

基于张量低秩学习的多视图子空间聚类方法

史德胜¹, 徐鹤^{1,2}, 李鹏^{1,2}

(1.南京邮电大学计算机学院、软件学院、网络空间安全学院, 南京 210023;)

(2.江苏省高性能计算与智能处理工程研究中心, 南京 210023)

摘要: 多视图聚类是一种机器学习技术, 通过整合多源信息可以显著提升聚类性能。然而, 现有方法在处理多视图数据时未能充分利用张量低秩表示与亲和度矩阵之间的内在相关性, 同时在应对数据缺失、噪声和异常值时表现不佳。为解决这些问题, 本文提出了一种基于张量低秩学习的多视图子空间聚类方法。该方法通过对数据样本施加低秩约束, 深入挖掘数据点之间的高阶关联性, 精确识别数据的子空间结构。同时, 引入张量奇异值分解和加权张量核范数最小化方法, 对亲和度矩阵进行优化, 将聚类问题转化为一个凸优化问题求解, 确保了模型的鲁棒性和效率。此外, 方法在捕捉多视图数据复杂关联性方面表现出色, 能够更准确地识别数据的潜在子空间结构。实验结果表明, 本文方法在四类基准数据集上的性能优于现有方法, 具有高的准确性和鲁棒性。

关键词: 多视图聚类; 张量低秩; 子空间聚类; 高阶关联性

Multi-view subspace clustering method based on tensor low-rank learning

SHI Desheng¹, XU He^{1,2}, LI Peng^{1,2}

(1.School of Computer Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023;)

(2.Jiangsu HPC and Intelligent Processing Engineer Research Center, Nanjing 210023)

Abstract: Multi-view clustering is a kind of machine learning technique, with the potential to enhance the efficacy of clustering by integrating information from multiple sources. However, existing methods encounter limitations when dealing with multiview data, due to an inability to fully utilise the intrinsic correlation between the tensor low-rank representation and the affinity matrix, as well as under-performance in dealing with missing data, noise and outliers. To address these limitations, this paper proposes a multi-view sub-space clustering method based on tensor low-rank learning. The proposed method explores higher-order correlations between data points more thoroughly and accurately identifies the structure of the data by imposing low-rank constraints on data samples. Additionally, tensor singular value decomposition and weighted tensor kernel paradigm minimization method are employed to optimize the affinity matrix, transforming the clustering problem into a convex optimization problem to solve. This ensures the robustness and efficiency of the model. Furthermore, the method has been shown to effectively capture the intricate correlations present in multi-view data, thereby facilitating the identification of potential sub-space structures with greater precision. Extensive experimental evaluations have been conducted, using four distinct benchmark datasets, to assess the performance of the proposed method. The experimental results show that our method outperforms existing methods on four benchmark datasets, with high accuracy and robustness.

Key words: Multi-view clustering; tensor low rank; subspace clustering; high-order correlation

1 引言

随着现代信息技术的高速发展, 市面上的大多数应用都涉及多视图数据, 与单视图数据相比, 多视图数据来自多个特征提取器或不同的领域, 能够捕捉更丰富的特征和多样化的信息[1]。与此同时, 多视图学习在人工智能和数据分析中愈发受到关注, 因为它能够提供更为丰富且互补的信息, 从而增强模型的区分能力和分析深度[2,3]。然而, 尽管多视图数据提供了更为丰富的特征信息, 但其处理过程也变得更加复杂。在实际应用中, 采集到的多视图

收稿日期:2024-09-20;修回日期:2024-XX-XX

基金项目:国家重点研发计划(2019YFB2103003)资助项目

作者简介:史德胜, 男, 硕士生; 徐鹤(通信作者), 男, 博士, 教授, xuhe@niupt.edu.cn

数据往往并不完整, 存在视图缺失的现象[4]。例如, 在网页内容处理中, 有些网页可能同时包含文本、图像和视频, 而另一些网页则仅有文本, 从而导致视图不全。在工业监控领域, 多源数据通常由一组独立的检测器进行采集, 但由于检测器可能因故障或其他原因而无法正常工作, 导致部分数据无法获取或丢失。在多视图聚类任务中, 每个视图都提供了独特的数据特征, 这些特征相互补充, 共同促进了对数据的全面理解。这种多视图的协同效应对于聚类任务至关重要, 因为它可以帮助算法更准确地识别数据中的模式和结构。然而, 当某些视图因故障或其他原因而无法提供数据时, 这种信息的不完整性会对聚类结果的准确性和稳定性产生负面影响。具体来说, 缺失的视图可能导致聚类算法无法充分利用所有可用数据的协同效应, 从而影响聚类结果的准确性和稳定性, 即聚类算法能否准确地将相似的数据点分到同一个簇中, 并且这种聚类结果在不同的数据集或不同的初始化条件下是否保持稳定。目前, 国内外学者在研究多视图子空间聚类算法时, 通常采用一种两步策略[5-7]。首先, 对多视图数据进行张量表示学习[8-10]。在这个过程中, 来自不同视图的数据被组织成一个多维张量, 这种表示方式捕获了各个视图之间复杂的关系和关联特征。通过张量表示学习, 研究者可以在保持每个视图独立性和多样性特征的同时, 将来自不同视图的数据有效地整合到一个统一的框架中。完成张量表示学习后, 得到的表示张量会被融合成一个统一的相似度亲和矩阵。这一矩阵在多视图子空间聚类中起着至关重要的作用, 因为它能够反映各个数据点在所有视图下的整体相似性。通过融合不同视图的信息, 亲和度矩阵能够为后续的聚类过程提供更加全面和准确的依据。最终, 基于这个统一的亲和度矩阵, 采用子空间聚类算法对数据进行划分, 实现对多视图数据的聚类分析。然而, 通过这种方式学习得到的子空间自表示特征和聚类信息是独立且顺序进行的, 未考虑到张量表示学习对最终聚类计算结果的影响 [11], 并且忽视了张量秩对亲和度矩阵的先验特性影响。

为了解决这一问题, 需要一种能够同时学习表示张量和亲和度矩阵的方法, 从而更有效地捕捉它们之间的关联性。本文提出了一种基于张量低秩学习的多视图子空间聚类 (Tensor Low Rank on Multi-view Subspace Clustering, TLR-MVSC), 旨在有效减少噪声与异常值对亲和度矩阵的干扰, 并通过鲁棒性学习低秩张量表示, 从而优化亲和度矩阵, 提升多视图聚类性能。主要贡献概要如下:

(1)提出了一种基于低秩表示 (Low Rank Representation, LRR) 的高阶张量约束方法, 有效减少噪声和异常值对多视图数据聚类的影响。通过对数据样本施加低秩约束, 能够充分挖掘数据视图之间的高阶关联性, 从而更准确地揭示数据的子空间结构, 并增强亲和度矩阵的鲁棒性。

(2)亲和度矩阵采用基于张量奇异值分解 (tensor Singular Value Decomposition, t-SVD) 的张量核范数最小化 (Tensor Nuclear Norm Minimization, TNNM) 方法进行优化。该方法不仅能更好地捕捉高维数据的全局结构, 还能显著提升亲和度矩阵的质量, 从而在多视图数据的聚类性能上取得更优的表现。

(3)通过实验验证, 在人脸图像、新闻文本、手写数字和通用对象场景四类数据集上, 采用三种标准聚类评估指标进行性能评估, 并通过算法对比和评价指标分析, 验证了本文方法的性能和有效性。

