文章编号:1004-9037(2012)05-0565-05

完备ARRs集的生成方法及传感器优化配置应用

杜敏杰 蔡金燕 刘利民 陈 鹏

(军械工程学院光学与电子工程系,石家庄,050003)

摘要:广泛应用于故障诊断和传感器优化、分析、证实的解析冗余关系(Analytical redundancy relations, ARRs)缺乏系统、有效的方法来产生完备ARRs集,为此,提出了一种逐次消元法。该方法以系统元关系(Primary relations, PRs)为基础,通过若干次循环消元过程,生成了完备ARRs集,同时生成了对应的假定特征矩阵(Hypothetical signature matrix, HSM);基于HSM,把传感器优化配置问题映射为一个特殊的0-1整数规划模型,并用分支定界法求解该模型。应用表明,该方法能在不降低故障检测率、隔离率的前提下减少传感器数目,降低了测试代价,对故障诊断中的传感器配置问题有借鉴意义。

关键词:故障诊断;传感器优化配置;解析冗余关系;假定特征矩阵;整数规划

中图分类号:TP202 **文献标识码**:A

Method for Generating Complete ARRs Set and Its Application in Sensor Placement Optimization

Du Minjie, Cai Jinyan, Liu Limin, Chen Peng

(Department of Optical and Electronic Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, 050003, China)

Abstract: Analytical redundancy relations (ARRs) are frequently used in the area of fault diagnosis, as well as optimizing, analyzing, and validating of sensors in a system. However, less attention has been paid to the development of systematic and efficient approaches for generating complete ARRs set. Hereto, an efficient method, named the successive elimination is presented. Based on the primary relations (PRs) of the system, the method generates complete ARRs set and the consequent hypothetical signature matrix (HSM) by several elimination loops. Based on the strength of HSM, the optimal sensor placement problem is mapped onto a special case of 0-1 integer programming (IP) problem. Then, the problem is solved by an algorithm of branch-and-bound. Application results show that the method can decrease sensor numbers and testing cost without decreasing fault detection rate (FDR) and fault isolation rate (FIR). And it is beneficial to the sensor placement problem for fault diagnosis.

Key words: fault diagnosis; sensor placement optimization; analytical redundancy relations (ARRs); hypothetical signature matrix (HSM); integer programming

引 言

一个诊断系统的质量和效率取决于从系统中得到的故障信息[1],而故障信息来源于分布于系统中的传感器。很多关于故障诊断的研究都默认传感器事先已经合理配置。实际中,可用的传感器数目、价格均有限,这就限制了数据信息的分辨率。因此在实践中有必要优化传感器数目、位置。近来,确定一个具体诊断系统的传感器最优数目及其分布已引起人们关注[2]。

文献[3]用解析冗余关系(Analytical redundancy relations, ARRs)解决了工控系统制动器诊断中的传感器优化难题;文献[4]联合ARRs和增量算法解决了燃料电池诊断系统的传感器配置问题;文献[5]基于ARRs建立了喷气式飞机推进器

基金项目:河北省重点基础研究(1096529D)资助项目。
收稿日期:2011-03-05;**修订日期**:2011-12-20

的传感器优化模型。这些应用都建立在已经获取完备ARRs集的假设上，而没有讨论如何生成完备ARRs集的问题，为此本文给出了ARRs的概念以及与此密切关联的假定特征矩阵概念（Hypothetical signature matrix, HSM），提出了一种生成完备ARRs集的有效方法，进而把传感器优化问题映射为一个整数规划模型，用分支定界法对该模型求解。

