

基于后悔理论的多粒度直觉模糊三支决策模型

庞文莉¹, 于 潇², 郑 宇², 陈 辉², 薛占熬², 辛现伟^{2,3}

(1. 河南师范大学软件学院, 新乡 453007; 2. 河南师范大学计算机与信息工程学院, 新乡 453007; 3. 河南省教育人工智能与个性化学习重点实验室, 新乡 453007)

摘 要: 传统基于函数或关系的三支决策模型在应对复杂多粒度决策问题求解时, 容易忽略现实中信息的多粒度特性和决策者认知能力的局限性。基于此, 本文提出了一种基于后悔理论的多粒度直觉模糊三支决策模型。首先, 为处理直觉模糊数的复杂计算问题, 将 θ 算子与直觉模糊粗糙集相融合, 提出了一种多粒度直觉模糊粗糙集上、下近似算子, 并给出相应的三支决策规则。其次, 为将决策者的认知特性融合到决策过程中, 结合后悔理论构建了乐观和悲观策略下的多粒度三支排序方法。最后通过国际中文教育“中文+职业”人才胜任力评估的群决策实例验证了所提模型的有效性, 为直觉模糊环境下融合决策者风险偏好的不确定性决策问题提供了一种新方法。

关键词: 多粒度; 直觉模糊集; 三支决策; 后悔理论; 三支排序

中图分类号: TP18

文献标志码: A

Multi-granularity Intuitionistic Fuzzy Three-Way Decision Model Based on Regret Theory

PANG Wenli¹, YU Xiao², ZHENG Yu², CHEN Hui², XUE Zhan'ao², XIN Xianwei^{2,3}

(1. College of Software, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China; 2. College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China; 3. Henan Provincial Key Laboratory of Artificial Intelligence and Personalized Learning in Education, Xinxiang 453007, China)

Abstract: When solving complex multi-granularity decision-making problems, traditional three-way decision models based on functions or relationships tend to ignore the multi-granularity characteristics of information in reality and the limitations of the cognitive ability of decision makers. Based on it, this paper proposes a multi-granularity intuitionistic fuzzy three-way decision model based on regret theory. Firstly, to deal with complex calculation problems of intuitionistic fuzzy numbers, the θ operator is integrated with intuitionistic fuzzy rough sets, a multi-granularity upper and lower approximation operator for intuitionistic fuzzy rough sets is proposed, and the corresponding three-way decision rules are given. Secondly, to integrate the cognitive characteristics of the decision-maker into the decision-making process, a multi-granularity three-way sorting method under optimistic and pessimistic strategies is constructed based on the regret theory. Finally, the effectiveness of the proposed model is verified by a group decision example of

基金项目: 教育部中外语言交流合作中心国际中文教育研究课题(23YH26C); 河南省科技攻关项目(252102210056, 242102210103); 河南省高等学校重点科研项目(24A520019); 教育部人文社科重点研究基地重大项目(22JJD740017); 河南省软科学研究计划项目(242400410321)。

收稿日期: 2024-05-23; **修订日期:** 2024-08-18

the competency assessment of “Chinese+ vocational” talents in international Chinese education, which provides a new method for uncertain decision-making problems that integrate decision-maker risk preferences in an intuitionistic fuzzy environment.

Key words: multi-granularity; intuitionistic fuzzy set; three-way decision; regret theory; three-way sorting

引言

Yao在Pawlak粗糙集^[1]和决策粗糙集^[2]的基础上提出了三支决策理论^[3],其通过粗糙隶属度函数将论域划分为3个互不相交区域,即正域(Positive regions, POS)、边界域(Boundary regions, BND)和负域(Negative regions, NEG)。作为一种处理不确定性决策的粒计算方法,三支决策自提出以来已成功应用于多个领域,如代价敏感学习^[4]、迁移学习^[5]、认知概念学习^[6]、推荐系统^[7]和医疗诊断^[8]等。针对传统单一关系诱导表示目标概念上、下近似的不足,Qian等^[9]提出了基于粒计算理论的多粒度粗糙集模型,通过近似目标集的颗粒结构,给出了乐观(Optimistic, Opt)和悲观(Pessimistic, Pes)两种状态下的多粒度粗糙集模型。此外,为在分层组织的信息表中获取有效知识,Wu等^[10]给出了粗糙集框架下的多尺度信息表概念,系统讨论了多尺度决策表中不同尺度决策规则的分解问题。以上模型有效地促进了多粒度与三支决策的融合与发展。

直觉模糊集理论(Intuitionistic fuzzy set, IFS)能够较好地处理不确定信息,其与三支决策的融合受到了广泛关注。为了优化经典三支决策的损失函数,Xin等^[11]构建多粒度直觉模糊决策理论粗糙集及其三支决策模型,系统研究了乐观和悲观状态的决策损失成本,扩展了三支决策在实际中的应用范围。考虑到不同粒度的联合影响,Xiao等^[12]将多粒度粗糙集推广到直觉模糊集,构建了基于多粒度决策理论粗糙集模型。

Yang等^[13]提出了直觉模糊的三支近似模型,使得三支决策过程只依赖于隶属度和非隶属度取值。针对传统方法计算阈值时缺乏语义解释且具有主观性的问题,李小南等^[14]结合模糊因子、均值因子和概率因子提出一种新的直觉模糊相似度,并用于三支决策建模。以上研究为复杂不确定环境下的三支决策研究提供了新的思路与方法。为体现出决策者认知偏好信息,Zhang等^[15]提出了一种基于后悔理论的两阶段模型来解决基础设施项目选择的犹豫模糊决策。考虑到医学领域中决策者不同心理行为对实际决策结果的影响,Wang等^[16]结合犹豫模糊集和后悔理论提出一种基于偏好排序的三支决策方法。为进一步减少诊断结果的潜在错误并考虑决策者的心理行为和心理偏好对决策结果的影响,Huang等^[17]结合后悔理论提出了一种基于多尺度决策信息系统的三支决策方法。通过引入后悔理论,为处理与分析融合决策者偏好的决策问题提供一种新的思路。为了更好地讨论所提方法与现有主流方法的在理论上的优劣势,对前人研究进行了比较分析。如表1所示,比较内容包括分类(a_1)、排序(a_2)、多粒度(a_3)、认知特征(a_4)和多策略(a_5)等。其中,“√”表示当前研究内容涉及此特征;“—”表示不涉及此特征。