2 相关工作

2.1 多视图数据

近年来, 为了充分挖掘缺失数据中的潜在信息, 学者们对不完备多视图聚类方法进行了广泛而深入的研究[12-18]。这些研究旨在开发能够处理视图缺失问题的算法, 以在不完整数据的情况下依然能够实现有效的聚类分析, 从而提升多视图学习的鲁棒性和应用广泛性。

其中, Lin 等人[19]提出了一种通过对比学习最大化不同视图间的互信息, 学习丰富一致表示, 并通过双重预测最小化条件熵, 有效恢复缺失视图。Wang 等人[20]将与单个视图相关的相似性诱导图、所有视图的统一图以及聚类指示矩阵整合到一个统一的框架中。这种方法通过融合多个视图的信息, 进一步提高了聚类结果的准确性和一致性。文献[21]提出了一种新的多视图谱聚类模型, 该模型同时执行图融合与谱聚类, 所得融合图近似于各独立视图的原图, 同时保有明确的聚类架构。Zhang 等人[22]通过引入各视图共享的潜在表示探索

数据集内部的低秩结构。陈梅等人[23]提出了一种新的基于多级自表示约束的不完备多视图聚类 CMLC (incomplete multi-view Clustering based on Multi-Level self representation Constraints), CMLC 方法利用公共潜在表示来恢复缺失值从而有效获取缺失部分的潜在信息来获得多视图数据的统一低秩表示。

2.2 子空间聚类

子空间聚类为解决高维多视图数据的聚类问题提供了一种有效途径[24]。这一方法通过子空间学习从数据中获取子空间表示后,构建表示矩阵并生成亲和矩阵,进而应用谱聚类[25]以获取聚类结果。子空间聚类在表示学习[26]、运动分割[27-29]和图像处理[30]等多个领域得到了广泛应用,已成为这些领域研究的重要工具。

文献[31]则提出了一种新颖的共识一步多视图子空间聚类 (Consensus One-step Multi-view Subspace Clustering, COMVSC) 方法,能够优化判别分区级信息的整合,并有助于消除数据中的噪声。陈梦瑶[32]等人提出了一种基于低秩表示的多视图聚类方法,能够有效提取数据的全局结构并对噪声具有较强的鲁棒性。为进一步提高聚类性能,他们提出了一种结合特征多样性增强和低秩表示的多视图聚类算法。

尽管这些研究在多视图数据处理和子空间聚类方面取得了显著进展,但它们在有效捕捉多视图数据之间的复杂关联性以及处理噪声和异常值影响方面仍存在一定不足。因此,基于张量低秩学习的多视图子空间聚类方法有望弥补这些不足,通过更精确地处理数据缺失和噪声问题,进一步提升聚类性能。

3 基于张量低秩学习的多视图子空间聚类方法

3.1 形式化表征

张量低秩约束的核心优势在于能够从多个视图中捕获数据的全局结构和高阶相关性。这种方法通过将不同视图的数据整合到一个统一的张量表示中,并施加低秩约束,从而挖掘数据点之间的深层次关系。与传统的矩阵分解不同,张量分解能够利用数据的多维结构,揭示出更加丰富的信息,这对于多视图聚类任务尤为重要。

通过对张量数据施加低秩约束,不仅能够减少噪声和异常值的影响,还能够强化视图间的协同效应。这种协同效应是通过在不同视图间,提高聚类结果的准确性和鲁棒性,从而找到共同的、一致的结构特征来实现的。具体来说,当一个视图中的数据由于某些原因(如传感器故障或数据丢失)不完整时,其他视图可以提供补偿信息,帮助恢复或估计缺失的数据,从而确保聚类算法能够充分利用所有可用信息。

此外,张量低秩约束还有助于揭示不同视图间的难以察觉的潜在关联,这些关联可能在单一视图中并不明显。通过对这些视图进行拟合计算,可以得到一个更加全面且准确的结构表示,这对于提高聚类性能至关重要。例如,在处理多源数据时,不同检测器可能捕获到的数据特征不同,但它们共同构成了对同一现象的完整描述。张量低秩约束通过优化这种多视图表示,使得聚类算法能够识别和利用这些跨视图的关联,从而提高聚类的准确性。

在数据科学和机器学习领域,形式化表征能够为问题建模提供明确的数学框架[32],从而更好地分析和解决实际问题。特别是在处理高维数据时,利用精确的数学描述可以帮助我们捕捉数据的内在结构,优化算法的性能,并提高模型的解释能力。

设 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$ 是 d 维数据向量的集合,我们假设每个数据向量是由 k 个未知维数 $\{S_i\}_{i=1}^k$ 的线性子空间交集得到的,为了找到 LRR $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, LRR 解决了以下秩最小化问题:

$$\min_Z \text{rank}(Z) \quad \text{s.t.} \quad Y = DZ \quad (1)$$

其中, $D = [d_1, d_2, \dots, d_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$ 是用于数据向量线性表示的字典。

由于问题(1)是非凸的 NP 难问题, LRR 采用核范式作为秩函数的常用替代方法,从而获得如下凸解:

$$\min_Z \|Z_*\| \quad \text{s.t.} \quad Y = DZ \quad (2)$$

其中, $\|Z_*\|$ 表示矩阵 Z 的核范数。上述优化问题可以利用奇异值分解有效解决,问题(2)

的解 Z 被认为是 Y 的LRR特征集，从整体上来看，构造的亲密度矩阵 $|Z| + |Z|^T$ 可以用于最终的谱聚类，得到 Y 的聚类结果。

为了更好地处理高维数据的结构复杂性，可以利用张量奇异值分解这一工具。

使用张量奇异值分解的核范数求解表达式如下：

$$\|X\|_{\odot} = \sum_{i=1}^{\min\{n_1, n_2\}} \sum_{j=1}^{n_3} |\hat{G}(i, j)| \quad (3)$$

其中， $\hat{G} = FFT(G, [], 3)$ 表示沿第三维方向的离散傅里叶变换，揭示了第 j 个正向切片的第 i 个奇异值。

张量奇异值分解不仅提供了一种有效的低秩近似方法，还能够捕捉数据的多维结构信息。然而，仅依赖单一的低维表示可能不足以揭示数据的全部特征。高维数据，如图像和视频，通常可以被描述为低维表示，这意味着几个参数可以表示复杂的结构。但实际上是高维数据通常可以用某几个低维子空间数据结构来间接表示，具有相同低维结构的样本通常高度相似。因此，可以通过划分子空间来获得聚类结果。

子空间聚类的目标是将样本点准确地分配到数据矩阵 X 中对应的子空间，该矩阵的样本点来源于多个子空间。子空间聚类可以通过“自表示”方式学习表征矩阵 Z ，也称为系数矩阵 Z 。“自表示”指的是每个数据点可以通过同一子空间内其它数据点的线性组合进行准确表示，其形式如下：

$$X = DZ + E \quad (4)$$

其中， D 是用于对数据进行线性表示的字典，通常用 X 来代替。 E 是表示原始数据 X 中的噪声的误差项。自表示的子空间聚类模型如下：

$$\min \lambda \Omega(Z) + \Phi(E) \quad (5)$$

其中， $\Omega(\bullet)$ 和 $\Phi(\bullet)$ 表示具体的正则化策略。 $\lambda > 0$ 是一个参数，用来平衡两个正则化器。