1 生成完备ARRs集的逐次消元法

1.1 ARRs和HSM概念

文献[6]给出了ARRs的定义：ARRs是从只含可观测变量的系统模型导出的约束关系，因此可用来评估任何可观测集。图1是一个包括4个乘法器和3个加法器的例子。

该系统由组件和功能来描述，其模型由式(1～7)一系列的关系集及其相关组件给出。

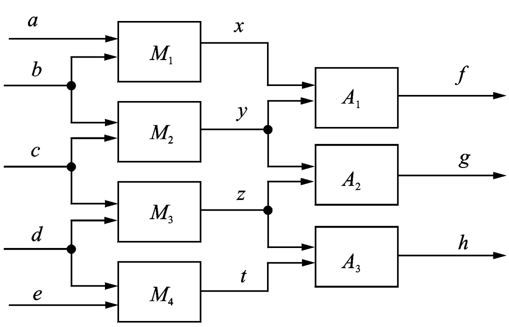

图1 一个加乘混合电路

$$PR_1: x - ab = 0 \text{ and } M_1 \quad (1)$$

$$PR_2: y - bc = 0 \text{ and } M_2 \quad (2)$$

$$PR_3: z - cd = 0 \text{ and } M_3 \quad (3)$$

$$PR_4: t - de = 0 \text{ and } M_4 \quad (4)$$

$$PR_5: f - x - y = 0 \text{ and } A_1 \quad (5)$$

$$PR_6: g - y - z = 0 \text{ and } A_2 \quad (6)$$

$$PR_7: h - z - t = 0 \text{ and } A_3 \quad (7)$$

式(1～7)给出的包含系统最小功能单元组件及其输入输出关系表达式的集合，称为系统的元关系(Primary relations, PRs)[7]。

系统变量(V)可以被分解为不可观测变量集(X)和可观测变量集(O)，即$V=X\cup O$。对于图1中的系统，如果输入已知，传感器放置在f,g和h，那么$O=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 而$X=\{x,y,z,t\}$[8]。ARRs是从系统模型演绎出的只含可观测变量的约束关系，它可以通过从元关系中消去不可观测变量的方法得到。

与ARRs有关的一个概念是支撑集，即与获取某ARRs有关的组件子集。在获取ARRs过程中，同时会形成故障特征矩阵，它是行为ARRs，列为故障(组件)的二进制0-1矩阵，矩阵的列定义为故障特征向量。

很明显，获取最大故障分辨力的有效途径是测量系统中的所有变量，但测量所有变量的部分子集也有可能获取同样的分辨力。因此求解最优传感器的问题等价于寻求传感器全集中的最小子集，使得该情况下的分辨力与传感器全集下所得分辨力一样。这首先需要假定系统中的所有未知变量都有一个虚拟传感器，相应地，所得ARRs都是虚拟ARRs，新形成的故障特征矩阵也成为HSM。

1.2 完备ARRs集的生成方法

ARRs集的完备性非常重要，因为只有完备的ARRs集才能为诊断和传感器配置提供最大可用的信息。在基于模型的故障诊断中，ARRs集的完备性直接决定系统的故障检测和隔离能力。因此下文将讨论完备ARRs集的生成方法。

上文所提及的元关系是ARRs的特例，就从这个概念开始来阐述生成完备ARRs集的逐次消元法。假设ARR集中任一R_j能用一个四元组$R_j=(N_j,C_j,S_j,T_j)$表示，N_j代表分配给R_j的序号，C_j代表支撑集，S_j代表R_j中的变量集，T_j代表生成R_j所用到的元关系。如果采用普通方法，有可能从不同的ARR组合得到相同的ARRs，为避免这种冗余，不失一般性，考虑两个ARRs $R_j=(N_j,C_j,S_j,T_j)$和$R_k=(N_k,C_k,S_k,T_k)$，如果满足$(S_j,T_j)=(S_k,T_k)$，就认为两个ARRs相同。现规定：在逐次消元法中，如果新生成的ARRs与此前已经生成的ARRs集中的某一ARRs相同，则不把该新的ARRs往ARRs总集中添加。如果如下两个条件$S_j\cap S_k\neq\Phi$和$T_j\cap T_k=\Phi$同时满足，则对于任一变量$x\in S_j\cap S_k$，新产生的ARRs如下：$R=(N,C_j\cup C_k,(S_j\cup S_k)-\{x\},T_j\cup T_k)$，$N$是新分配的序号。如果$R$与原ARRs集中的任何元素都不相同，则将$R$作为一个新的元素添加到ARRs总集中。重复上述过程，直到条件$S_j\cap S_k\neq\Phi$和$T_j\cap T_k=\Phi$不再满足。这就是生成完备ARRs集的逐次消元法。整个消元过程由几个循环构成，图2给出了上述过程的示意图。