实践中,多属性决策问题常常在多粒度环境下进行,对不同粒度层次决策规则的研究变得尤为重要。与此同时,决策者的风险认知偏好与决策结果具有强关联性,即由于受到决策者心理因素的影响,可能导致最终的决策结论并非最佳方案。现有基于后悔理论的三支决策模型大多忽略了决策信息的多粒度特征,如何从多个粒度共同刻画决策者的偏好信息,并多维度地呈现决策结果关系着最终的决策效果和性能。受上述思想启发,本文在多粒度背景下提出了基于后悔理论的多粒度直觉模糊三支决策模型,主要贡献如下:(1) 通过将 θ 算子与直觉模糊集结合,提出了多粒度直觉模糊粗糙近似算子,

表1 不同决策模型的比较
Table 1 Comparison of different decision models

方法	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	工作和贡献
Xiao等 ^[12]	✓	✓	✓	✓	—	提出直觉模糊的三支近似模型,使得三支决策过程只依赖于隶属度和非隶属度取值。
李小南等 ^[14]	✓	—	—	—	—	结合模糊因子、均值因子和概率因子提出新的直觉模糊相似度,并用于三支决策建模。
Zhang等 ^[15]	—	✓	—	✓	—	提出一种基于后悔理论的两阶段模型来解决基础设施项目选择的犹豫模糊决策。
Wang等 ^[16]	✓	✓	—	✓	—	结合犹豫模糊集和后悔理论提出一种基于偏好排序的三支决策方法。
Huang等 ^[17]	✓	✓	—	✓	—	结合后悔理论提出一种基于多尺度决策信息系统的三支决策方法,并提出一种计算相对效用函数的客观方法,以避免主观性的影响。
本文方法	✓	✓	✓	✓	✓	将 θ 算子与直觉模糊粗糙集相融合,提出一种多粒度直觉模糊粗糙集上、下近似算子,给出相应的三支决策规则,并结合后悔理论构建乐观和悲观策略下的多粒度三支排序方法,将决策者的认知特性融合到决策过程中。

从乐观和悲观两种策略给出划分正域、负域和边界域的决策规则;(2) 将决策者的认知特性融合到决策过程中,提出了一种基于后悔理论的三支排序方法,在处理复杂多粒度决策问题时更符合实际决策需求。

1 基础知识

本节简要介绍多粒度粗糙集^[18]、直觉模糊集^[19]以及后悔理论^[20-21]的相关概念。

1.1 多粒度粗糙集

定义1^[18] 设信息系统 $IS = \langle U, AT, D, f \rangle$,其中: U 为论域, D 为属性值集合, $f: U \times AT \rightarrow D$ 为信息函数,用以确定对象属性值, AT 为一个非空有限属性集, $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 为 AT 的 m 个属性子集, $\forall X \subseteq U$, X 关于 A_i 的乐观多粒度粗糙集的下、上近似分别为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m A_i^O(X) = \{x \in U | [x]_{A_i} \subseteq X \vee \dots \vee [x]_{A_m} \subseteq X\} \\ \sum_{i=1}^m A_i^O(X) = \sim(\sum_{i=1}^m A_i^O(\sim X)) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $[x]_{A_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为等价关系 R_{A_i} 的等价类; $\sim X$ 为 X 的补集。若 $\sum_{i=1}^m A_i^O(X) \neq \sum_{i=12}^m A_i^O(X)$,

则 $(\sum_{i=1}^m A_i^O(X), \sum_{i=1}^m A_i^O(X))$ 被称为 X 的乐观多粒度粗糙集。

定义2^[18] 设信息系统 $IS = \langle U, AT, D, f \rangle, \forall X \subseteq U$, X 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙集的下、上近似分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)} = \{x \in U | [x]_{A_i} \subseteq X \wedge \cdots \wedge [x]_{A_m} \subseteq X\} \\ \overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)} = \sim \left(\sum_{i=1}^m A_i^p(\sim X) \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

若 $\overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)} \neq \overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)}$, 则 $\left(\overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)}, \overline{\sum_{i=1}^m A_i^p(X)} \right)$ 被称为 X 的悲观多粒度粗糙集。

1.2 直觉模糊集

定义 3^[19] 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为非空有限论域, $\forall T \subseteq U, u \in T$, 称 $T = \{ \langle \mu_T(u), \nu_T(u) \rangle | u \in U \}$ 为 U 上的直觉模糊集合, 其中 $\mu_T(u): U \rightarrow [0, 1]$ 表示 u 属于 T 的隶属度, $\nu_T(u): U \rightarrow [0, 1]$ 表示 u 不属于 T 的隶属度 (即非隶属度), 并且满足条件 $0 \leq \mu_T(u), \nu_T(u) \leq 1$ 和 $0 \leq \mu_T(u) + \nu_T(u) \leq 1$, $\pi_T(u) = 1 - \mu_T(u) - \nu_T(u)$ 表示 u 属于 T 的犹豫度。为便于表示, 称序偶对 $(\mu_T(u), \nu_T(u))$ 为一个直觉模糊数。

定义 4^[19] 设 H 和 I 是给定论域 U 上的直觉模糊子集, H 和 I 的运算如下: (1) $H \cap I = \{ \langle x, \mu_H(x) \wedge \mu_I(x), \nu_H(x) \vee \nu_I(x) \rangle | \forall x \in U \}$; (2) $H \cup I = \{ \langle x, \mu_H(x) \vee \mu_I(x), \nu_H(x) \wedge \nu_I(x) \rangle | \forall x \in U \}$; (3) $H^c = \{ \langle x, \nu_H(x), \mu_H(x) \rangle | \forall x \in U \}$ 。

1.3 后悔理论

后悔理论的关键在于考虑决策者在决策时受到心理因素的影响, 将自己的选择结果与选择其他方案的结果进行比较。如果决策者认为选择其他方案可以获得更好的结果, 那么他会感到后悔; 相反, 决策者会感到欣喜。该理论可以帮助决策者规避主观性, 降低决策对象的后悔程度。