对于包含 V 个不同视图的多视图数据， $X_v \in \mathbb{R}^{d_v \times n}$ 表示第 v 个视图，其中 n 为样本的数量， d_v 是 X_v 的一个特定维度的维数。式(5)可以推广到多视图聚类(Multi-view Clustering, MVC)上定义为：

$$\min \sum_{v=1}^V \lambda \Omega(Z_v) + \Phi(E_v) \quad (6)$$

$$s. t. X_v = X_v Z_v + E_v$$

其中， X_v 是第 v 个视图的误差项， Z_v 是第 v 个视图的系数矩阵[34]。LRR是一种比较常用的策略，它可以包含错误(如噪声和异常值)的数据中恢复子空间结构。该策略在正则化项中使用秩函数 $\Omega(\bullet)$ ，通过秩最小化方法可以恢复潜在的行空间。然而，由于秩函数的离散性，获取解变得困难。在这种情况下，可以采用基于t-SVD的核范数作为其凸松弛。此外，为了减少噪声干扰，在正则化项 $\Phi(\bullet)$ 中可以使用 $\ell_{2,1}$ 范数来增强列稀疏性。基于以上两种策略，优化问题(6)可定义为：

$$\min \sum_{v=1}^V \lambda \|Z_v\|_* + \|E_v\|_{2,1} \quad (7)$$

$$s. t. X_v = X_v Z_v + E_v$$

在得到每个视图的优化结果 Z_v 后，相似矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 由下式计算得出：

$$S = \sum_{v=1}^V \frac{|Z_v| + |Z_v|^t}{2} \quad (8)$$

最后通过 S 进行谱聚类，得出最终结果。

3.2 基于张量低秩学习的子空间聚类模型

常见的张量低秩约束方法在处理奇异值时，通常对每个奇异值给予平等考虑，并通过相同的参数对其进行收缩。在实际应用中，矩阵的非零奇异值之间往往存在显著差异，特别是某些较大的奇异值通常代表了矩阵中携带的关键结构信息，这种显著差异被称为先验信息，对于图像去噪、矩阵补全等任务至关重要。此外，现有的张量低秩多视图方法通常将亲和矩阵的学习与谱聚类分为两个独立的步骤，因此，学习到的亲和矩阵无法很好地表征结构，限

制了聚类的性能。

通过学习每个视图的自表示系数矩阵，并结合张量核范数最小化问题，利用张量低秩约束来获得更好的自表示，这种自表示充分利用了数据间的高阶相关性和视图间的互补性，是本文提出的多视图子空间聚类方法的核心创新，并在其中引入自适应约束奇异值权重来约束张量先验结构信息。在此基础上，将谱聚类纳入统一框架中，有助于使最终的融合相似矩阵能够更好地表征聚类结构，从而提升聚类的效果。图 1 展示了所提出模型的框架。

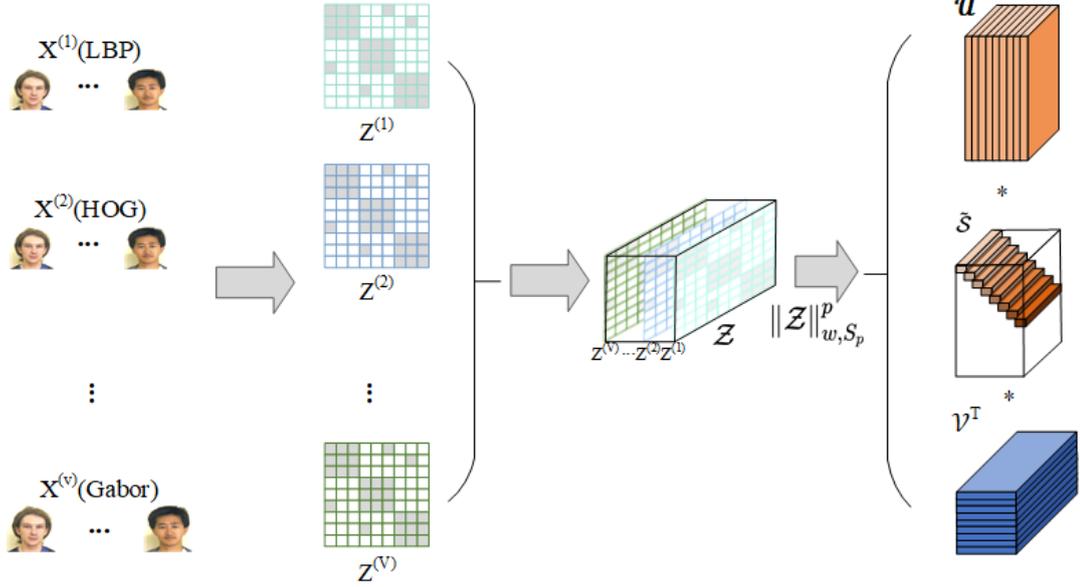


图 1 基于张量低秩学习的子空间聚类模型

Fig. 1 Model of subspace clustering based on tensor low-rank learning

3.3 融合自适应加权 Schatten-p 范数的张量低秩学习方法

张量核范数最小化[35]，是一种用于张量数据处理中进行低秩张量近似和恢复的方法，一般的张量核范数最小化的模型可以表示为：

$$\underset{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{A}\|_F^2 + \lambda \|\mathcal{X}\|_{\odot} \quad (9)$$

通过引入加权 Schatten-p 范数，来描述张量秩特性信息和充分利用张量奇异值的先验特性。对任意张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ，其定义如下：

$$\|\mathcal{X}\|_{\omega, S_p} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}^{(i)}\|_{\omega, S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{\min(n_1, n_2)} \omega_j * \sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (10)$$

其中， ω_j 是权重向量 ω 的第 j 个权重值， $\sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})$ 是 $\bar{\mathcal{X}}^{(i)}$ 的第 j 个最大奇异值， S_p 表示 Schatten-p 范数， p 表示幂次。

现有的张量低秩约束方法通常对每组奇异值采取相同的处理方式，通过相同的参数对所有奇异值进行放大或收缩，然而在实际应用中，矩阵的非零奇异值之间往往存在显著差异，而前几个最大的奇异值通常表征了矩阵中嵌入的显著结构信息。这种被称为先验信息的显著差异在图像去噪、矩阵补全等领域非常重要，因此通过引入自适应加权的张量 Schatten-p 范数，能够适当地学习每个视图的自表示系数矩阵，通过求解这一改进的约束问题，从而充分利用多视图的高阶信息和互补信息，有助于使最终的融合相似矩阵更好地表征聚类结构，从而显著提升聚类效果。目标模型表示如下：

$$\begin{aligned} \min_{Z, E^{(v)}, F} & \|Z\|_{\omega, S_p}^p + \lambda \|E\|_{2,1} + 2 \operatorname{atr}(F^T L_{\hat{Z}} F) \\ \text{s.t.} & X^{(v)} = X^{(v)} Z^{(v)} + E^{(v)}, v = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (11)$$

其中， $Z^{(v)}$ 是张量 $Z \in \mathbb{R}^{N \times m \times N}$ 的侧切片，即 $Z(:, v, :) = Z^{(v)}$ 。 $E^{(v)} \in \mathbb{R}^{d_v \times N}$ 是第 v 个视图的误差矩阵， $E = [E^{(1)}; \dots; E^{(m)}]$ 可以强制每个视图中 $E^{(v)}$ 的列具有共同一致的大小值。