每个循环都是从一个ARRs集D开始(D的初始值为PRs集)，整个过程产生了如下集：$D_1,D_2,D_3,\cdots,D_n$[9]，其中D_1被PRs集初始化，D_2是由D_1

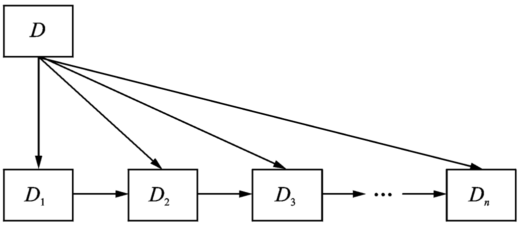

图 2　产生 ARRs 的完整过程

和 D 的组合生成的 ARRs 集。更一般地，D_{k+1} 是从 D_k 中的任一元素和 D 中的任一元素和组合通过消元形成的新 ARRs 集。把每计算一次 D_k 的过程称为逐次消元法的一个循环，直到 D_k 为空集，上述消元过程才结束。把每次通过上述方法新形成的 D_k 添加到候选全集中去。如果没有新集可以使循环继续进行，则上述过程就完全终止。

2　传感器优化问题建模与求解

一旦引入HSM 的概念后就很容易对传感器优化问题建模。首先来描述传感器优化问题中的两个基本要求：

(1)检测给定故障集 F 中的故障；

(2)隔离 F 中的故障。

问题(1)要求对任意 $f\in F$，故障集 F 的故障特征向量至少有一个不全为零的列，即至少能有一个传感器能检测到该故障。问题(2)要求对任两个不同的故障 $f_1, f_2\in F$，它们所对应的故障特征向量不同。基于故障特征向量，下面的定理把传感器优化问题归结为代数组合建模问题。

定理 1　假设 F 代表系统故障集，S 代表系统传感器集，$\boldsymbol{M}$ 是与之相关的HSM，那么故障检测和隔离问题可归结为如下两点[5]：

(1)当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 中没有全为零的列时，S 能检测给定故障集 F 中的所有故障；

(2)当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 中的所有列均不同时，S 能隔离给定故障集 F 中的所有故障。

HSM 蕴含了系统中所有可能的传感器，因此传感器优化问题可以归纳为：考虑某一系统的HSM，设为 $\boldsymbol{H}$，令 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$，即 $n\times m$ 维的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的转置，对 $\boldsymbol{H}$ 的每一行或对 $\boldsymbol{M}$ 的每一列，分别定义传感器集 $S(R)$ 和 $S(C)$。对传感器优化问题建模如下：选择 $\boldsymbol{M}$ 所有列的子集，使得由这些子集中的列新定义的子矩阵没有全为零的行，且子矩阵的行互不相同，那么相应传感器集中所含的传感器数目最小。