定义 5^[20-21] 设 K_1, K_2 为两个决策方案, k_1, k_2 分别表示两种方案的评价结果, 可以得到方案 K_1 的感知效用函数如下

$$G(k_1, k_2) = f(k_1) + L(f(k_1) - f(k_2)) \quad (3)$$

式中: $f(k_1), f(k_2)$ 表示方案 K_1, K_2 的效用值, 即决策者选择备选对象所能获得的结果; $L(f(k_1) - f(k_2))$ 表示后悔-欣喜值。如果 $L > 0$, 表示决策者对选择 K_1 方案感到欣喜; 否则, 表示决策者对选择 K_1 方案感到后悔, 该值表示决策者的后悔程度。根据文献[20-21], 后悔欣喜函数 $L(f(x) - f(y))$ 可表示为

$$L(f(k_1) - f(k_2)) = 1 - e^{-\delta(f(k_1) - f(k_2))} \quad (4)$$

式中: δ 为后悔规避系数, $\delta \in (0, 1)$, 且 δ 越大, 表示决策者后悔规避程度越大; $L(f(k_1) - f(k_2))$ 为一个单调递增的凹函数, 具有以下性质: (1) $L(0) = 0$; (2) $L'(f(k_1) - f(k_2)) > 0$; (3) $L''(f(k_1) - f(k_2)) > 0$ 。

最初后悔理论仅限用于两个备选方案之间的选择, 对此, Quiggin^[22] 将基于后悔理论的方法拓展到多个方案间选择最优的问题。对于 n 个不同的方案 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和理想方案 k^* , 感知效用函数可表示为

$$G_i = f(k_i) + L(f(k^*) - f(k_i)) \quad (5)$$

式中感知效用函数表示选择当前方案的价值。为更大程度地规避后悔, 令 $f(k^*) = \{\max f(k_i)\}$, 即 $L(f(k_{\max}) - f(k_i)) < 0$ 。此时决策者后悔程度最大, 使决策结果与理想方案更加接近。

2 本文模型

2.1 基于 θ 算子的直觉模糊粗糙集模型

θ 算子作为逻辑推理和知识表示的重要工具,能够表达前提和结论之间的逻辑关系。在直觉模糊决策问题中引入 θ 算子处理信息能够更精确地进行知识表示,揭示数据的逻辑结构和内在关系,提高决策效率和适应性,构建模型能够有效减少信息冲突,降低计算量。

定义 6^[23] 假设 $\theta: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \forall a, b \in [0, 1]$, 则

$$a\theta_{221}b = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 1 - b + ab & a < b \end{cases} \quad (6)$$

$$a\theta_{365}b = \begin{cases} 0 & a \geq b \\ b - ab & a < b \end{cases} \quad (7)$$

式中: θ_{221} 称为 θ 算子; θ_{365} 称为 θ^* 算子。

由定义 6, $a\theta b + a\theta^*b = 1, a, b \in [0, 1]$, 即 θ 和 θ^* 是对偶的。

定义 7 设 (U, R) 为模糊近似空间, R 为论域 U 上的一个模糊等价关系, $H = \{ \langle x, \mu_H(x), \nu_H(x) \rangle | x \in U \}$ 为 U 上的一个直觉模糊集, 则对 $\forall x \in U$, 则 H 关于 (U, R) 的上近似和下近似如下

$$\underline{R}(H) = \{ \langle x, \mu_{\underline{R}(H)}(x), \nu_{\underline{R}(H)}(x) \rangle | x \in U \} \quad (8)$$

$$\overline{R}(H) = \{ \langle x, \mu_{\overline{R}(H)}(x), \nu_{\overline{R}(H)}(x) \rangle | x \in U \} \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{R}(H)}(x) &= \bigwedge_{y \in U} (\mu_H(y) \theta (\nu_R(x, y) \vee \mu_H(y))) \\ \nu_{\underline{R}(H)}(x) &= \bigvee_{y \in U} ((\nu_H(y) - \mu_H(y) \cdot \nu_H(y)) \theta^* \nu_R(x, y)) \\ \mu_{\overline{R}(H)}(x) &= \bigvee_{y \in U} ((\mu_H(y) - \nu_H(y) \cdot \mu_H(y)) \theta^* \mu_R(x, y)) \\ \nu_{\overline{R}(H)}(x) &= \bigwedge_{y \in U} (\nu_H(y) \theta (\mu_R(x, y) \vee \nu_H(y))) \end{aligned}$$

且当 $\underline{R}(H) = \overline{R}(H)$ 时, H 为可定义集; 否则, H 为直觉模糊集。

2.2 基于 θ 算子的多粒度三支决策方法

本节在基于 θ 算子的多粒度直觉模糊集的基础上, 结合三支决策思想, 构造了基于 θ 算子的多粒度三支决策模型。

定义 8 在直觉模糊近似空间 (U, V, R_r) 中, $R_r (r = 1, 2, \dots, m)$ 为 U 到 V 的模糊近似等价关系, 对 $\forall Z \in V$, 则 R 关于 θ 算子的乐观多粒度直觉模糊下近似 $\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)$ 和上近似 $\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)$ 分别如下

$$\begin{aligned} \bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z) &= \left\{ \langle x, \mu_{\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x), \nu_{\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) \rangle | \forall x \in U \right\} \\ \bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z) &= \left\{ \langle x, \mu_{\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x), \nu_{\bigcup_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) \rangle | \forall x \in U \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned}\overline{\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}}(x) &= \bigwedge_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} \left((\mu_Z(y) - \nu_Z(y) \bullet \mu_Z(y)) \theta^* \mu_{R_r}(x, y) \right) \\ \overline{\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}}(x) &= \bigvee_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} \left(\nu_Z(y) \theta(\mu_{R_r}(x, y) \vee \nu_Z(y)) \right) \\ \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) &= \bigvee_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} \left(\mu_Z(y) \theta(\nu_{R_r}(x, y) \vee \mu_Z(y)) \right) \\ \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) &= \bigwedge_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} \left((\nu_Z(y) - \mu_Z(y) \bullet \nu_Z(y)) \theta^* \nu_{R_r}(x, y) \right)\end{aligned}$$

若 $\sum_{r=1}^m R_r^o(Z) = \overline{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}$, 则称 Z 是可定义的; 否则, $\sum_{r=1}^m R_r^o(Z), \overline{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}$ 是 Z 在 R_r 上基于 θ

算子的乐观直觉模糊粗糙集模型。对 $\forall Z \in \text{IFS}(U)$, 其基于 θ 算子的乐观三支决策规则如下:

(1) 接受决策规则(P^0): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) > \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) < \beta$, 则 $x \in \text{POS}^0(Z)$;

(2) 延迟决策规则(B^0): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) \geq \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) \leq \beta$, 不满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) > \alpha$ 且