$L_{\hat{Z}} = D_{\hat{Z}} - \hat{Z}$ 是拉普拉斯矩阵， $\hat{Z} = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{|Z^{(v)}| + |Z^{(v)}|^T}{2}$ 和 $D_{\hat{Z}}$ 是对角矩阵，其对角项为

$D_{\hat{Z}}(i, i) = \sum_j (\hat{Z}_{ij} + \hat{Z}_{ji})$, $F \in R^{c \times N}$ 表示聚类指标矩阵, 其中 c 是聚类个数。 λ 和 α 是两个平衡参数。

在模型(13)中, Schatten-p 范数的权重向量需要手动设置。当视图间存在巨大差异和复杂数据分布时, 为不同奇异值选取适当权重极具挑战性, 限制了算法灵活性。考虑到张量数据中的奇异值差异明显, 较大奇异值通常反映张量核心结构, 因此设计了自动加权机制以增强算法适应性与灵活性。具体来说, 对于张量 \bar{X} 的第 i 个奇异值 $\sigma_i(\bar{X})$, 可以定义相应的权重元素为:

$$\omega_i = \frac{L}{\sigma_i(\bar{X}) + \tau} + \omega'_i \quad (12)$$

3.4 张量低秩学习模型优化

在传统的张量低秩近似问题中, 通常假设张量的所有奇异值在优化过程中具有相同的重要性, 并通过一个固定的参数对它们进行统一的放缩。然而, 在我们的研究中, 观察到不同视图数据的贡献程度存在显著差异, 特别是当某些视图因数据缺失或噪声干扰而变得不可靠时。为了解决这一问题, 本文加入的自适应加权张量 Schatten-p 范数方法, 以动态调整不同奇异值的权重, 从而更好地捕捉多视图数据的互补信息和高阶相关性。

具体来说, 我们的方法通过引入一个自适应权重向量来调整张量核范数, 其中每个权重因子是基于对应奇异值的重要性自动确定的。这种方法不仅考虑了奇异值的大小, 还考虑了它们在不同视图数据中的作用和可靠性。通过这种方式, 我们的方法能够自适应地突出重要视图的贡献, 并抑制不可靠视图的影响, 从而提高结果的准确性。

为了实现这一自适应加权机制, 我们设计了一种基于数据驱动的权重更新策略。在每次迭代中, 我们根据当前估计的亲密度矩阵来更新权重向量, 使得较大的奇异值 (对应于关键结构信息) 获得较大的权重, 而较小的奇异值 (可能对应于噪声或异常值) 获得较小的权重。这种动态调整策略使得我们的优化算法能够更加灵活地对应数据的复杂性和变化性。

引入辅助变量 Q , J 后构建增广拉格朗日函数, 模型 (11) 重构为无约束优化问题:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}, J, E^{(1)}, \dots, E^{(m)}, F) = & \|J\|_{\omega, S_p}^p + \lambda \|E\|_{2,1} + 2\alpha \text{tr}(F^T L_2 F) \\ & + \sum_{v=1}^m \left(\langle Y^{(v)}, X^{(v)} - X^{(v)} Z^{(v)} - E^{(v)} \rangle + \langle Q, Z - J \rangle + \frac{\rho}{2} \|Z - J\|_F^2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中矩阵 $Y^{(v)}$ 和张量 Q 代表两个拉格朗日乘子, μ 和 ρ 是惩罚参数。

因此, 模型 (13) 可以分解为求解下列四个子问题:

子问题(1): 求解 $Z^{(v)}$, 变量 E, J, F 是固定的。

$$\begin{aligned} \arg \min & 2\alpha \text{tr}(F^T L_2 F) + \langle Q, Z - J \rangle \\ & + \sum_{v=1}^m \left(\langle Y^{(v)}, X^{(v)} - X^{(v)} Z^{(v)} - E^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X^{(v)} - X^{(v)} Z^{(v)} - E^{(v)}\|_F^2 \right) \\ & + \frac{\rho}{2} \|Z - J\|_F^2 \\ = \arg \min & 2\alpha \text{tr}(F^T L_2 F) + \langle Q, Z - J \rangle \\ & + \sum_{v=1}^m \left(\frac{\mu}{2} \|X^{(v)} - X^{(v)} Z^{(v)} - E^{(v)}\|_F^2 + \frac{Y^{(v)}}{\mu} \right) + \frac{\rho}{2} \|Z^{(v)} - J^{(v)} + \frac{W^{(v)}}{\rho}\|_F^2 \\ & + \frac{\rho}{2} \|Z - J\|_F^2 \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $P = [P_1, \dots, P_j, \dots, P_N]$, $P_j = [\|F_1 - F_j\|_2^2; \dots; \|F_N - F_j\|_2^2]$, F_j 是 F 的第 j 行, 然后, 可以得到:

$$\begin{aligned} 2\text{tr}(F^T L_2 F) & = \text{tr}(P^T \hat{Z}) \\ & = \text{tr} \left(P^T \left(\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{|Z^{(v)}| + |Z^{(v)}|^T}{2} \right) \right) \\ & = \frac{1}{2m} \sum_{v=1}^m \text{tr} \left(P^T |Z^{(v)}| + P^T |Z^{(v)}|^T \right) \end{aligned} \quad (15)$$

此时，模型（14）可以写变成：

$$\operatorname{argmin} \frac{\alpha}{2m} \operatorname{tr} \left(P^T |Z^{(v)}| + P^T |Z^{(v)}|^T \right) + \frac{\mu}{2} \|X^{(v)} - X^{(v)}Z^{(v)} - E^{(v)} + \frac{Y^{(v)}}{\mu}\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|Z^{(v)} - J^{(v)} + \frac{W^{(v)}}{\rho}\|_F^2 \quad (16)$$

模型（16）的解为：

$$\begin{aligned} Z_t^{(v)} &= (\mu X^{(v)T} X^{(v)} + \rho I)^{-1} \cdot (\mu X^{(v)T} X^{(v)} + X^{(v)T} Y^{(v)} + \rho J^{(v)} \\ &\quad - \mu X^{(v)T} E^{(v)} - W^{(v)}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2M} \left(P \odot \operatorname{sign} \left(Z_{t-1}^{(v)} \right) + P^T \odot \operatorname{sign} \left(Z_{t-1}^{(v)} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (17)$$

子问题(2):求解 $E^{(v)}$ ，变量 $Z^{(v)}, J, F$ 是固定的。

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_E \lambda \|E\|_{2,1} + \sum_{v=1}^m \langle Y_v, X^{(v)} - X^{(v)}Z^{(v)} - E^{(v)} \rangle + \sum_{v=1}^m \frac{\mu}{2} \|X^{(v)} - X^{(v)}Z^{(v)} - E^{(v)}\|_F^2 \\ = \operatorname{argmin}_E \frac{\lambda}{\mu} \|E\|_{2,1} + \frac{1}{2} \|E - D\|_F^2 \end{aligned} \quad (28)$$

模型最优解由文献[23]得到：

$$E_{:,i}^* = \begin{cases} \frac{\|D_{:,i}\|_2 - \frac{\lambda}{\mu}}{\|D_{:,i}\|_2} D_{:,i} & \|D_{:,i}\|_2 > \frac{\lambda}{\mu} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

其中， $D_{:,i}$ 表示 $D = [D^1; \dots; D^m]$ 的第 i 列， $D^j = X^j - X^j Z^j + \frac{1}{\mu} Y_j, j = 1, \dots, m$ 。

