

# 单通道阵列无失真空时二维谱估计算法

张珂, 马鹏, 张剑云

(合肥电子工程学院 305 教研室, 安徽合肥 230037)

**摘要:** 针对单通道阵列空时二维谱估计问题, 提出了一种处理单通道阵列采样信号的新方法。该方法构建了单通道阵列特有的含有通道切换时间与采样间隔的阵列流型矩阵与导向矢量; 无需对原始采样信号进行预处理, 使其可直接应用于现有的谱估计算法。基于此信号处理方法, 给出了单通道空时平面阵以及去冗余的空时 L 型阵无失真二维谱估计算法, 两种算法在同等条件下以较小的硬件规模在避免信号失真的基础上从性能上更加逼近了常规阵列算法, 并通过算法成本比较证明了空时 L 型阵无失真二维谱估计算法具有较小的成本。仿真分析验证了该处理方法以及所提出算法的有效性。

**关键词:** 空时谱估计; 单通道阵列; 无失真处理; 阵列信号处理

**中图分类号:** TN911.72

## Distortionless Space-time Spectrum Estimate Algorithm in Switch Antenna Array System

Zhang Ke, Zhang Jian-yun

(Electronic Engineering Institute Lab305, Anhui Province Hefei 230037)

**Abstract:** A new sampled data processing method of switch antenna is proposed for space-time spectrum estimate in switch antenna array system. This method constructs the switch antenna array's particular array manifold matrix and steering vector which contains channel switch interval and sampling interval. It dispenses with pretreatment to original data so that they can apply to the existing spectrum estimate algorithm directly. Based on this data processing method, distortionless space-time planar array algorithm and irredundant L-shaped array spectrum estimate algorithm in switch antenna array are given. With smaller hardware scale, the two algorithms which avoid signal distortion are more closed to multi-receiver array algorithm in performance; the latter one's computational complexity is also lower through the comparison of algorithm cost among the classical algorithms and the proposed algorithms. Simulation analysis verifies that the two algorithms are effective.

**Keywords:** space-time spectrum estimate; switch antenna array; distortionless processing; array signal processing

### 1 引言

常规阵列中每个阵元均配置一个通道对各阵元进行采样。为获得高增益窄波束需采用较多的阵元, 相应的也就需要较多的通道。大量的通道意味着高昂的成本; 更需要注意的是: 各通道幅度与相位误差会使理想的阵列流型发生畸变, 导致性能急剧下降, 甚至完全失效<sup>[1]</sup>。

为缩减硬件规模, 降低硬件成本; 削弱通道幅相特性不一致问题对系统性能的影响, 单通道阵列 (switch antenna array, SAA)<sup>[2]</sup>应运而生。单通道阵列有多个阵元但仅有一个通道, 该通道以一定的时序间隔贯续接入各阵元进行采样。与常规阵列相比, 其硬件成本大为降低; 系统性能受通道不一致影响极小, 通过特定的系统结构与信号处理方法, 单通道阵列能逼近或达到常规阵列的DOA估计性能。

文献[3]提出了一种针对多个不同频率信源的空时二维谱估计算法, 采用插值恢复方法将贯续采样的信号恢复为多通道同时采样的信号, 对于恢复后的信号采用二维 MUSIC 算法进行空时谱估计。

该算法相对于仅能处理单频信号的单通道阵列DOA估计算法<sup>[4-6]</sup>, 具有更好的实际应用价值, 但它的局限性在于: 插值恢复方法需对原始采样信号做离散傅里叶变换, 对变换结果做滤波处理后再做离散傅里叶逆变换, 这样显然会增加算法复杂度并带来相当程度上的误差, 其估计性能以及算法效率要明显落后于同等条件下常规阵列算法。

本文提出一种新的处理单通道阵列采样数据的方法, 将贯续采样时的通道切换时间以及对同一阵元做时域采样中的采样间隔加以利用, 构建了单通道阵列特有的含有通道切换时间与采样间隔的

流型矩阵与导向矢量，使原始采样数据可直接应用于现有算法；无需预处理，避免了信号失真。

基于此处理方法，给出单通道空时平面阵无失真二维谱估计算法以及去冗余的 L 型阵无失真算法。理论推导与仿真分析均证明：两种算法在同等条件下以较小的硬件规模在避免信号频谱以及波形失真的基础上从性能上更加逼近了常规阵列算法，其中后者还具有较低的算法复杂度。

## 2 信号模型与系统结构

### 2.1 常规阵列

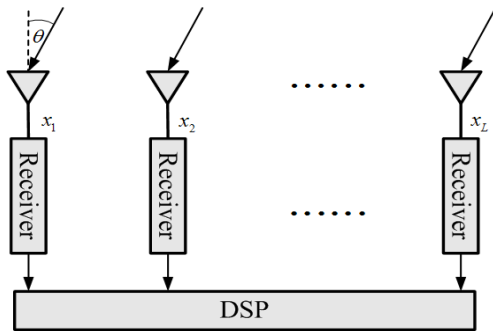


图 1 常规阵列系统结构

如图 1 所示，空间有  $K$  个频率分别为  $f_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ) 的远场窄带随机信号  $S_k(t)$  分别以方位角  $\theta_k$  入射至  $L$  元常规均匀线阵上，阵元间距为  $d$ ，其中第  $l$  个阵元在  $t$  时刻的输出信号可表示为：