$\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) < \beta$, 则 $x \in \text{BND}^0(Z)$;

(3) 拒绝决策规则(N^0): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) < \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^o(Z)}(x) > \beta$, 则 $x \in \text{NEG}^0(Z)$ 。

定义 9 在直觉模糊近似空间 (U, V, R_r) 中, $R_r (r = 1, 2, \dots, m)$ 为 U 到 V 的模糊近似等价关系, 对

$\forall Z \in V$, 则 R 关于 θ 算子的悲观多粒度直觉模糊下近似 $\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)$ 和上近似 $\overline{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}$ 如下

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^m R_r^p(Z) = \left\{ \langle x, \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x), \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x) \rangle \mid \forall x \in U \right\} \\ \overline{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)} = \left\{ \langle x, \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x), \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x) \rangle \mid \forall x \in U \right\} \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned}\overline{\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}}(x) &= \bigvee_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} \left((\mu_Z(y) - \nu_Z(y) \bullet \mu_Z(y)) \theta^* \mu_{R_r}(x, y) \right) \\ \overline{\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}}(x) &= \bigwedge_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} \left(\nu_Z(y) \theta(\mu_{R_r}(x, y) \vee \nu_Z(y)) \right) \\ \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x) &= \bigwedge_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} \left(\mu_Z(y) \theta(\nu_{R_r}(x, y) \vee \mu_Z(y)) \right) \\ \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}(x) &= \bigvee_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} \left((\nu_Z(y) - \mu_Z(y) \bullet \nu_Z(y)) \theta^* \nu_{R_r}(x, y) \right)\end{aligned}$$

若 $\sum_{r=1}^m R_r^p(Z) = \overline{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}$, 则称 Z 是可定义的; 否则, $\sum_{r=1}^m R_r^p(Z), \overline{\sum_{r=1}^m R_r^p(Z)}$ 是 Z 在 R_r 上基于 θ 的

悲观直觉模糊粗糙集模型。 $\forall Z \in \text{IFS}(U)$, 基于 θ 算子的悲观三支决策规则如下。

- (1) 接受决策规则(P^P): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) > \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) < \beta$, 则 $x \in \text{POS}^P(Z)$;
- (2) 延迟决策规则(B^P): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) \geq \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) \leq \beta$, 不满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) > \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) < \beta$, 则 $x \in \text{BND}^P(Z)$;
- (3) 拒绝决策规则(N^P): 若满足 $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) < \alpha$ 且 $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) > \beta$, 则 $x \in \text{NEG}^P(Z)$ 。

定理 1 设 $(U, R_r)(r = 1, 2, \dots, m)$ 是一个直觉模糊近似空间, 对 $\forall Z \in \text{IFS}(U)$, 有以下性质:

- (1) $\sum_{r=1}^m R_r^P(Z) \subseteq \sum_{r=1}^m R_r^O(Z)$; (2) $\sum_{r=1}^m R_r^P(Z) \subseteq \sum_{r=1}^m R_r^O(Z)$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 因为 } \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) &= \bigvee_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} (\mu_Z(y) \theta(\nu_{R_r}(x, y) \vee \mu_Z(y))) \geq \\
 &\quad \bigwedge_{r=1}^m \bigwedge_{y \in U} (\mu_Z(y) \theta(\nu_{R_r}(x, y) \vee \mu_Z(y))) = \mu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x) \\
 \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) &= \bigwedge_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} ((\nu_Z(y) - \mu_Z(y) \nu_Z(y)) \theta^* \nu_{R_r}(x, y)) \leq \\
 &\quad \bigvee_{r=1}^m \bigvee_{y \in U} ((\nu_Z(y) - \mu_Z(y) \nu_Z(y)) \theta^* \nu_{R_r}(x, y)) = \nu_{\sum_{r=1}^m R_r^P(Z)}(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \sum_{r=1}^m R_r^P(Z) \subseteq \sum_{r=1}^m R_r^O(Z)。$$

(2) 同理, 易证(1)。

以乐观多粒度为例, 基于 θ 算子的多粒度三支决策算法伪代码如下。

算法 1 基于 θ 算子的多粒度三支决策算法

Input: 直觉模糊近似空间 $(U, V, R_r, Z \in V)$, 阈值 (α, β)

Output: $\text{POS}^O(Z)$, $\text{BND}^O(Z)$, $\text{NEG}^O(Z)$

(1) 初始化 $\text{POS}^O(Z)$, $\text{BND}^O(Z)$, $\text{NEG}^O(Z) \leftarrow \phi$

(2) 初始化 $\sum_{r=1}^m R_r^O(Z) = \sum_{r=1}^m R_r^O(Z)$

(3) for 每一个 $x \in U$ do

(4) 计算 $\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)$, $\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)$, $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r(Z)}(x)$, $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r(Z)}(x)$

(5) end

(6) for 每一个 $x \in U$ do

(7) if $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) \geq \alpha$ and $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^O(Z)}(x) < \beta$

(8) then $x \in \text{POS}^O(Z)$;

(9) end

(10) if $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) \geq \alpha$ and $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) \leq \beta$, unsatisfied

(11) $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) > \alpha$ and $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) < \beta$

(12) then $x \in \text{BND}^0(Z)$

(13) end

(14) if $\mu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) < \alpha$ and $\nu_{\sum_{r=1}^m R_r^0(Z)}(x) > \beta$

(15) then $x \in \text{NEG}^0(Z)$

(16) end

(17) end

(18) return: 决策划分结果

基于 θ 算子的多粒度三支决策算法包括等价类的上下近似计算和决策域划分两个过程。假设 n 表示方案个数, m 表示属性数量, r 表示专家人数,在上下近似计算阶段,首先遍历所有方案并计算上下近似,其时间复杂度为 $O(n)$,然后根据定义8中决策规则和阈值对所有方案划分,其时间复杂度为 $O(n)$,因此该算法的时间复杂度为 $O(n)$ 。

2.3 基于后悔理论的三支排序方法

为使决策者更直观地根据决策结果做出选择,提出了基于后悔理论的三支排序方法,对决策结果进行排序,具体步骤如下:

(1) 构建评价矩阵。构建指标原始评分矩阵 $Q = (q_{ri})_{n \times m} (r = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n)$, 其中 m 为专家人数, n 为属性数量, q_{ri} 为评分值。