下面通过公式进一步描述上述问题。考虑二进制向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，其维数与矩阵 $\boldsymbol{M}$ 列数相同，如果 $x_j=1$ 代表当且仅当第 j 列选中，那么 $\boldsymbol{x}$ 可以理解为是对 $\boldsymbol{M}$ 列子集的选择。设 $\boldsymbol{E}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是合适维数的全 1 向量，则条件 $\boldsymbol{Mx}\geqslant\boldsymbol{E}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 所选择的解向量所构成的子矩阵没有全为零的行。对另一个条件，定义一个 $n(n-1)/2$ 行 m 列的矩阵 $\boldsymbol{M}_2$，$\boldsymbol{M}_2$ 的每一行 $\boldsymbol{R}_{ij}$ 对应着 $\boldsymbol{M}$ 的两行 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_j$，定义 $\boldsymbol{R}_{i,j}=\boldsymbol{R}_i\oplus\boldsymbol{R}_j$，$\oplus$ 表示异或运算，那么条件 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{E}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 所选择的解向量所构成的子矩阵没有相同的行。考虑矩阵 $\overline{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}$，那么传感器优化问题可以用式(8)来表达

$$\begin{aligned}&\min \bigcup_{i=1}^{m} S(x_i)\\ &\text{s.t.}\quad \overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{E},\quad x_j=0\ 或\ 1\end{aligned}\tag{8}$$

式(8)表示在故障集 F 中所有故障均可被检测、隔离的约束下，求取最小数目的传感器集合。这里，如果解中的某一维 $x_i=1$，则表示 $\boldsymbol{M}$ 的第 i 列被选中，相应地 $S(x_i)$ 表示与 $\boldsymbol{M}$ 的第 i 列相关的传感器集；如果 $x_i=0$，那么 $S(x_i)$ 表示空集。如果任两列对应的某一个或几个传感器相同，则相同的传感器只算一次，不重复计算，对所有被选中的列所对应的传感器取并集，得到传感器总数。

考虑如式(9)的 0-1 整数规划问题

$$\begin{aligned}&\min \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{cx}\\ &\text{s.t.}\quad \overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{E}, x_j=0\ 或\ 1\end{aligned}\tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{c}=[c_1, c_2, \cdots, c_i, \cdots, c_m]$，$c_i$ 表示 ARRs 集中第 i 行所含传感器的个数。则式(8)中的优化问题可以用式(9)近似。

求解该 0-1 整数规划问题常用方法有割平面法、分支定界法等。其中分支定界法基本思想是不断将可行域分割成小的集合，然后在小的集合上找整数最优解，在分割可行域时整数解并不会丢失。运用分支定界法求解式(9)的具体过程参见文献[7]，不赘述。

3　实例验证

以某型装备驱动电流控制电路为例，介绍完备 ARRs 集的生成过程及其在传感器优化问题中的应用。其电路如图 3 所示。

图 3 中的虚线框将被测电路分解成 5 个组件 $f_1\sim f_5$，同时 $f_1\sim f_5$ 也表示对应组件的故障，f_1 表示输入放大电路故障，f_2 表示差动放大器 Y_1 故障，

f_3 表示 Y_1 的输入电路故障，f_4 表示反相器故障，f_5 表示差动放大器 Y_2 故障，在所有组件的输出端口设置测试传感器集 $S=\{x_1,x_2,x_3,z_1,z_2\}$，得到如图4 所示的组件-传感器关联模型。

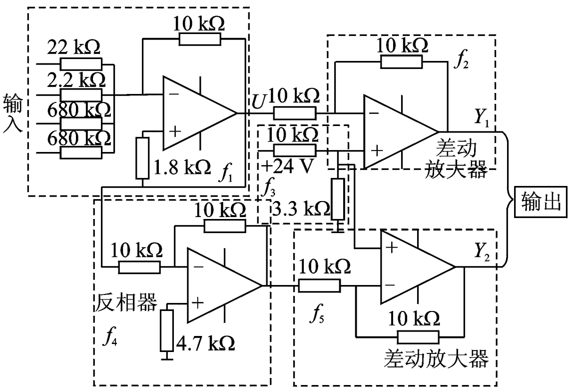

图 3　某型装备驱动电流控制电路

由关联模型得到如表1 中 $\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$ 所示的 5 个 PRs，即 D_1。