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^K S_k(t) \exp[j2\pi f_k(l-1)\frac{d}{c} \sin \theta_k] + n_l(t) \quad (1)$$

其中  $c$  为光速， $l=1,2,\dots,L$ ，图 1 中参考阵元为  $x_1$ ， $n_l(t)$  为第  $l$  个阵元的零均值高斯加性白噪声。

### 2.2 单通道阵列

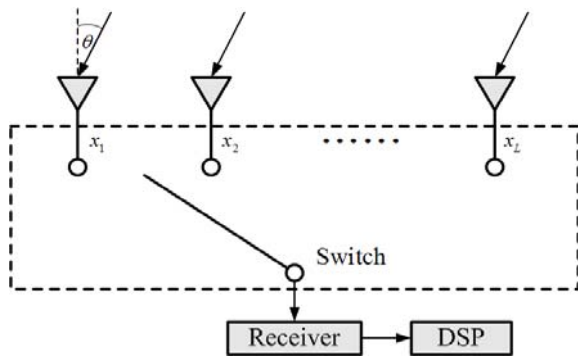


图 2 单通道阵列系统结构

如图 2 所示，单通道阵列系统只有一个通道，

因此在某一时刻只有一个阵元的信号被接收。信号处理模块通过时序控制模块控制接收通道轮流接入各阵元，也就是说所有阵元的信号是被贯续采样的，所有阵元按顺序各被采样一次称为一个轮巡。

设定通道切换时间为  $\tau_0$ ，按照阵元 1~ $L$  的顺序进行一次轮巡，若阵元 1 是在  $t_0$  时刻被采样的，则阵元  $l$  的采样时刻是  $t = t_0 + (l-1)\tau_0$ 。根据式(1)，阵元  $l$  被采样的信号为：

$$x_l[t_0 + (l-1)\tau_0] = \sum_{k=1}^K S_k[t_0 + (l-1)\tau_0] \exp[j2\pi f_k(l-1)\frac{d}{c} \sin \theta_k] + n_l[t_0 + (l-1)\tau_0] \quad (2)$$

由于  $S_k(t)$  为窄带随机信号，所以：

$$S_k[t_0 + (l-1)\tau_0] \approx S_k(t_0) \exp[j2\pi f_k(l-1)\tau_0] \quad (3)$$

将式(3)带入式(2)可得：

$$x_l[t_0 + (l-1)\tau_0] = \sum_{k=1}^K S_k(t_0) \exp[j2\pi f_k(l-1)(\frac{d}{c} \sin \theta_k + \tau_0)] + n_l[t_0 + (l-1)\tau_0] \quad (4)$$

将式(2)写成矢量形式：

$$\mathbf{X} = [x_1(t_0) \ x_2(t_0 + \tau_0) \ \dots \ x_L(t_0 + (L-1)\tau_0)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{S} = [S_1(t_0) \ S_2(t_0) \ \dots \ S_K(t_0)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{N} = [n_1(t_0) \ n_2(t_0 + \tau_0) \ \dots \ n_L(t_0 + (L-1)\tau_0)]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \exp(j2\pi f_1 \tilde{\tau}_{11}) & \exp(j2\pi f_2 \tilde{\tau}_{12}) & \dots & \exp(j2\pi f_K \tilde{\tau}_{1K}) \\ \exp(j2\pi f_1 \tilde{\tau}_{21}) & \exp(j2\pi f_2 \tilde{\tau}_{22}) & \dots & \exp(j2\pi f_K \tilde{\tau}_{2K}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j2\pi f_1 \tilde{\tau}_{L1}) & \exp(j2\pi f_2 \tilde{\tau}_{L2}) & \dots & \exp(j2\pi f_K \tilde{\tau}_{LK}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$  分别为采样数据矢量，信号矢量以及噪声矢量； $\mathbf{A}_0$  是一次轮巡时单通道阵列的流型矩阵，与常规流型矩阵的区别就在于

$\tilde{\tau}_{lk} = (l-1)\frac{d}{c}(\sin \theta_k + \tau_0)$ 。根据式(4)~(7)可得：

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (9)$$

## 3 信号处理方法及算法原理

### 3.1 单通道空时平面阵

如果只需进行频率估计，则仅对一个阵元按照一定采样间隔进行若干次采样后再进行数据处理即可实现；若要进行空时二维谱估计，就需要对多个阵元进行多次采样。基于多阵元多级延迟抽头的空时平面阵<sup>[7]</sup>二维 MUSIC 算法可以达到这一目的，

该算法需要每个阵元后接  $(N-1)$  级延迟抽头以及  $L \cdot N$  个通道, 每级延迟时间为  $\tau_s$ , 共进行  $M$  次快拍, 每次采集  $L \cdot N$  个数据, 快拍间隔为  $\tau_0$ .