(2) 构建理想方案。根据原始评分矩阵 Q , 构建理想方案 $I = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, 其中 $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是第 i 个评估指标的理想值, 由表 2 可知风险等级越高评分值越大, 为了降低决策者的后悔程度, 取最大值作为每个评估指标的理想值。

(3) 构建效用值矩阵。根据文献[18], 选择幂函数作为该排序方法的效用函数, 且参数 $\tilde{\omega}$ 取 0.9, 构建效用矩阵为

$$F = [(q_{ri})^{\tilde{\omega}}]_{n \times m} \quad (12)$$

(4) 建立后悔-欣喜矩阵 C , 表达式为

$$C = [1 - e^{-\phi(u_i \tilde{\omega} - q_{ri} \tilde{\omega})}]_{n \times m} \quad (13)$$

式中 ϕ 为后悔规避系数, 根据文献[18], ϕ 取 0.0133。

(5) 建立感知效用值矩阵 G , 表达式为

$$G = (g_{ir}) = F + C = [(q_{ri})^{\tilde{\omega}} + 1 - e^{-\phi(u_i \tilde{\omega} - q_{ri} \tilde{\omega})}]_{n \times m} \quad (14)$$

(6) 通过熵权法确定属性权重。对于给定的 n 个属性 $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 其中 $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 对各属性数据标准化后的值为 $B_1, B_2, \dots, B_n$, 那么

$$B_{ri} = \frac{A_{ri} - \min(A_r)}{\max(A_r) - \min(A_r)} \quad (15)$$

计算各属性的信息熵为 $E_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有

表 2 风险等级划分及评分值

Table 2 Risk level classification and scoring values

风险等级	风险描述	风险评分值
I	极低风险	[0, 2]
II	低度风险	[2, 4]
III	中度风险	[4, 6]
IV	高度风险	[6, 8]
V	极高风险	[8, 10]

$$E_i = -(\ln n)^{-1} \sum_{i=1}^n p_{ri} \ln p_{ri} \quad (16)$$

式中 $p_{ri} = B_{ri} / \sum_{i=1}^n B_{ri}$, 如果 $p_{ri} = 0$, 则定义 $\lim_{p_{ri} \rightarrow 0} p_{ri} \ln p_{ri} = 0$ 。

通过信息熵计算各属性权重 $W_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 即

$$W_i = \frac{1 - E_i}{n - \sum_{i=1}^n E_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

(7) 计算综合评价风险值。根据式(17)所求的属性权重, 加权叠加各属性下方案的感知效用函数, 第 j 个方案的综合评价风险值为

$$S_j = \sum_{i=1}^n W_i g_{ji} = \sum_{i=1}^n W_i ((q_{ji})^a + 1 - e^{-\beta(u_j a - q_j a)}) \quad (18)$$

(8) 最后通过 S_j 对各方案进行排序, S_j 值越大方案越优, 基于后悔理论的三支排序算法伪代码如下。

算法 2 基于后悔理论的三支排序算法

Input: 直觉模糊信息系统 (U, V, D, R_r) ; 乐观, 悲观粒度决策域

Output: 排序结果

- (1) 构建原始评分矩阵 $Q = (q_{ri})_{n \times m}$
- (2) 计算理想方案 $I = [u_1, u_2, \dots, u_n]$
- (3) 根据式(12)构建效用值矩阵 F
- (4) 根据式(13)建立后悔-欣喜矩阵 C
- (5) 根据式(14)建立感知效用矩阵 G
- (6) for 每一个属性 $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ do
- (7) 根据式(15)计算属性标准化后的值 B_{ri}
- (8) 根据式(16)计算属性信息熵 E_i
- (9) if $p_{ri} = 0$
- (10) then $\lim_{p_{ri} \rightarrow 0} p_{ri} \ln p_{ri} = 0$
- (11) else $p_{ri} = B_{ri} / \sum_{r=1}^n B_{ri}$
- (12) end
- (13) end
- (14) 根据信息熵和式(17)计算属性权重 W_i
- (15) 根据式(18)计算综合评价风险值 S_j
- (16) end
- (17) for 每一个 $x \in U$ do
- (18) if 方案 x 处于同一个域
- (19) then 排序 S_j
- (20) else
- (21) $x_a \succ x_b \succ x_c, x_a \in \text{POS}, x_b \in \text{BND}, x_c \in \text{NEG}$
- (22) end
- (23) end
- (24) return: 排序结果

基于后悔理论的三支排序算法初始包括构建原始评分矩阵、计算理想方案、效用值矩阵、后悔-欣喜矩阵和感知效用矩阵等步骤,上述的时间复杂度取决于矩阵的大小,即 $O(mn)$ 。然后遍历每个属性计算属性信息熵、属性权重以及风险值,其时间复杂度为 $O(mn)$ 。最后遍历所有方案根据综合评价风险值进行排序,其时间复杂度为 $O(n)$,因此该算法的时间复杂度为 $O(mn)$ 。

3 实例验证

本文选取国际中文教育“中文+职业”人才胜任力评估群决策为案例验证本文模型的有效性。某跨国物流公司需要对引进人才的“中文+职业技能”胜任力进行评估,以选出1名“年度优秀员工”(改编自文献[24]),邀请了3位专家组成评审团构建了决策信息系统 $(U, A, R_r, Z), r=1, 2, 3$ 。由评审团对9位员工 $U=\{x_1, x_2, \cdots, x_9\}$ 进行考察,考察内容为 $A=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$,分别代表:中文语言能力(y_1)、职业技能水平(y_2)、跨文化沟通能力(y_3)、团队合作能力(y_4)和职业道德(y_5)。用直觉模糊集 Z 表示领导对员工的青睐程度,阈值为 $(0.65, 0.30)$ 。其中, $Z=\{\langle x_1, 0.50, 0.39 \rangle, \langle x_2, 0.54, 0.36 \rangle, \langle x_3, 0.55, 0.35 \rangle, \langle x_4, 0.51, 0.37 \rangle, \langle x_5, 0.52, 0.37 \rangle, \langle x_6, 0.52, 0.38 \rangle, \langle x_7, 0.48, 0.43 \rangle, \langle x_8, 0.44, 0.49 \rangle, \langle x_9, 0.44, 0.45 \rangle\}$ 。专家给出的评价价值如表3~5所示。