用上文中的逐次消元法生成了 21 个完备 ARRs。设 $\boldsymbol{H}$ 是维数为 21×5 的矩阵，其各行与表1 中 S_i 对应；$\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的转置矩阵，其维数为 5×21；将

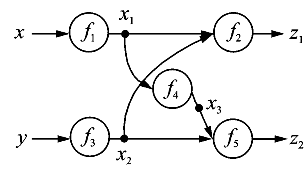

图 4　组件-传感器关联模型

$\boldsymbol{M}$ 各行取异或运算得 $\boldsymbol{M}_2$，其维数为 10×21 的矩阵；将 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}_2$ 联合得到 $\overline{\boldsymbol{M}}$，其维数为 15×21。令 $\boldsymbol{c}=[1,3,1,2,3,2,1,2,3,4,2,3,1,3,2,2,2,2,1,3,3]$，将 $\boldsymbol{c}$，$\overline{\boldsymbol{M}}$ 代入式(9)并用分支定界法求解，选中的 ARRs 行是：S_7，S_{13}，S_{19}，对应的 $\boldsymbol{H}$ 子矩阵 $\boldsymbol{H}_s$ 为

$$\boldsymbol{H}_s=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0\\1&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

由表1，S_7 对应的传感器为 $\{x_3\}$，S_{13} 对应的传感器为 $\{z_1\}$，S_{19} 对应的传感器为 $\{z_2\}$。将三者取并得到最优传感器集合是 $S_o=\{x_3,\ z_1,\ z_2\}$。可以看出：$\boldsymbol{H}_s$ 各列均不为全零向量且各列互不相同，故所有故障均能被检测、隔离。故只需用 S_o 中的传感器

表 1　图 3 中系统的 ARRs 集

序号	对应关系	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	传感器	PRs
S_1	$f(x_1)=0$	1	0	0	0	0	x_1	S_1
S_2	$f(x_1,x_2,z_1)=0$	0	1	0	0	0	x_1,x_2,z_1	S_2
S_3	$f(x_2)=0$	0	0	1	0	0	x_2	S_3
S_4	$f(x_1,x_3)=0$	0	0	0	1	0	x_1,x_3	S_4
S_5	$f(x_2,x_3,z_2)=0$	0	0	0	0	1	x_2,x_3,z_2	S_5
	$D_1=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$							
S_6	$f(x_2,z_1)=0$	1	1	0	0	0	x_2,z_1	S_1S_2
S_7	$f(x_3)=0$	1	0	0	1	0	x_3	S_1S_4
S_8	$f(x_1,z_1)=0$	0	1	1	0	0	x_1,z_1	S_2S_3
S_9	$f(x_2,x_3,z_1)=0$	0	1	0	1	0	x_2,x_3,z_1	S_2S_4
S_{10}	$f(x_1,x_3,z_1,z_2)=0$	0	1	0	0	1	x_1,x_3,z_1,z_2	S_2S_5
S_{11}	$f(x_3,z_2)=0$	0	1	0	0	1	x_3,z_2	S_3S_5
S_{12}	$f(x_1,x_2,z_2)=0$	0	0	0	1	1	x_1,x_2,z_2	S_4S_5
	$D_2=\{S_6,S_7,S_8,S_9,S_{10},S_{11},S_{12}\}$							
S_{13}	$f(z_1)=0$	1	1	1	0	0	z_1	S_1S_8
S_{14}	$f(x_3,z_1,z_2)=0$	1	1	0	0	1	x_3,z_1,z_2	S_1S_{10}
S_{15}	$f(x_2,z_2)=0$	1	0	0	1	1	x_2,z_2	S_1S_{12}
S_{16}	$f(z_1,z_2)=0$	0	1	0	1	1	z_1,z_2	S_2S_{12}
S_{17}	$f(x_3,z_1)=0$	0	1	1	1	0	x_3,z_1	S_3S_9
S_{18}	$f(x_1,\ z_2)=0$	0	0	1	1	1	$x_1,\ z_2$	S_3S_{12}
	$D_3=\{S_{13},S_{14},S_{15},\ S_{16},\ S_{17},\ S_{18}\}$							
S_{19}	$f(z_2)=0$	1	0	1	1	1	z_2	S_1S_{18}
S_{20}	$f(x_1,z_1,z_2)=0$	1	1	0	1	1	x_1,z_1,z_2	S_2S_{15}
S_{21}	$f(x_2,\ z_1,z_2)=0$	0	1	1	1	1	$x_2,\ z_1,z_2$	S_2S_{18}
	$D_4=\{S_{19},\ S_{20},\ S_{21}\}$							