结合空时平面阵二维 MUSIC 算法, 对于单通道系统提出一种单通道空时平面阵二维谱估计算法, 该算法采用文献[3]的数据采集方式, 利用单通道  $L \cdot N$  次采样获得类似于多通道情况下单次快拍的数据, 但无需预处理, 直接利用采样数据构成协方差阵。

数据采集方式为: 接收通道在  $t_0$  时刻切换至阵元 1, 每  $\tau_s$  时间进行一次采样, 共采样  $N$  次, 再切换至下一阵元进行  $N$  次采样, 直至对阵元  $L$  采样完毕, 通道切换时间为  $\tau_0$ . 这  $L \cdot N$  次采样称为一批采样, 共进行  $M$  批, 一批采样共耗时  $T_1 = NL\tau_s + L\tau_0$ .

根据采样定律, 为确保频率的无模糊估计, 必须达到:  $\tau_s \leq 1/2f_{\max}$ , 其中  $f_{\max}$  为  $K$  个信源可能出现的最高频率。第  $m$  批采样中第  $l$  个阵元第  $n$  次被采样的信号  $x_{nl}^{(m)}$  为:

$$x_{nl}^{(m)}[t_0 + (m-1)T_1 + (l-1)(\tau_0 + N\tau_s) + (n-1)\tau_s] = \sum_{k=1}^K S_k[t_0 + (m-1)T_1] \exp[j2\pi f_k(n-1)\tau_s] \exp[j2\pi f_k \tau_{lk}] \quad (10)$$

$$+ n_l[t_0 + (m-1)T_1 + (l-1)(\tau_0 + N\tau_s) + (n-1)\tau_s]$$

其中  $\tau_{lk} = (l-1)\frac{d}{c}(\sin \theta_k + \tau_0 + N\tau_s)$ . 令:

$$\mathbf{X}^{(m)} = [x_{11}^{(m)} x_{21}^{(m)} \cdots x_{N1}^{(m)} x_{12}^{(m)} x_{22}^{(m)} \cdots x_{N2}^{(m)} \cdots x_{1L}^{(m)} x_{2L}^{(m)} \cdots x_{NL}^{(m)}]^T \quad (11)$$

定义  $\mathbf{X}^{(m)}$  为第  $m$  批广义采样数据矢量, 它就是单通道对  $N \times L$  空时平面阵进行一批采样的结果。令:

$$\mathbf{S}^{(m)} = [S_1[(m-1)T_1] \ S_2[(m-1)T_1] \ \cdots \ S_K[(m-1)T_1]]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{N}^{(m)} = [n_{11}^{(m)} n_{21}^{(m)} \cdots n_{N1}^{(m)} n_{12}^{(m)} n_{22}^{(m)} \cdots n_{N2}^{(m)} \cdots n_{1L}^{(m)} n_{2L}^{(m)} \cdots n_{NL}^{(m)}]^T \quad (13)$$

其中  $n_{nl}^{(m)} = n_l[t_0 + (m-1)T_1 + (l-1)(\tau_0 + N\tau_s) + (n-1)\tau_s]$ .

令  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{a}_k$  分别为流型矩阵与导向矢量:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_K] \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\beta}_k = [1 \ \exp(j2\pi f_k \tau_s) \ \cdots \ \exp(j2\pi f_k (N-1)\tau_s)]^T \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k = [\exp(j2\pi f_k \tau_{1k}) \ \exp(j2\pi f_k \tau_{2k}) \ \cdots \ \exp(j2\pi f_k \tau_{Lk})]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{a}_k = \boldsymbol{\beta}_k \otimes \boldsymbol{\gamma}_k \quad (17)$$

其中  $\otimes$  为 Kronecker 积符号, 根据式(10)~(17)可得:

$$\mathbf{X}^{(m)} = \mathbf{A}\mathbf{S}^{(m)} + \mathbf{N}^{(m)} \quad (18)$$

$\mathbf{S}^{(m)}, \mathbf{N}^{(m)}$  分别为第  $m$  批采样时的广义信号矢量以及广义噪声矢量。综上可得阵列协方差阵为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(m)})^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s^{(m)}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (19)$$

其中  $\mathbf{R}_s^{(m)} = E[\mathbf{S}^{(m)}(\mathbf{S}^{(m)})^H]$ ,  $\sigma^2$  为噪声方差。

实际应用中可由  $M$  批采样得到的  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \cdots \mathbf{X}^{(M)}$  构成  $\mathbf{R}$  的估计:

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{m=1}^M \mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(m)})^H \quad (20)$$

对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行特征值分解, 构成噪声子空间  $\mathbf{E}_n$ ; 根据式(14)(15)(16)构成搜索导向矢量  $\mathbf{a}(f, \theta)$ , 令:

$$\boldsymbol{\beta} = [1 \ \exp(j2\pi f \tau_s) \ \cdots \ \exp(j2\pi f (N-1)\tau_s)]^T \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\exp(j2\pi f \tau_1) \ \exp(j2\pi f \tau_2) \ \cdots \ \exp(j2\pi f \tau_L)]^T \quad (22)$$