表3 专家 R_1 对9位员工的评价值
Table 3 Evaluation values of nine employees by expert R_1

员工	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	(0.56, 0.35)	(0.51, 0.38)	(0.47, 0.42)	(0.48, 0.41)	(0.43, 0.46)
x_2	(0.51, 0.38)	(0.43, 0.46)	(0.52, 0.37)	(0.51, 0.38)	(0.56, 0.33)
x_3	(0.64, 0.25)	(0.57, 0.32)	(0.56, 0.33)	(0.63, 0.27)	(0.58, 0.31)
x_4	(0.51, 0.38)	(0.58, 0.31)	(0.45, 0.44)	(0.48, 0.41)	(0.49, 0.40)
x_5	(0.42, 0.48)	(0.62, 0.27)	(0.42, 0.47)	(0.48, 0.41)	(0.49, 0.40)
x_6	(0.60, 0.29)	(0.62, 0.27)	(0.42, 0.47)	(0.48, 0.41)	(0.48, 0.41)
x_7	(0.47, 0.42)	(0.46, 0.43)	(0.43, 0.46)	(0.49, 0.40)	(0.45, 0.44)
x_8	(0.54, 0.36)	(0.48, 0.41)	(0.42, 0.47)	(0.41, 0.48)	(0.48, 0.42)
x_9	(0.53, 0.36)	(0.45, 0.44)	(0.44, 0.45)	(0.49, 0.40)	(0.53, 0.36)

表4 专家 R_2 对9位员工的评价值
Table 4 Evaluation values of nine employees by expert R_2

员工	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	(0.57, 0.32)	(0.52, 0.37)	(0.48, 0.41)	(0.49, 0.40)	(0.44, 0.45)
x_2	(0.53, 0.36)	(0.45, 0.44)	(0.55, 0.34)	(0.53, 0.36)	(0.59, 0.30)
x_3	(0.64, 0.25)	(0.57, 0.32)	(0.56, 0.33)	(0.63, 0.27)	(0.58, 0.31)
x_4	(0.49, 0.40)	(0.56, 0.33)	(0.44, 0.46)	(0.46, 0.43)	(0.47, 0.42)
x_5	(0.42, 0.47)	(0.63, 0.26)	(0.45, 0.44)	(0.59, 0.30)	(0.48, 0.41)
x_6	(0.60, 0.29)	(0.62, 0.27)	(0.41, 0.48)	(0.48, 0.41)	(0.49, 0.40)
x_7	(0.47, 0.42)	(0.46, 0.43)	(0.43, 0.46)	(0.49, 0.40)	(0.45, 0.44)
x_8	(0.54, 0.36)	(0.48, 0.41)	(0.42, 0.47)	(0.41, 0.48)	(0.48, 0.42)
x_9	(0.52, 0.37)	(0.44, 0.45)	(0.43, 0.46)	(0.48, 0.41)	(0.52, 0.37)

表5 专家 R_3 对 9 位员工的评价值

 Table 5 Evaluation values of nine employees by expert R_3

员工	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	(0.58, 0.31)	(0.53, 0.36)	(0.49, 0.40)	(0.50, 0.39)	(0.45, 0.44)
x_2	(0.52, 0.38)	(0.44, 0.45)	(0.53, 0.36)	(0.52, 0.37)	(0.57, 0.32)
x_3	(0.62, 0.27)	(0.55, 0.34)	(0.55, 0.34)	(0.61, 0.28)	(0.56, 0.33)
x_4	(0.51, 0.38)	(0.58, 0.31)	(0.45, 0.44)	(0.48, 0.41)	(0.49, 0.40)
x_5	(0.43, 0.46)	(0.64, 0.25)	(0.46, 0.43)	(0.61, 0.28)	(0.49, 0.40)
x_6	(0.58, 0.31)	(0.60, 0.29)	(0.40, 0.49)	(0.46, 0.43)	(0.47, 0.42)
x_7	(0.48, 0.41)	(0.47, 0.42)	(0.44, 0.45)	(0.49, 0.40)	(0.45, 0.44)
x_8	(0.55, 0.34)	(0.49, 0.40)	(0.43, 0.46)	(0.42, 0.47)	(0.49, 0.40)
x_9	(0.51, 0.38)	(0.43, 0.46)	(0.42, 0.47)	(0.47, 0.42)	(0.51, 0.39)

进一步可得关系矩阵 M_{R_1} 、 M_{R_2} 、 M_{R_3} 如下。

$M_{R_1} =$

(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.77, 0.21)	(0.84, 0.14)	(0.79, 0.19)	(0.82, 0.16)	(0.84, 0.14)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)
(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.79, 0.19)	(0.81, 0.17)	(0.77, 0.21)	(0.78, 0.20)	(0.82, 0.16)	(0.83, 0.15)	(0.84, 0.14)
(0.77, 0.21)	(0.79, 0.19)	(1.00, 0.00)	(0.78, 0.20)	(0.77, 0.21)	(0.78, 0.20)	(0.74, 0.24)	(0.75, 0.23)	(0.77, 0.21)
(0.84, 0.14)	(0.81, 0.17)	(0.78, 0.20)	(1.00, 0.00)	(0.82, 0.16)	(0.84, 0.14)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)
(0.79, 0.19)	(0.77, 0.21)	(0.77, 0.21)	(0.82, 0.16)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.80, 0.18)	(0.78, 0.20)	(0.79, 0.19)
(0.82, 0.16)	(0.78, 0.20)	(0.78, 0.20)	(0.84, 0.14)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.80, 0.18)	(0.81, 0.17)	(0.81, 0.17)
(0.84, 0.14)	(0.82, 0.16)	(0.74, 0.24)	(0.83, 0.15)	(0.80, 0.18)	(0.80, 0.18)	(1.00, 0.00)	(0.84, 0.14)	(0.84, 0.14)
(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.75, 0.23)	(0.83, 0.15)	(0.78, 0.20)	(0.81, 0.17)	(0.84, 0.14)	(1.00, 0.00)	(0.84, 0.14)
(0.83, 0.15)	(0.84, 0.14)	(0.77, 0.21)	(0.83, 0.15)	(0.79, 0.19)	(0.81, 0.17)	(0.84, 0.14)	(0.84, 0.14)	(1.00, 0.00)