子问题(3):求解 J ，变量 $Z^{(v)}, E^{(v)}, F$ 是固定的。

$$\begin{aligned} J^* &= \operatorname{argmin}_J \|J\|_{\omega, S_p}^p + \langle Q, Z - J \rangle + \frac{\rho}{2} \|Z - J\|_F^2 \\ &= \operatorname{argmin}_J \|J\|_{\omega, S_p}^p + \frac{\rho}{2} \left\| Z - J + \frac{Q}{\rho} \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (20)$$

最优解为：

$$J^* = \Gamma_{\frac{1}{\rho} n_3 \omega} \left(Z + \frac{1}{\rho} Q \right) \quad (21)$$

子问题(4):求解 F ，变量 $Z^{(v)}, E^{(v)}, J$ 是固定的。

在这种情况下，（15）变成：

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{argmin}_F \operatorname{tr} (F^T L_2 F) \\ \text{s. t. } &F^T F = I, F \in \mathbb{R}^{N \times c} \end{aligned} \quad (22)$$

通过模型推导分析，得出其伪代码如表 1 呈现。

表 1 TLR-MVSC 伪代码
Table 1 TLR-MVSC pseudo-codes

算法 3.1 TLR-MVSC

输入：多视图聚类矩阵： $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)}$, 参数 α, λ 和类别数 K ;

输出：聚类结果 C

初始化： $Z^{(v)} = 0, E^{(v)}, Y^{(v)} = 0, i = 1, \dots, m, J = 0, Q = 0, \mu = 10^{-5}, \rho = 10^{-4}, \mu_{max} = \rho_{max} = 10^{10}$

while 不收敛 **do:**

-
- (1)通过公式(17)更新 $Z^{(v)}, v = 1, 2, \dots, m$;
 - (2)通过公式(20)更新 E ;
 - (3)通过 $Y^{(v)} = Y^{(v)} + \mu(X^{(v)} - X^{(v)}Z^{(v)} - E^{(v)})$ 更新 $Y^{(v)}, v = 1, 2, \dots, m$;
 - (4)得到 $Z = \Theta(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(m)})$;
 - (5)通过公式(21)更新 J ;
 - (6)通过 $Q = Q + \rho(Z - J)$ 更新 Q ;
 - (7)通过公式(22)更新 F ;
 - (8)更新参数 μ 和 ρ : $\min(\eta\mu, \mu_{max}), \min(\eta\rho, \rho_{max})$;
 - (9)得到 $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(m)} = \Theta^{-1}(J)$;
 - (10)检查收敛条件

$$\|X^{(v)} - X^{(v)}Z^{(v)} - E^{(v)}\|_{\infty} < \varepsilon \quad \& \quad \|Z^{(v)} - J^{(v)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

end while

- (11)通过 $S = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m (|Z^{(v)}| + |Z^{(v)T}|)$ 得到亲和度矩阵 S ;
 - (12)在 S 上进行谱聚类得到最终结果 C .
-

4 实验与结果分析

4.1 数据集

为了评估算法效能,本研究在以下类别数据集进行实验,这些类别包括人脸图像、新闻文本、手写数字和通用对象场景,分别使用了广泛接纳的数据集进行验证。

1) **Yale**: 在本研究中,我们采用了由 15 位参与者提供的总计 165 张灰度图像作为数据集。每位参与者贡献了 11 张图像,这些图像通过引入不同的照明条件、面部表情及遮挡因素,展现了丰富的多样性。在实验过程中,该数据集被有效利用以评估并比较不同计算机视觉算法的表现,我们利用[24]中的方法选择三种类型的特征作为不同的视图。

2) **ORL** 数据库: 该数据库由英国剑桥实验室开发,包含 40 位个体在不同时间点、照明条件、面部表情状态以及是否佩戴眼镜等变量下的共计 400 张面部图像。此数据库与 Yale 数据库均隶属于面部图像领域,并且通过提取强度、局部二值模式(LBP)及高斯小波包(Gabor)特征,实现了对于多视图数据的多元表示。

3) **3Sources**: 本研究利用了一个多元视角文本数据集,其包含了 416 篇独立的新闻报道,这些信息源自于 BBC、路透社及《卫报》三家在线新闻媒体平台。所述数据集被细分为六大主题标签,具体包括商业、娱乐、健康、政治、体育及技术领域。这一数据集的特性在于它由三种不同类型的特征组成,形成了一个多层次、多维度的数据结构。

4) **BBCSport**: 归类于新闻故事领域,其源自于 2004-2005 年间 BBCSport 网站上所发布的五个主题领域的体育新闻文章,此资源广泛应用于机器学习研究作为评估基准。该数据集由 685 个包含五种不同特征的文档组成,共同构成了一个多视图数据集。

5) **UCI-Digits**: 此数据集由源自荷兰公共事业地图库的手写数字(范围为 0 至 9)构成,共计十类阿拉伯数字,每类别包含 200 张图像。根据文献[35]的指引,从该数据集中提取了三个特征作为多视图数据的基础: 傅里叶系数、像素均值以及形态特征。

6) **Scene-15** [37]: 该数据库共有 15 个场景类别,总计 4485 张图像。所有的图像都来源于广泛的室内和室外环境,如工业,卧室,厨房,办公室,商店等。在实验中,我们通过[37]中的方法提取了三种类型的图像特征,包含 1240 维的 CENTRIST 特征,1800 维的 PHOW 特征,1180 维的 PRI-CoLBP。

表 2 实验数据集

Table2 Experimental data set

数据集	样本数量	类别	视图	种类
Yale	165	15	3	面部图像
ORL	400	40	3	面部图像
3Sources	169	6	3	新闻故事
BBCSport	685	5	4	新闻故事
UCI-Digits	2000	10	3	手写教学
Scene-15	4485	15	3	通用对象

4.2 评价指标与对比算法

本次实验采用三项标准聚类评估指标，包括准确度（ACC）、归一化互信息（NMI）及纯度（Purity），以评测聚类效能。

ACC 的定义如下：

$$ACC = \frac{\sum_{i=1}^N \delta(b_i, \text{map}(a_i))}{N} \quad (23)$$

NMI 定义如下：

$$NMI(C, C') = \frac{MI(C, C')}{\max(H(C), H(C'))} \quad (24)$$

聚类评估指标 Purity 的计算方法如下：

$$Purity = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (25)$$

n_1 表示一对样本在实际分类下同属一类，在预测分类下亦同属一类的样本数量。 n_2 则指在实际分类下非同类，在预测分类下却误判为同类的样本对数。这里，与代表数据集中的各类别总数，而与分别对应于被选类别在各自类别与其他类别间的联合概率。

在多视图聚类算法中，张量化方法通过将多视图数据表示为张量并施加低秩约束，有效提取了视图之间的高阶相关性。例如，t-SVD-MSC[40]、ETLMSC[41]和 WTNNM[42]通过不同的张量核范数约束来捕捉视图信息，减少噪声影响，而 MLAN 则自适应地调整图的权重以优化聚类效果。

通过矩阵旋转构建多视图子空间表示的张量，整合张量的低秩约束与多秩约束，以统一多视角自表示，优化聚类性能。

ETLMSC(Essential Tensor Learning for Multi-view Spectral Clustering)[40]: 构建基于马尔可夫链的多视图转移概率矩阵为张量，通过张量奇异值分解(t-SVD)驱动的张量核范数约束，高效捕获多视图间的高阶关联信息。