其中,  $\tau_l = (l-1)\frac{d}{c}(\sin \theta + \tau_0 + N\tau_s)$ , 则有:

$$\mathbf{a}(f, \theta) = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\gamma} \quad (23)$$

至此, 可按 MUSIC 算法构成空时二维谱估计公式:

$$P_{\text{SF}}(f, \theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(f, \theta) \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{a}(f, \theta)} \quad (24)$$

对式(24)进行二维谱峰搜索, 根据谱峰的位置就可估计出信号的频率与方位角。整个算法过程中不涉及采样信号波形或频谱上的改变, 即原始采样信号是在无失真的条件下被处理的。

### 3.2 单通道空时 L 型阵

3.1 节提出的算法采样耗时较长, 涉及高维特征分解以及二维谱峰搜索等复杂运算, 针对这些问题, 基于单通道阵列提出一种新的方法:

从  $t_0$  时刻起, 通道切换至阵元 1, 每  $\tau_s$  时间进行一次采样, 共采样  $(N+1)$  次, 获得以下数据:

$x_1(t_0), x_1(t_0 + \tau_s), \cdots, x_1[t_0 + (N-1)\tau_s], x_1[t_0 + N\tau_s]$ , 然后进行轮巡, 通道切换时间为  $\tau_0$ , 获得以下数据:

$x_2(t_0 + N\tau_s + \tau_0), x_3(t_0 + N\tau_s + 2\tau_0), \cdots, x_L[t_0 + N\tau_s + (L-1)\tau_0]$

$$\mathbf{Y} = [x_1(t_0) \ x_1(t_0 + \tau_s) \ \cdots \ x_1[t_0 + (N-1)\tau_s]]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{Z} = [x_1(t_0 + N\tau_s) \ x_2(t_0 + N\tau_s + \tau_0) \ \cdots \ x_L[t_0 + N\tau_s + (L-1)\tau_0]]^T \quad (26)$$

将以上  $(N+L)$  次采样称作一组采样, 其耗时为  $T_2 = N\tau_s + L\tau_0$ 。可将对阵元 1 的前  $N$  次采样看作是对一个时域子阵做采样, 而将后续对各阵元的一次轮巡看作是对一个空域子阵做采样, 两个子阵构成了单通道空时 L 型阵。定义  $\mathbf{Y}$  与  $\mathbf{Z}$  分别为一组采样中的时域数据矢量与空域数据矢量。按以上方法从  $t_0$  时刻起进行  $M$  组采样, 则第  $m$  组时域采样中阵元 1 第  $n$  次被采样的信号  $\tilde{x}_{n1}^{(m)}$  为:

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_{n1}^{(m)}[t_0 + (m-1)T_2 + (n-1)\tau_s] \\ &= \sum_{k=1}^K S_k[t_0 + (m-1)T_2] \exp[j2\pi f_k(n-1)\tau_s] \\ & \quad + n_1[t_0 + (m-1)T_2 + (n-1)\tau_s] \end{aligned} \quad (27)$$

其中  $n=1, 2, \dots, N$ ;  $m=1, 2, \dots, M$ . 令:

$$\mathbf{Y}_m = [\tilde{x}_{11}^{(m)} \quad \tilde{x}_{21}^{(m)} \quad \dots \quad \tilde{x}_{N1}^{(m)}]^T \quad (28)$$

$\mathbf{Y}_m$  为第  $m$  组采样的时域数据矢量, 再令:

$$\mathbf{S}_Y^{(m)} = \{S_1[t_0 + (m-1)T_2] \quad S_2[t_0 + (m-1)T_2] \quad \dots \quad S_K[t_0 + (m-1)T_2]\}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{N}_Y^{(m)} = \{n_1[t_0 + (m-1)T_2] \quad n_1[t_0 + (m-1)T_2 + \tau_s] \quad \dots \quad n_1[t_0 + (m-1)T_2 + (N-1)\tau_s]\}^T \quad (30)$$

$$\mathbf{a}_{YK} = [1 \quad \exp(j2\pi f_k \tau_s) \quad \dots \quad \exp[j2\pi f_k(N-1)\tau_s]]^T \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_Y = [\mathbf{a}_{Y1} \quad \mathbf{a}_{Y2} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{YK}] \quad (32)$$

根据式(27)~(31)可得:

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{A}_Y \mathbf{S}_Y^{(m)} + \mathbf{N}_Y^{(m)} \quad (33)$$

定义  $\mathbf{S}_Y^{(m)}$ ,  $\mathbf{N}_Y^{(m)}$  分别为第  $m$  组采样的时域子阵信号矢量以及时域子阵噪声矢量;  $\mathbf{A}_Y$  就是时域子阵的流型矩阵。综上可得时域子阵协方差阵为:

$$\mathbf{R}_Y = E[\mathbf{Y}_m \mathbf{Y}_m^H] = \mathbf{A}_Y \mathbf{R}_{S_Y}^{(m)} \mathbf{A}_Y^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (34)$$