$M_{R_2} =$

(1.00, 0.00)	(0.80, 0.18)	(0.78, 0.20)	(0.83, 0.15)	(0.79, 0.19)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.82, 0.16)
(0.80, 0.18)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.79, 0.19)	(0.77, 0.21)	(0.77, 0.21)	(0.81, 0.17)	(0.80, 0.18)	(0.82, 0.16)
(0.78, 0.20)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.76, 0.22)	(0.77, 0.21)	(0.78, 0.20)	(0.74, 0.24)	(0.77, 0.21)	(0.76, 0.22)
(0.83, 0.15)	(0.79, 0.19)	(0.76, 0.22)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.83, 0.15)	(0.84, 0.14)	(0.84, 0.14)	(0.83, 0.15)
(0.79, 0.19)	(0.77, 0.21)	(0.77, 0.21)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.80, 0.18)	(0.78, 0.20)	(0.78, 0.20)
(0.83, 0.15)	(0.77, 0.21)	(0.78, 0.20)	(0.83, 0.15)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.82, 0.16)	(0.81, 0.17)
(0.83, 0.15)	(0.81, 0.17)	(0.74, 0.24)	(0.84, 0.14)	(0.80, 0.18)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.84, 0.14)	(0.85, 0.13)
(0.83, 0.15)	(0.80, 0.18)	(0.84, 0.14)	(0.84, 0.14)	(0.78, 0.20)	(0.82, 0.16)	(0.84, 0.14)	(1.00, 0.00)	(0.84, 0.14)
(0.82, 0.16)	(0.82, 0.16)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.78, 0.20)	(0.81, 0.17)	(0.85, 0.13)	(0.84, 0.14)	(1.00, 0.00)

$M_{R_3} =$

(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.81, 0.17)	(0.83, 0.15)	(0.79, 0.19)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.81, 0.17)
(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.81, 0.17)	(0.77, 0.21)	(0.77, 0.21)	(0.81, 0.17)	(0.80, 0.18)	(0.83, 0.15)
(0.81, 0.17)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.79, 0.19)	(0.79, 0.19)	(0.78, 0.20)	(0.76, 0.22)	(0.77, 0.21)	(0.77, 0.21)
(0.83, 0.15)	(0.81, 0.17)	(0.79, 0.19)	(1.00, 0.00)	(0.82, 0.16)	(0.84, 0.14)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)
(0.79, 0.19)	(0.77, 0.21)	(0.79, 0.19)	(0.82, 0.16)	(1.00, 0.00)	(0.79, 0.19)	(0.80, 0.18)	(0.78, 0.20)	(0.78, 0.20)
(0.83, 0.15)	(0.77, 0.21)	(0.78, 0.20)	(0.84, 0.14)	(0.79, 0.19)	(1.00, 0.00)	(0.81, 0.17)	(0.83, 0.15)	(0.82, 0.16)
(0.83, 0.15)	(0.81, 0.17)	(0.76, 0.22)	(0.83, 0.15)	(0.80, 0.18)	(0.81, 0.17)	(1.00, 0.00)	(0.83, 0.15)	(0.84, 0.14)
(0.83, 0.15)	(0.80, 0.18)	(0.77, 0.21)	(0.83, 0.15)	(0.78, 0.20)	(0.83, 0.15)	(0.83, 0.15)	(1.00, 0.00)	(0.84, 0.14)
(0.81, 0.17)	(0.83, 0.15)	(0.77, 0.21)	(0.83, 0.15)	(0.78, 0.20)	(0.82, 0.16)	(0.84, 0.14)	(0.84, 0.14)	(1.00, 0.00)

根据算法 1 和算法 2 按如下步骤进行计算：
步骤 1 根据定义 8 的定义 9 计算乐观、悲观粒度下的直觉模糊粗糙集，如表 6 所示。

表 6 多粒度直觉模糊粗糙集
Table 6 Multi-granularity intuitionistic fuzzy rough sets

U	$\sum_{r=1}^m \overline{R_r^O}(Z)$	$\sum_{r=1}^m \underline{R_r^O}(Z)$	$\sum_{r=1}^m \overline{R_r^P}(Z)$	$\sum_{r=1}^m \underline{R_r^P}(Z)$
x_1	(0.70, 0.26)	(0.63, 0.33)	(0.69, 0.26)	(0.64, 0.34)
x_2	(0.72, 0.23)	(0.66, 0.29)	(0.71, 0.24)	(0.66, 0.29)
x_3	(0.77, 0.19)	(0.71, 0.25)	(0.76, 0.20)	(0.70, 0.26)
x_4	(0.66, 0.30)	(0.60, 0.36)	(0.65, 0.31)	(0.58, 0.38)
x_5	(0.72, 0.25)	(0.65, 0.32)	(0.71, 0.26)	(0.65, 0.32)
x_6	(0.69, 0.27)	(0.62, 0.34)	(0.68, 0.27)	(0.62, 0.34)
x_7	(0.64, 0.35)	(0.51, 0.48)	(0.64, 0.35)	(0.49, 0.50)
x_8	(0.62, 0.34)	(0.51, 0.45)	(0.62, 0.34)	(0.50, 0.46)
x_9	(0.65, 0.31)	(0.53, 0.43)	(0.64, 0.32)	(0.52, 0.44)

步骤 2 根据定义 8 和定义 9 的决策规则以及阈值划分正域、边界域和负域，如表 7 所示。因此，乐观和悲观状态下最优对象均为 x_2 和 x_3 ，无法判断 POS 域内对象间的优劣。下面通过本文提出的三支排序方法对域内对象进行排序。

表 7 正域、边界域、负域划分
Table 7 Division of POS, BND and NEG

区域	乐观	悲观
POS	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
BND	$\{x_1, x_4, x_5, x_6, x_9\}$	$\{x_1, x_5, x_6\}$
NEG	$\{x_7, x_8\}$	$\{x_4, x_7, x_8, x_9\}$

步骤 3 构建原始评分矩阵 Q 并根据原始评分矩阵构建理想方案。其中，风险等级越高评分值越大，为了降低决策者的后悔程度，取最大值作为每个评估指标的理想值，得出最终理想方案 I 。

$$Q = \begin{bmatrix} 7.90 & 6.37 & 9.54 & 6.03 & 3.60 & 8.47 & 5.10 & 6.97 & 6.36 \\ 6.35 & 4.19 & 7.61 & 7.91 & 9.56 & 9.05 & 4.84 & 5.43 & 4.18 \\ 5.29 & 6.81 & 7.50 & 4.35 & 4.52 & 4.52 & 3.98 & 3.71 & 3.86 \\ 5.48 & 6.46 & 9.23 & 5.01 & 8.58 & 5.12 & 5.57 & 3.44 & 5.24 \\ 4.13 & 7.96 & 8.00 & 5.43 & 5.38 & 5.37 & 4.39 & 5.24 & 6.30 \end{bmatrix}$$
$$I = [7.90 \quad 7.96 \quad 9.54 \quad 7.91 \quad 9.56 \quad 9.05 \quad 5.57 \quad 6.97 \quad 6.36]$$