WTNNM: tensor-svd 基于图学习的多视图子空间聚类[41]: 引入了加权张量核范数与 t-SVD 结合，有效约束多视图子空间表示形成的张量结构，精确评估各视图信息价值，显著降低噪声干扰，优化聚类效果。

MLAN (Multi-View Clustering and Semi-Supervised Classification with Adaptive Neighbors)[42], 不仅集成聚类与局部流形结构学习功能，还能自适应调整每张图的权重，最终生成的优化图结构能精确对应所需的类别数量。

4.3 计算复杂度与收敛性分析

计算复杂度主要在求解变量与迭代过程，具体为： $O(mN^2d_v)$, $O(mN^2 \log(mN) + m^2N^2)$, $O(mN^2)$ 和 $O(N^3)$ ，这里 m 代表视图数量， S 是每视图样本数， N 是第 i 视图的维度。综合考虑迭代周期与特定条件后，迭代次数 T 以及条件 $m \ll N$ ，本算法的总复杂度是 $O(T(N^3 + 2mN^2d_v + mN^2 \log(mN)))$ 。

计算复杂度的分析还不足以完全评估一个算法的实际性能，因此为了全面理解和验证所提出方法的有效性，还需要对其收敛性进行深入探讨。

当变量个数为 2 时，拉格朗日乘子法求解的收敛性得到良好证明[43]；对于变量个数大于或等于 3 的情形，算法收敛性未能证实。鉴于此，本文通过实验验证模型收敛性，具体地，在六个数据集上评估其收敛表现。图 2 列出变量误差 $\|Z^{(v)} - J^{(v)}\|_{\infty}$ 迭代次数与论文主题相关。据图所示，所有迭代在达到 20 次后稳定，证实方法有效收敛。实验显示，本文算法展现出优越的收敛性能。

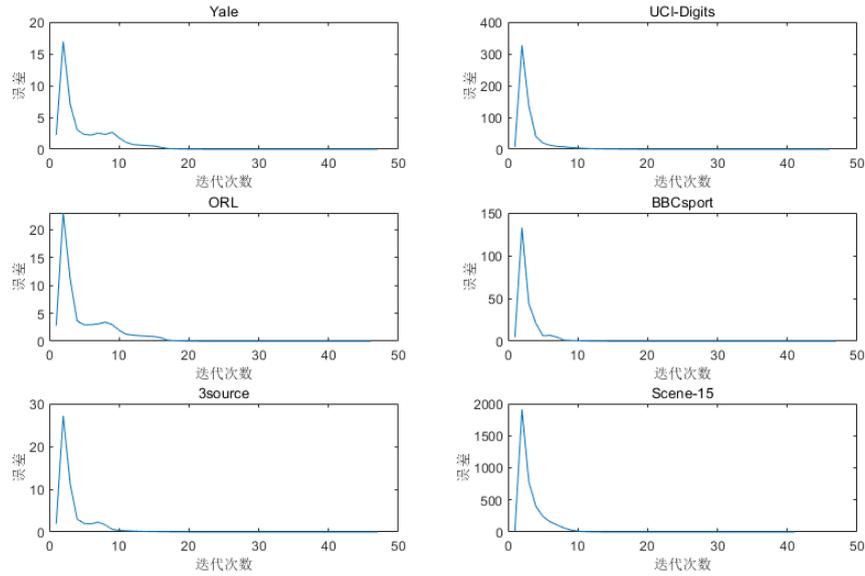


图 2 收敛性实验
Fig. 2 Convergence experiment

4.4 实验参数说明

在实验参数设定过程中,为了确保所提出算法在不同数据集上的泛化能力以及能够取得最优的聚类效果,我们对关键参数 α 和 λ 进行了广泛的调整和优化。具体来说,参数 α 和 λ 的选择对于算法的性能至关重要,因此在实验中我们对这两个参数进行了系统的搜索,通过在预设的参数范围内不断调整并测试不同组合,以此来找出在各个数据集上表现最优的参数设置。

α 在 $[10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1]$ 范围内调整, λ 在 $[0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$ 范围内调整。具体来说,本文的方法在 Yale 数据集上当 $\alpha = 10^{-7}, \lambda = 0.1$ 获得最好的性能;在 UCI-Digits 数据集上,当 $\alpha = 10^{-8}, \lambda = 0.1$ 获得最好的性能;在 ORL 数据集上,当 $\alpha = 10^{-7}, \lambda = 0.5$ 获得最好的性能;在 BBC Sport 数据集上,当 $\alpha = 10^{-8}, \lambda = 1$ 获得最好的性能;在 3Source 数据集上,当 $\alpha = 10^{-5}, \lambda = 0.4$ 获得最好的性能;在 Scene-15 数据集上,当 $\alpha = 10^{-8}, \lambda = 0.1$ 获得最好的性能。每个实验重复 10 次,表列出了所有的方法的各项评价指标。

表 3 Yale Database 实验结果
Table 3 Yale Database experiment results

方法	Yale Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MSC	0.874±0.013	0.918±0.010	0.883±0.012	0.834±0.020	0.865±0.018	0.832±0.002
ETLMSC	0.659±0.042	0.697±0.038	0.659±0.043	0.533±0.044	0.550±0.048	0.501±0.021
WTNNM	0.832±0.000	0.882±0.000	0.911±0.000	0.861±0.000	0.831±0.000	0.840±0.000
MLAN	0.594±0.000	0.493±0.000	0.665±0.001	0.312±0.003	0.428±0.016	0.253±0.004
本文方法	0.981±0.000	0.977±0.000	0.981±0.000	0.963±0.000	0.964±0.000	0.960±0.000

表 4 UCI-Digits Databas 实验结果
Table 4 Results of UCI-Digits Databas Experiments

方法	UCI-Digits Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MSC	0.965±0.000	0.919±0.000	0.965±0.000	0.935±0.000	0.922±0.000	0.918±0.000
ETLMSC	0.942±0.000	0.902±0.000	0.942±0.000	0.905±0.000	0.887±0.000	0.879±0.000

WTNNM	0.984±0.000	0.962±0.000	0.982±0.000	0.972±0.000	0.970±0.000	0.970±0.000
MLAN	0.721±0.006	0.710±0.006	0.771±0.006	0.720±0.047	0.767±0.007	0.706±0.006
本文方法	0.995±0.000	0.986±0.006	0.995±0.000	0.990±0.000	0.990±0.000	0.988±0.000

表 5 ORL Database 实验结果
Table 5 ORL Database experiment results

方法	ORL Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MS	0.962±0.008	0.990±0.003	0.973±0.006	0.960±0.009	0.979±0.006	0.959±0.001
ETLMS	0.958±0.024	0.931±0.005	0.970±0.016	0.960±0.020	0.984±0.010	0.959±0.002
WTNNM	0.982±0.000	0.991±0.000	0.991±0.000	0.990±0.000	0.990±0.000	0.990±0.000
MLAN	0.565±0.002	0.798±0.000	0.652±0.001	0.277±0.021	0.657±0.001	0.250±0.024
本文方法	0.986±0.000	0.991±0.000	0.967±0.000	0.990±0.000	0.990±0.000	0.988±0.000