其中  $\mathbf{R}_{S_Y}^{(m)} = E[\mathbf{S}_Y^{(m)} (\mathbf{S}_Y^{(m)})^H]$ . 实际上由  $M$  组采样得到的  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_M$  构成  $\mathbf{R}_Y$  的估计:

$$\hat{\mathbf{R}}_Y = \sum_{m=1}^M \mathbf{Y}_m \mathbf{Y}_m^H \quad (35)$$

由式(31)可得: 信号频率  $f$  为唯一的参变量。

对  $\hat{\mathbf{R}}_Y$  按一维 MUSIC 算法进行处理, 得到噪声子空间  $\mathbf{E}_{Yn}$ ; 时域子阵的搜索导向矢量为  $\mathbf{a}_Y(f)$ :

$$\mathbf{a}_Y(f) = [1 \quad \exp(j2\pi f \tau_s) \quad \dots \quad \exp[j2\pi f(N-1)\tau_s]]^T \quad (36)$$

至此, 可构成频率谱估计公式:

$$P_f(f) = \frac{1}{\mathbf{a}_Y^H(f) \mathbf{E}_{Yn} \mathbf{E}_{Yn}^H \mathbf{a}_Y(f)} \quad (37)$$

按式(37)进行一维谱峰搜索, 根据谱峰的位置就可得出信号频率的估计值  $\hat{f}_k$ .

第  $m$  组空域采样中阵元  $l$  的采样信号  $\tilde{x}_l^{(m)}$  为:

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_l^{(m)}[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s + (l-1)\tau_0] \\ &= \sum_{k=1}^K S_k[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s] \exp[j2\pi f_k \tilde{\tau}_{lk}] \\ & \quad + n_l[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s + (l-1)\tau_0] \end{aligned} \quad (38)$$

其中,  $\tilde{\tau}_{lk} = (l-1)\frac{d}{c}(\sin \theta_k + \tau_0)$ . 与时域子阵相似, 令:

$$\mathbf{Z}_m = [\tilde{x}_1^{(m)} \quad \tilde{x}_2^{(m)} \quad \dots \quad \tilde{x}_L^{(m)}]^T \quad (39)$$

$\mathbf{Z}_m$  为第  $m$  组采样的空域数据矢量, 它就是单通道

对空域子阵进行一次轮巡的结果。再令:

$$\mathbf{S}_Z^{(m)} = \{S_1[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s] \quad S_2[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s] \quad \dots \quad S_K[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s]\}^T \quad (40)$$

$$\mathbf{N}_Z^{(m)} = [n_1[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s] \quad n_2[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s + \tau_0] \quad \dots \quad n_L[t_0 + (m-1)T_2 + N\tau_s + (L-1)\tau_0]]^T \quad (41)$$

$$\mathbf{a}_{Zk} = [\exp(j2\pi f_k \tilde{\tau}_{1k}) \quad \exp(j2\pi f_k \tilde{\tau}_{2k}) \quad \dots \quad \exp(j2\pi f_k \tilde{\tau}_{Lk})]^T \quad (42)$$

$$\mathbf{A}_Z = [\mathbf{a}_{Z1} \quad \mathbf{a}_{Z2} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{ZK}] \quad (43)$$

根据式(38)~(43)可得:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{A}_Z \mathbf{S}_Z^{(m)} + \mathbf{N}_Z^{(m)} \quad (44)$$

定义  $\mathbf{S}_Z^{(m)}$ ,  $\mathbf{N}_Z^{(m)}$  分别为第  $m$  批采样的空域子阵信号矢量以及空域子阵噪声矢量;  $\mathbf{A}_Z$  就是空域子阵的流型矩阵。综上可得空域子阵协方差阵为:

$$\mathbf{R}_Z = E[\mathbf{Z}_m \mathbf{Z}_m^H] = \mathbf{A}_Z \mathbf{R}_{S_Z}^{(m)} \mathbf{A}_Z^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (45)$$

其中  $\mathbf{R}_{S_Z}^{(m)} = E[\mathbf{S}_Z^{(m)} (\mathbf{S}_Z^{(m)})^H]$ . 实际上, 由  $M$  组采样得到的  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_M$  构成空域子阵协方差阵的估计:

$$\hat{\mathbf{R}}_Z = \sum_{m=1}^M \mathbf{Z}_m \mathbf{Z}_m^H \quad (46)$$

由式(42)可得:  $f$  与  $\theta$  均为参变量。对  $\hat{\mathbf{R}}_Z$  按二维 MUSIC 算法进行处理, 得到噪声子空间  $\mathbf{E}_{Zn}$ ; 根据式(42)构成空域子阵的搜索导向矢量  $\mathbf{a}_Z(f, \theta)$ :

$$\mathbf{a}_Z(f, \theta) = [\exp(j2\pi f \tilde{\tau}_1) \quad \exp(j2\pi f \tilde{\tau}_2) \quad \dots \quad \exp(j2\pi f \tilde{\tau}_L)]^T \quad (47)$$

