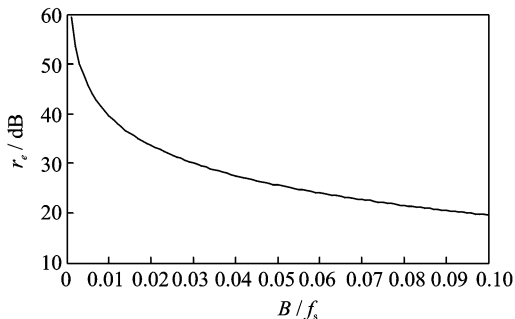


图7 均匀低通带限信号情形下取邻信噪比

如果 $s(t)$ 为实际通信系统中接收到的低通信号,其中必然含有噪声和信道干扰。假设信道为加性高斯白噪声信道,设接收信号中信号功率为 $S$ 、噪声功率为 $N$ (包含了量化噪声等),该接收信号的信噪比为 $r_s = 10 \cdot \log_{10}(S/N)$ 。设取邻噪声平均功率为 $N'$ ,则取邻信噪比为 $r_e = 10 \cdot \log_{10}((S+N)/N')$ 。考虑通信信道噪声和取邻噪声作为总的噪声,可推得取邻抽取输出信号的最终信噪比将为

$$r = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{S}{N+N'} \right) = r_s + r_e - 10 \cdot \log_{10} (10^{r_s/10} + 10^{r_e/10} + 1) \quad (15)$$

式(15)以信噪比的形式给出了实际应用中取邻抽取导致的信号质量变化。从式(14,15)可知,信噪比降低量 $r_s - r$ 取决于 $B/f_s$ 和 $r_s$ ,且 $r_s$ 越大,则信噪比降低量越不可忽视。

式(14,15)给出了对于实际通信信号的处理中取邻抽取的影响。取邻噪声可以近似为高斯白噪声,导致的信噪比降低程度随信号归一化带宽 $B/f_s$ 的

增加而增大,而且原信号信噪比越高则受取邻噪声的影响越大。

## 2.4 抽取倍数参数选取

由式(14,15),取邻抽取导致的信噪比降低量取决于信号归一化带宽 $B/f_s$ 和原信号信噪比 $r_s$ 。由图2,假设过渡带宽取为 $\Delta f=f_{so}-BW$ ,并假定由式(14)来计算 $r_c$ 时信号带宽取为 $B=BW/2+\Delta f/2$ ,则可得

$$B/f_s = \frac{1}{2D} \quad (16)$$

式(16)结合式(13,14)表明, $D$ 的取值完全决定了取邻噪声的功率和取邻信噪比。

可见信噪比降低量完全取决于 $I$ (或 $D$ )和 $r_s$ 。因此,在一定的信噪比降低量要求下,可以求得满足要求的最小内插倍数值 $I_{\min}$ 和最小抽取倍数值 $D_{\min}$ 。从表1中可以查得通常情况下的数据。例如取 $D \geq 16$ ,则 $r_s=15$  dB时信噪比降低量为0.15 dB, $r_s=30$  dB时信噪比降低量为3.16 dB;而如果取 $D \geq 32$ ,则 $r_s=15$  dB时信噪比降低量为0.04 dB, $r_s=30$  dB时信噪比降低量为1.03 dB,已能满足大部分情况下的通信信号处理要求。

表1 一定抽取倍数与输入信噪比下的信噪比降低量 dB

$D_{\min}$	$r_s$					
	5	10	15	20	25	30
8	0.077	0.200	0.568	1.560	3.724	7.229
16	0.019	0.051	0.149	0.446	1.270	3.163
24	0.009	0.023	0.067	0.204	0.611	1.692
32	0.005	0.013	0.038	0.116	0.354	1.031

因此,内插倍数 $I$ 和抽取倍数 $D$ 的确定过程如下:(1)根据原信号信噪比 $r_s$ 和输出信号信噪比要求来确定 $D_{\min}$ ;(2) $I = \lceil f_{so} \cdot D_{\min} / f_{si} \rceil$ ;(3) $D = \lceil f_{si} \cdot I / f_{so} \rceil$ 。

上述推导过程中对滤波过渡带宽作了一定假设。如果在滤波过渡带宽内有相对于待抽取信号来说特别强的信号,将使得上述假设不成立。此时,为了适应这种特殊情况,可以减小过渡带宽 $\Delta f$ ,并增大内插倍数 $I$ 。

## 3 结束语

关于任意倍数采样率变换,有诸多文献从多个角度对其进行了研究和分析,其名词也包括采样率变换、内插器、重采样、数字移相器、延时器等。

本文全面具体地分析了任意倍数采样率变换通用算法的算法原理和实现结构,并详细分析了其性能和参数选取等问题,为各种条件下的实际应用

提供设计参考。结论表明,这种取邻抽取任意倍数采样率变换算法具有通用性和高效性优势,通用性表现为以统一的算法结构来实现任意倍数的采样率变换,高效性表现为同样性能要求下其计算量与传统方法相当。

### 参考文献:

- [1] Reed J H. 软件无线电——无线电工程的现代方法[M]. 陈强译. 北京:人民邮电出版社,2004:41-62,137-146.  
Reed J H. Software radio—a modern approach to radio engineering[M]. Translated by Chenqiang. Beijing: Posts and Telecommunication Press, 2004:41-62.
- [2] Harris F J. 通信系统中的多采样率信号处理[M]. 王霞等译. 西安:西安交通大学出版社,2008:96-98,131-152.  
Harris F J. Multirate signal processing for communication systems[M]. Translated by Wangxia et al. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2008:96-98.
- [3] Göckler H G, Groth A. 多采样率系统——采样率转换和数字滤波器组[M]. 王德海,步兮瑶译. 北京:电子工业出版社,2009:75-78.  
Göckler H G, Groth A. Multi-rate system—sampling rate conversion and digital filter bank[M]. Translated by Wangdehai & Bu Xiyao. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009:75-78.
- [4] Gardner F M. Interpolation in digital modems—Part I: fundamentals[J]. IEEE Trans on Communications, 1993,41(3):501-507.
- [5] Erup L, Gardner F M, Harris R A. Interpolation in digital modems—Part II: implementation and performance[J]. IEEE Trans on Communications, 1993, 41(6):998-1008.
- [6] Boccuzzi J. 通信信号处理[M]. 刘祖军,田斌,易克初译. 北京:电子工业出版社,2010:35-41,46-49.  
Boccuzzi J. Signal processing for wireless communications[M]. Translated by Liu Zujun, Tian Bin & Yi Kechu. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010:35-41,46-49.
- [7] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of integrals, series, and products [M]. 7th Edition. Academic Press, 2007.

作者简介:李天昀(1979-),男,博士,研究方向:通信信号处理与软件无线电,E-mail:xyzlty@163.com;许漫坤(1977-),女,博士,研究方向:信号与信息处理;葛临东(1946-),男,教授,博士生导师,研究方向:通信信号处理与软件无线电。