就能实现对所有故障的检测隔离，与传感器全集 $\{x_1, x_2, x_3, z_1, z_2\}$ 相比减少了传感器数目，消除了冗余测试，从而在不降低故障检测、隔离能力的前提下减少了传感器放置代价，实现了传感器优化配置。

4　结束语

针对完备 ARRs 集在传感器优化配置问题中的重要作用，本文提出了一种用于产生完备 ARRs 集的逐次消元法。该方法以易确知的PRs 为基础，通过若干次循环消元过程生成了完备 ARRs 集，同时得到了HSM。基于HSM，把传感器优化配置问题映射为一个特殊的 0-1 整数规划模型，并用分支定界法求解该模型。应用表明，该方法能在保证故障检测、隔离的前提下减少传感器数目，避免了传感器盲目配置所带来的资源浪费，消除了冗余测试，从而降低了冗余测试给后续诊断带来的干扰和困难，增强了故障诊断中传感器配置的针对性。

参考文献：

[1] Fijany A, Vatan F. A new method for sensor placement optimization[C]// Proceedings of 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Tucson, AZ: AIAA, 2005: 1-8.

[2] Worden K, Burrows A P. Optimal sensor placement for fault detection [J]. Engineering Structures, 2001, 23(8): 885-901.

[3] Trave-Massuyes L, Escobet T, Olive X. Diagnosability analysis based on component-supported analytical redundancy relations[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part A): Systems and Humans Special Issue on Collaboration Support Systems, 2006, 36(6): 1146-1160.

[4] Rosich A, Sarrate R, Puig V, et al. Efficient optimal sensor placement for model-based FDI using an incremental algorithm[C]// Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans: IEEE, 2007: 2590-2595.

[5] Fijany A, Vatan F. A unified and efficient algorithmic approach to model-based diagnosis and optimal sensor placement[C]// The 8th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space. Munich: European Space Agency, 2005: 1-8.

[6] Cordier M O, Dague P, Levy F, et al. Conflicts versus analytical redundancy relations: a comparative analysis of the model based diagnosis approach from the artificial intelligence and automatic control perspectives[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B): Cybernetics, 2004, 34(5):2163-2177.

[7] Fijany A, Vatan F. A new efficient algorithm for analyzing and optimizing the system of sensors[C]// IEEEAC. Big Sky, MT: IEEE, 2006: 1-8.

[8] Fijany A, Vatan F. A novel method for derivation of minimal set of analytical redundancy relations for system diagnosis [C]// IEEEAC. Big Sky, MT: IEEE, 2010: 1-14.

[9] Fijany A, Vatan F. A new efficient method for system structural analysis and generating analytical redundancy relations[C]// IEEEAC. Big Sky, MT: IEEE, 2008: 1-12.

作者简介：杜敏杰(1984-)，男，博士研究生，研究方向：武器系统性能检测与故障诊断，E-mail：cherrydmj@sohu.com；蔡金燕(1961-)，女，教授，研究方向：检测理论、故障诊断、可靠性共性技术；刘利民(1971-)，男，副教授，研究方向：武器系统性能检测与故障诊断；陈鹏(1987-)，男，硕士研究生，研究方向：武器系统性能检测与故障诊断。