其中,  $\tilde{\tau}_l = (l-1)\frac{d}{c}(\sin \theta + \tau_0)$ 。

由  $\mathbf{E}_{Zn}$  与  $\mathbf{a}_Z(f, \theta)$  构成如下空时二维谱公式:

$$\tilde{P}_{SF}(f, \theta) = \frac{1}{\mathbf{a}_Z^H(f, \theta) \mathbf{E}_{Zn} \mathbf{E}_{Zn}^H \mathbf{a}_Z(f, \theta)} \quad (48)$$

将各  $\hat{f}_k$  分别代入式(48)中, 可得如下一维空间谱:

$$\tilde{P}_{SF}(\hat{f}_k, \theta) = \frac{1}{\mathbf{a}_Z^H(\hat{f}_k, \theta) \mathbf{E}_{Zn} \mathbf{E}_{Zn}^H \mathbf{a}_Z(\hat{f}_k, \theta)} \quad (49)$$

在式(49)中  $\hat{f}_k$  为已知数, 因此只要在每个  $\hat{f}_k$  已知的基础上做  $K$  次一维谱峰搜索, 再根据每次搜索时谱峰的位置就能确定与  $\hat{f}_k$  相对应的信号方位角  $\hat{\theta}_k$ 。

## 4 算法成本分析

本节将对采用多阵元多级延迟抽头的常规空时二维谱估计 MUSIC 算法(以下简称常规二维 MUSIC 算法)、文献[3]提出的基于插值恢复的空时二维谱估计算法(以下简称文献[3]算法)、本文提出的单通道空时平面阵无失真算法(以下简称本文算

法1)以及本文提出的单通道空时L型阵无失真算法(以下简称本文算法2)进行算法成本分析,分析内容有:硬件规模、数据采集耗时与算法复杂度。

#### 4.1 硬件规模分析

这里所分析的硬件规模主要是指数据采集之前的硬件部分,如阵元、延迟抽头以及接收通道。设定四种算法均基于 $L$ 元均匀线阵。

常规二维 MUSIC 算法需要每个阵元后接 $(N-1)$ 级延迟抽头以及 $L \cdot N$ 个通道;其余三种算法均只需要一个通道,无需延迟抽头。因此相比单通道算法,常规二维 MUSIC 算法的硬件规模是巨大的,除了会带来硬件成本的提高,多个通道引起的通道不一致问题与通道校正工作不容忽视。

#### 4.2 数据采集耗时分析

以常规二维 MUSIC 算法为参照,设定其需进行 $M$ 次快拍,每次快拍的数据量为 $L \cdot N$ ,快拍间隔为 $\tau_0$ ,因此总数据量为 $L \cdot N \cdot M$ ,总耗时为:

$$T_A = M \tau_0 \quad (50)$$

为达到 $L \cdot N \cdot M$ 的数据量,文献[3]算法与本文算法1均需进行 $M$ 批采样,每批采样中需依次对 $L$ 个阵元按照 $\tau_s$ 的采样间隔进行 $N$ 次采样,阵元切换时间为 $\tau_0$ ,因此总耗时为:

$$T_B = T_C = MLN\tau_s + ML\tau_0 = ML(N\tau_s + \tau_0) \quad (51)$$

本文算法2基于的空时L型阵相当于取了空时平面阵中的一行与一列,舍弃了大量的冗余数据,因此只需进行 $M$ 组采样即可近似达到文献[3]算法与本文算法1的效果,每组采样中需依次对阵元1按照 $\tau_s$ 的采样间隔进行 $N$ 次采样,再对所有阵元进行一次轮巡,阵元切换时间为 $\tau_0$ ,总耗时为:

$$T_D = M(N\tau_s + L\tau_0) \quad (52)$$

从硬件实现的角度来看,显然有:  $\tau_s \ll \tau_0$ . 根据四种算法的总耗时 $T_A, T_B, T_C, T_D$ 可得出以下结论:

常规二维 MUSIC 算法由于具有多通道同时采样的优势,数据采集速度最快;文献[3]算法与本文算法1同一时刻仅有一个通道在采样数据,因此采集速度要慢得多;而本文算法2舍弃了大量的冗余数据,相比文献[3]算法与本文算法1要节省了 $T_B - T_D = MN(L-1)\tau_s$ 的数据采集时间,大大提高了

数据采集速度。

#### 4.3 算法复杂度分析

待分析的四种算法均涉及MUSIC算法,常规 MUSIC 算法的运算复杂度<sup>[8]</sup>由三部分构成:

- 一、估计阵列协方差阵  $\mathbf{R}$ ;
- 二、对  $\mathbf{R}$  做特征分解并构造噪声子空间  $\mathbf{E}_n$ ;
- 三、按照一定的精度做谱峰搜索。