表 6 ORL Database 实验结果
Table 6 ORL Database experiment results

方法	BBC Sport Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MS	0.556±0.000	0.512±0.000	0.649±0.000	0.500±0.000	0.510±0.000	0.396±0.000
ETLMS	0.642±0.000	0.610±0.000	0.739±0.000	0.421±0.001	0.410±0.003	0.390±0.000
WTNNM	0.573±0.000	0.531±0.000	0.655±0.000	0.512±0.000	0.520±0.000	0.414±0.000
MLAN	0.243±0.000	0.395±0.000	0.420±0.001	0.110±0.000	0.480±0.003	0.009±0.001
本文方法	0.867±0.000	0.865±0.000	0.904±0.000	0.841±0.000	0.845±0.000	0.869±0.000

表 7 3source Database 实验结果
Table 7 Experimental results of 3source Database

方法	3source Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MS	0.558±0.004	0.438±0.009	0.624±0.012	0.498±0.000	0.509±0.000	0.395±0.000
ETLMS	0.529±0.008	0.610±0.002	0.565±0.000	0.739±0.000	0.617±0.000	0.539±0.000
WTNNM	0.841±0.000	0.900±0.001	0.6272±0.000	0.810±0.000	0.833±0.000	0.810±0.000
MLAN	0.172±0.001	0.154±0.001	0.192±0.001	0.475±0.000	0.592±0.000	0.347±0.000
本文方法	0.884±0.000	0.938±0.000	0.865±0.002	0.837±0.000	0.834±0.000	0.825±0.000

表 8 Scene-15 Database 实验结果
Table 8 Scene-15 Database experiment results

方法	Scene-15 Database					
	ACC	NMI	Purity	F-score	Recall	AR
t-SVD-MS	0.892±0.000	0.919±0.000	0.922±0.000	0.883±0.000	0.892±0.000	0.874±0.000
ETLMS	0.871±0.000	0.891±0.000	0.906±0.000	0.853±0.000	0.892±0.000	0.842±0.000
WTNNM	0.901±0.001	0.931±0.000	0.931±0.000	0.901±0.000	0.833±0.000	0.891±0.000
MLAN	0.342±0.003	0.493±0.003	0.354±0.002	0.262±0.003	0.740±0.043	0.167±0.045
本文方法	0.971±0.000	0.9906±0.000	0.975±0.000	0.987±0.000	0.987±0.000	0.986±0.000

4.5 实验结果与分析

实验结果表明,基于张量的聚类方法(如 t-SVD-MS、ETLMS、WTNNM 和 TLR-MVSC)

在多视图数据处理中表现出的聚类性能显著优于非张量聚类方法（如 MLAN），这种优势主要归因于非张量方法在处理多视图数据时，无法最大化利用嵌入于不同视图间的视图相似度矩阵所蕴含的互补信息与空间结构信息，从而导致聚类效果的限制。例如在 Scene-15 数据集上，基于张量的聚类方法相比非张量方法的聚类效果至少提升了 25%，这表明，对于多视图数据中视图间存在较大差异的情况，张量方法能够更好地捕捉视图间的关联性和互补性，从而显著提升聚类性能。

在多种基于张量的聚类方法中，本文方法在 Scene-15 数据集上，与 t-SVD-MSK 比较，各项指标均实现显著提升 9%、8%、6%、12%、11% 和 13%。这一优势主要源于本文方法充分考虑了不同视图信息的重要性差异，通过从重要视图中提取关键的视图共享亲和矩阵的重要性未被其他方法充分认识到。同时，本文提出的张量核范数最小化策略，结合了奇异值差异性的分析和动态权重调整机制，不仅提升了模型的鲁棒性，还在多视图数据复杂性处理方面实现了更高的准确性和一致性。

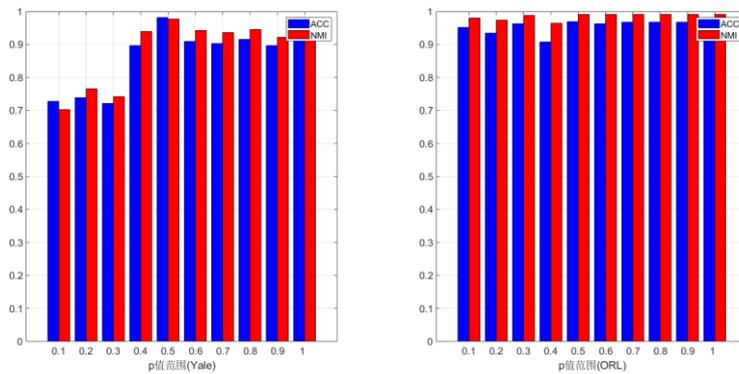


图 3 参数 p 对聚类效果的影响

Fig. 3 Effect of parameter p on clustering effect

实验中还探讨了核范数最小化参数 p 对聚类效果的调节作用，发现其对不同数据集的性能优化具有显著影响。图 3 为本文方法在不同数据集上的应用显示了其多样化的聚类效果。从图表分析可见，在值变动下，该方法的聚类效能展现出一定的波动性。在保持其他参数不变的前提下，实验结果显示，Yale 数据集在 $p = 0.5$ 时达到最佳聚类效果，而 ORL 数据集在 $p = 0.9$ 时表现最优秀。这种现象表明，参数 p 对奇异值间差异性的调节能够有效强化视图间的互补信息利用，显著降低了光照等外部因素对聚类效果的干扰。通过优化该参数，本文方法成果实现了聚类性能全面提升，进一步验证了其在多视图数据处理中适应性和鲁棒性上的显著优势。

5 总结

在本文中，我们提出了一种基于张量低秩学习的多视图子空间聚类方法，以解决现有多视图聚类方法中忽视表示张量与亲和度矩阵高度相关性以及在处理数据缺失、噪声和异常值时表现不足的问题。通过施加低秩约束，该方法有效地挖掘了数据点之间的高阶关联性，从而增强了对数据子空间结构的识别精度，并提高了亲和度矩阵的鲁棒性。同时，采用基于张量奇异值分解的核范数约束技术，对亲和度矩阵的求解过程进行优化。实验结果表明，该方法比现有方法在四类基准数据集上的表现更好，并验证了其有效性和处理多视图数据的先进性。在未来工作中，我们将尝试更多方法来挖掘数据点间的高阶关联性来进一步提升性能。

参考文献：

- [1] 陈曼笙,蔡晓莎,林家祺,等.张量学习诱导的多视图谱聚类[J].计算机学报,2024,47(01):52-68.
Chen M, Cai X, Lin J, et al. Tensor learning-induced multi-view spectral clustering[J].Chinese Journal of Computers,2024,47(01):52-68. (in Chinese)