常规二维 MUSIC 算法、文献[3]算法与本文算法1均需通过 $M$ 次快拍或 $M$ 批采样构成 $NL \times NL$ 的阵列协方差阵  $\hat{\mathbf{R}}$ ,此过程的复杂度为 $O[M(NL)^2]$ ;这三种算法还需对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行特征分解以构成噪声子空间,运算复杂度为 $O[(NL)^3]$ ;得到二维谱表达式后还需进行二维搜索,设定空域搜索点数为 $W_s$ ,频域搜索点数为 $W_f$ ,则二维搜索点数为 $W_s \cdot W_f$ ,因此运算复杂度为 $O[W_s W_f (NL)^2]$ .文献[3]算法在构成  $\hat{\mathbf{R}}$  之前还需对每批采样中单个阵元的 $N$ 个数据做FFT运算,对其结果做插值处理后再做IFFT运算。 $N$ 点FFT与IFFT的运算复杂度<sup>[9]</sup>均为 $O(N \cdot \log_2 N)$ ,因此插值处理的运算复杂度为 $O(MLN \log_2 N)$ .综上所述,前三种算法的运算复杂度 $C_A, C_B, C_C$ 分别为:

$$C_A = O[M(NL)^2] + O[(NL)^3] + O[W_s W_f (NL)^2] \quad (53)$$

$$C_B = O(MLN \log_2 N) + O[M(NL)^2] + O[(NL)^3] + O[W_s W_f (NL)^2] \quad (54)$$

$$C_C = O[M(NL)^2] + O[(NL)^3] + O[W_s W_f (NL)^2] \quad (55)$$

对于本文算法2,需利用 $M$ 组采样数据构成 $N \times N$ 的  $\hat{\mathbf{R}}_r$  与 $L \times L$ 的  $\hat{\mathbf{R}}_z$  并进行特征分解;再进行1次一维频域搜索与 $K$ 次一维空域搜索,因此 $C_D$ 为:

$$C_D = O[M(N^2 + L^2)] + O(N^3 + L^3) + O(W_f N^2 + W_s KL^2) \quad (56)$$

表1 四种算法的各项成本分析

	硬件规模	数据采集耗时	算法复杂度
常规二维 MUSIC 算法	最大	最短	同本文算法1
文献[3]算法	最小	最长	最高
本文算法1	同上	同上	较高
本文算法2	同上	较短	最低

根据四种算法的复杂度 $C_A, C_B, C_C, C_D$ 可得:

前三种算法均涉及二维 MUSIC,因此运算复杂度远远高于本文算法2,尤其是文献[3]算法,由于

预处理过程中的运算，具有最高的复杂度。综合以上分析，将四种算法的三项成本总结表 1，由表 1 可得本文算法 2 总体上具有最小的算法成本。

## 5 仿真分析

设定仿真条件如下：2 个远场窄带信号入射到阵元间距为 1m 的 5 元均匀线阵上，2 个信号的参数分别为  $f_1 = 150\text{MHz}$ ,  $\theta_1 = 28^\circ$ ,  $f_2 = 100\text{MHz}$ ,  $\theta_2 = -6^\circ$ 。采用上述四种算法进行空时二维谱估计，对于四种算法均有  $N = 10$ ,  $M = 20$ ,  $\tau_s = 3\text{ns}$ ,  $\tau_0 = 1\mu\text{s}$ 。