- [2] Liu W, Tsang IW. Making decision trees feasible in ultrahigh feature and label dimensions[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2017, 18:81:1-81:36.
- [3] Liu W, Tsang IW, Muller K. An easy-to-hard learning paradigm for multiple classes and multiple labels[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2017, 18:94:1-94:38.
- [4] Zhang C, Li H, Lv W, et al. Enhanced tensor low-rank and sparse representation recovery for incomplete multi-view clustering[C]//*Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*. 2023, 37(9): 11174-11182.
- [5] Wang Q, Cheng J, Gao Q, et al. Deep multi-view subspace clustering with unified and discriminative learning[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2020, 23: 3483-3493.
- [6] Gao Q, Xia W, Wan Z, et al. Tensor-SVD based graph learning for multi-view subspace clustering[C]//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2020, 34(04): 3930-3937.
- [7] Kang Z, Zhou W, Zhao Z, et al. Large-scale multi-view subspace clustering in linear time[C]//*Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*. 2020, 34(04): 4412-4419.
- [8] Yang M, Luo Q, Li W, et al. Multiview clustering of images with tensor rank minimization via nonconvex approach[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2020, 13(4): 2361-2392.
- [9] Chen Y, Xiao X, Zhou Y. Multi-view subspace clustering via simultaneously learning the representation tensor and affinity matrix[J]. *Pattern Recognition*, 2020, 106: 107441.
- [10] Wu J, Xie X, Nie L, et al. Unified graph and low-rank tensor learning for multi-view clustering[C]//*Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*. 2020, 34(04): 6388-6395.
- [11] Si X, Yin Q, Zhao X, et al. Consistent and diverse multi-view subspace clustering with structure constraint[J]. *Pattern Recognition*, 2022, 121: 108196.
- [12] Shao W, He L, Yu P S. Multiple incomplete views clustering via weighted nonnegative matrix factorization with $l_{2,1}$ regularization[C]//*Joint European conference on machine learning and knowledge discovery in databases*. Porto:Springer, 2015:318-334.
- [13] Gao H, Peng Y, Jian S. Incomplete multi-view clustering[C]//*Intelligent Information Processing VIII: 9th IFIP TC 12 International Conference, IIP 2016, Melbourne, VIC, Australia, November 18-21, 2016, Proceedings 9*. Australia:Springer, 2016:245-255.
- [14] Wang H, Zong L, Liu B, et al. Spectral perturbation meets incomplete multi-view data[J]. *arXiv preprint arXiv:1906.00098*, 2019, 3677-3683.
- [15] Hu M, Chen S. Doubly aligned incomplete multi-view clustering[J]. *arXiv preprint arXiv:1903.02785*, 2019, 2262-2268.
- [16] Liu J, Teng S, Fei L, et al. A novel consensus learning approach to incomplete multi-view clustering[J]. *Pattern Recognition*, 2021:115-107890.
- [17] Li X L, Chen M S, Wang C D, et al. Refining graph structure for incomplete multi-view clustering[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022:2300-2313.
- [18] 崔金荣,黄诚.改进的自步深度不完备多视图聚类[J].*数据采集与处理*,2022,37(5):1036-1048
- [19] Lin Y, Gou Y, Liu Z, et al. Completer: Incomplete multi-view clustering via contrastive prediction[C]//*Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition*. 2021: 11174-11183.
- [20] Wang L, Yang Y, Liu B. GMC: Graph-based multi-view clustering[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2020, 32(6): 1116-1129.
- [21] Kang Z, Shi G, Huang S, et al. Multi-graph fusion for multi-view spectral clustering[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 189: 105102.
- [22] Zhang C, Hu Q, Fu H, et al. Latent multi-view subspace clustering[C]//*Proceedings of the IEEE conference*

- on computer vision and pattern recognition. Honolulu: IEEE,2017:4279-4287.
- [23] 陈梅,马学艳,钱罗雄,等.基于多级自表示约束的不完备多视图聚类[J/OL].控制与决策,2024,1-9.
Chen Mei, Ma Xueyan, Qian Luoxiong, et al. Incomplete multi-view clustering based on multi-level self-representation constraints[J/OL].Control and Decision,2024,1-9.
- [24] 吴杰,万源,刘秋杰.一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法[J/OL].计算机科学,2024,1-11.
Wu Jie, Wan Yuan, Liu Qiujie. Multi-view Subspace Clustering Algorithm with Consistent Block Diagonal and Boundary[J/OL].Computer Science,2024,1-11.
- [25] NG A Y, JORDAN M I, WEISS Y. On spectral clustering: analysis and an algorithm[C]// Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems, Cambridge: MIT Press, 2002:849–856.
- [26] LIU G C, YAN S C. Latent low-Rank representation for subspace segmentation and feature extraction[C]// 2011 IEEE 13th International Conference on Computer Vision. IEEE, 2011:1615-1622.
- [27] LIU G C, LIN Z C, YU Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C]// Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa: OMNI Press, 2010:663-670.
- [28] XIA G Y, SUN H J, FENG L, et al. Human motion segmentation via robust kernel sparse subspace clustering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(1): 135-105.
- [29] JI P, ZHONG Y R, LI H D, et al. Null space clustering with applications to motion segmentation and face clustering [C]// Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Image Processing. Piscataway: IEEE, 2014: 283–287.
- [30] MA Y, DERKSEN H, HONG W, et al. Segmentation of multivariate mixed data via lossy data coding and compression[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(9):1546-1562.
- [31] Zhang P, Liu X, Xiong J, et al. Consensus one-step multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2020, 34(10): 4676-4689.
- [32] 陈梦瑶,陈秀宏.多样性特征增强与低秩表示的多视图聚类算法[J/OL].小型微型计算机系统,2024,1-10.
Chen Mengyao, Chen Xiuhong. Multi-view clustering algorithm based on diversity feature enhancement and low-rank representation[J/OL].Journal of Chinese Computer Systems,2024,1-10.
- [33] Hÿch M, Hawkes P W. Morphological image operators[M]. Academic Press, 2020.
- [34] M.-S. Chen, L. Huang, C.-D. Wang, and D. Huang, “Multi-view clustering in latent embedding space,” in Proc. AAAI, vol. 34, no. 4, Apr. 2020, pp. 3513–3520.
- [35] Zhang F, Wang W, Huang J, et al. RIP-based performance guarantee for low-tubal-rank tensor recovery[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 374: 112767.
- [36] Wang H, Yang Y, Liu B. GMC: Graph-based multi-view cluster-ing. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2020, 32(6): 1116–1129
- [37] M. E. Kilmer, K. Braman, N. Hao, and R. C. Hoover, “Third-ordertensors as operators on matrices: A theoretical and computational frame-work with applications in imaging,” SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 34,no. 1, pp. 148–172, 2013.
- [38] Y. Xie, D. Tao, W. Zhang, Y. Liu, L. Zhang, and Y. Qu, “On unify-ing multi-view self-representations for clustering by tensor multi-rankminimization,” Int. J. Comput. Vis., vol. 126, no. 11, pp. 1157–1179,2018
- [39] WANG R, NIE F, WANG Z, et al. Parameter-free weighted multi-view projected clustering with structured graph learning[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2019,32(10) : 2014 – 2025.
- [40] WU J, LIN Z, ZHA H. Essential Tensor Learning for Multi-view Spectral Clustering[J]. IEEETransactions on Image Processing, 2019, 28(12) : 5910 – 5922.
- [41] GAO Q, XIA W, WAN Z, et al. Tensor-SVD Based Graph Learning for Multi-View SubspaceClustering[C] // Proc. Thirty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2020 : 2153 –2159.

- [42] NIE F, CAI G, LI X. Multi-view clustering and semi-supervised classification with adaptive neighbours[C] // Thirty-first AAAI conference on artificial intellig
- [43] LIN Z, CHEN M, MA Y. The augmented lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices[J]. arXiv preprint arXiv:1009.5055.



史德胜 (1997-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 大数据分析与管理. Email: 1222045606@njupt.edu.cn



徐鹤 (1985-), 男, 博士, 教授, CCF 高级会员. 研究方向: 人工智能与大数据、物联网技术. Email: xuhe@njupt.edu.cn



李鹏 (1979-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员. 研究方向: 高性能计算、大数据、人工智能和网络安全. Email: lipeng@njupt.edu.cn