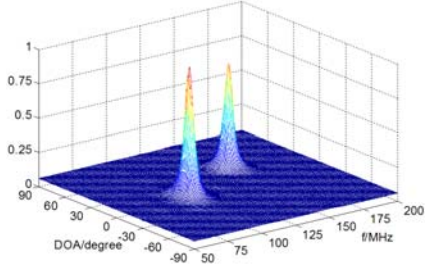


图 3 常规二维 MUSIC 空时二维谱图

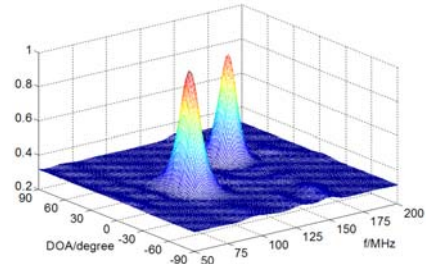


图 4 文献[3]算法空时二维谱图

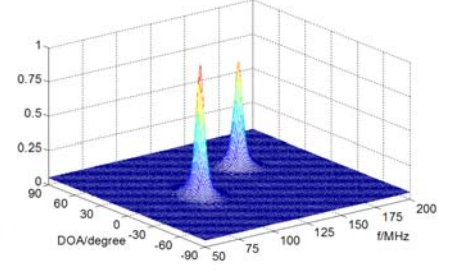


图 5 本文算法 1 空时二维谱图

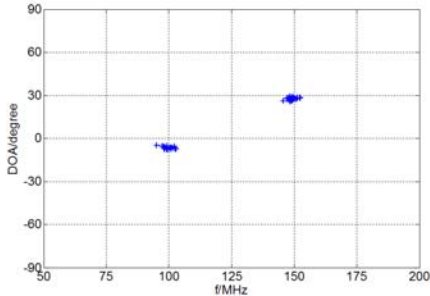


图 6 本文算法 2 估计轨迹

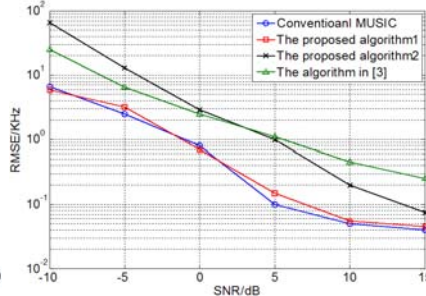


图 7 频率谱 RMSE 随 SNR 变化曲线

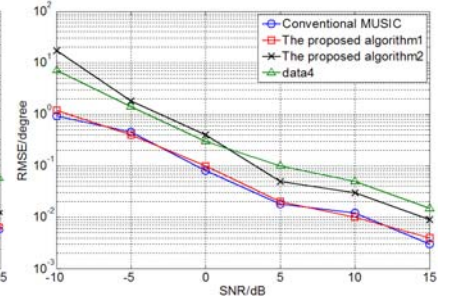


图 8 空间谱 RMSE 随 SNR 变化曲线

图 3~图 6 分别给出了  $\text{SNR} = 0\text{dB}$  时，四种算法的二维谱估计结果。其中对于前三种算法直接绘出了空时二维谱图(上图三维图，下图为等高线图)，本文算法 2 绘出了 20 次仿真的估计轨迹图。比较图 3 与图 5，本文算法 1 与常规二维 MUSIC 性能相当；而图 4 中伪峰较为突出，所以文献[3]算法的估计性能不及前两种算法。从图 6 可看出本文算法 2 能对频率与方位角给出较精确的估计。

定义频率谱与空间谱估计的 RMSE 分别为：

$$\text{RMSE}_f \triangleq \sqrt{\text{E} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{f}_k - f_k)^2 \right\}} \quad (57)$$

$$\text{RMSE}_\theta \triangleq \sqrt{\text{E} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2 \right\}} \quad (58)$$

图 7 与图 8 分别给出了四种算法在不同信噪比下进行 200 次独立 Monte-Carlo 实验的频率谱与功率谱估计最小均方根误差(RMSE)变化曲线。可以看出本文算法 1 与常规二维 MUSIC 性能相当并在 SNR 较低时要优于其他算法，这也证明了本文提出的单通道阵列无失真算法的有效性。本文算法 2 由于采集的数据要远少于其他三种算法，因此在 SNR 较低时 RMSE 较大，但在  $\text{SNR} \geq 0\text{dB}$  时也具有了较小的 RMSE，达到并超过了文献[3]算法的性能。

## 6 结束语

本文提出了一种单通道阵列的信号处理方法。该方法无需傅里叶变换、插值以及相位补偿等预处



理, 将通道切换时间与采样间隔予以保留, 构建了单通道阵列特有的流型矩阵与导向矢量, 使原始采样数据可直接应用于现有的谱估计算法, 并在此基础上提出了两种的单通道阵列无失真二维谱估计算法, 在估计性能上更加逼近了常规阵列算法。

#### 参考文献:

- [1] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 1945-1953.
- [2] Li Yang, Feng Zheng He. Switch antenna array with single receiving channel for FMCW radar [C]// Proceedings of International Symposium on Antennas and Propagation, Fukuoka: IEEE, 2000: 1629-1632.
- [3] Qu Jin You, Zhang Jian Yun, You Zhi Gang. Direction finding based on single receiving channel [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Signal Processing, Beijing: IEEE, 2006: 475-477.
- [4] Chong-Meng Samson See. High Resolution DF with a single channel receiver [C]// Proceedings of IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing, IEEE, 2001: 520-523.
- [5] Chong-Meng Samson See. A Single Channel Approach to High Resolution Direction Finding and Beamforming [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE, 2003: 217-220.
- [6] Hu De Xiu, Li Dong Hai, Cui Hao. A New Approach of High Resolution Direction Finding Using Single Channel Receiver [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Image Analysis and Signal Processing, Zhejiang: IEEE, 2010: 513-517.
- [7] Bricich R F, Zoubir A M, Pelin P. Detection of sources using Bootstrap techniques[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 39(1): 206-215.
- [8] Yang L, Attuah S, Mathew G. Stable Noise Subspace Estimation Algorithm Suitable for Vlsi Implementation [C]// IEEE Workshop on Signal Processing System, 2007:579-583.
- [9] S. G. Johnson, M.Frigo. A Modified Split-Radix FFT with Fewer Arithmetic Operations [J]. IEEE Trans.on Signal Processing, 2007.55(1):111-119.

#### 作者简介

张珂 (1985-), 男, 在读硕士生, 研究方向: 阵列信号处理, E-mail: 741589280@qq.com;

马鹏 (1984-), 男, 在读博士生, 研究方向: MIMO 雷达信号处理;

张剑云 (1963-), 男, 博士生导师, 研究方向: 雷达信号处理。