步骤 4 根据式 (12~13) 建立效用值矩阵 F 和后悔-欣喜矩阵 C 。

$$F = \begin{bmatrix} 6.42 & 5.30 & 7.61 & 5.04 & 3.17 & 6.84 & 4.33 & 5.74 & 5.28 \\ 5.28 & 3.63 & 6.21 & 6.43 & 7.62 & 7.26 & 4.13 & 4.58 & 3.62 \\ 4.48 & 5.62 & 6.13 & 3.75 & 3.89 & 2.88 & 3.46 & 3.25 & 3.37 \\ 4.62 & 5.36 & 7.39 & 4.26 & 6.92 & 4.35 & 4.69 & 3.04 & 4.44 \\ 3.58 & 6.47 & 6.50 & 4.58 & 4.55 & 4.54 & 3.79 & 4.44 & 5.24 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.02 & 0.07 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.04 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 0.03 & 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.07 & 0.02 & 0.04 & 0.03 \\ 0.03 & 0.02 & 0.01 & 0.03 & 0.01 & 0.05 & 0.00 & 0.04 & 0.01 \\ 0.04 & 0.00 & 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.04 & 0.01 & 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$$

步骤5 根据式(14)通过效用值矩阵 F 和后悔-欣喜矩阵 C 构建感知效用矩阵 G 。为了直观地展示各个员工在不同属性下感知效用值的大小关系,将矩阵 G 绘制如图1所示。由效用值矩阵 F 和后悔-欣喜矩阵 C 可知,同一属性下,效用值越小,则选择当前员工时后悔程度越大。由于风险规避系数的存在,因此感知效用值越小,导致当前员工在该属性下综合评价风险值越低,进而影响排序结果。

步骤6 根据式(15~17)确定属性权重 W_i 如表8所示。

步骤7 根据式(18)计算综合评价风险值 S_j 如表9所示。

步骤8 根据三支排序算法得到乐观和悲观两种状态下的排序结果如下:

乐观: $x_3 > x_2 > x_5 > x_6 > x_1 > x_4 > x_9 > x_7 > x_8$

悲观: $x_3 > x_2 > x_5 > x_6 > x_1 > x_4 > x_7 > x_9 > x_8$

为验证实验结果的合理性与有效性,将本文方法与逼近理想解排序法(Technique for order preference by similarity to an ideal solution, TOPSIS)、加权平均算法(Weighted average algorithm, WAA)以及文献[25-28]中的方法进行对比分析,结果如表10所示。由表10可知,所有方法均可得到完整的排序,即决策者可根据实际需求选择合适的方法。从最优选择结果来看,所有对比方法与本文方法得到的最优对象均为 x_3 ,由于各个方法的计算差异性,例如TOPSIS主要通过优劣解、文献[25]基于 β -覆盖、文献[27]利用了层次聚类等,使得中间对象的排序结果略有差异,由于最后要选择的是最优的对象,因此中间排序差异是被允许的。

从整体来看,文献[25]与WAA方法的结果分别与本文乐观与悲观状态下的排序结果较为一致。进一步,为验证本文乐观、悲观多粒度策略下的三支排序结果相对于其他方法的整体排序结果一致性,其相应的显著性分析如图2所示。图中字母代表是否差异显著,若有一个相同标记字母即为差异不显著,若具有不同标记字母即为差异显著,其中 $p \leq 0.01$ 。从图2(a~f)可知, x_3 和 x_7 、 x_8 有极显著差异, x_7 、 x_8 和 x_9 没有显著性差异, x_3 和 x_2 没有极显著差异,本文方法与TOPSIS方法、WAA方法、文献[25]、文献[26]、文献[27]和文献[28]方法在 x_3 、 x_2 以及 x_7 、 x_8 和 x_9 的差异性判断上与本节判断具有一致性,即 x_3 是最优解。相反地,TOPSIS方法、文献

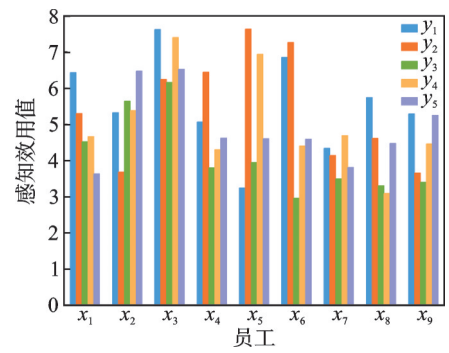


图1 不同属性下员工的感知效用值

Fig.1 Perceived utility values of objects under different employees

表8 属性权重

Table 8 Attribute weights

属性	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
权重	0.07	0.16	0.53	0.11	0.13

表9 综合评价风险值

Table 9 Comprehensive evaluation of risk value

员工	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
风险值	7.75	10.34	12.27	7.85	9.61	8.33	7.51	6.23	7.44

表10 本文及对比方法排序结果

Table 10 Sorting results of the proposed method and comparison methods

决策方法	决策结果
TOPSIS	$x_3 > x_6 > x_2 > x_5 > x_1 > x_4 > x_9 > x_8 > x_7$
WAA	$x_3 > x_2 > x_6 > x_5 > x_1 > x_4 > x_9 > x_7 > x_8$
文献[25]	$x_3 > x_2 > x_5 > x_6 > x_1 > x_4 > x_9 > x_8 > x_7$
文献[26]	$x_3 > x_2 > x_6 > x_5 > x_4 > x_7 > x_1 > x_9 > x_8$
文献[27]	$x_3 > x_2 > x_6 > x_5 > x_7 > x_1 > x_4 > x_9 > x_8$
文献[28]	$x_3 > x_6 > x_5 > x_2 > x_1 > x_4 > x_9 > x_8 > x_7$
乐观	$x_3 > x_2 > x_5 > x_6 > x_1 > x_4 > x_9 > x_7 > x_8$
悲观	$x_3 > x_2 > x_5 > x_6 > x_1 > x_4 > x_7 > x_9 > x_8$

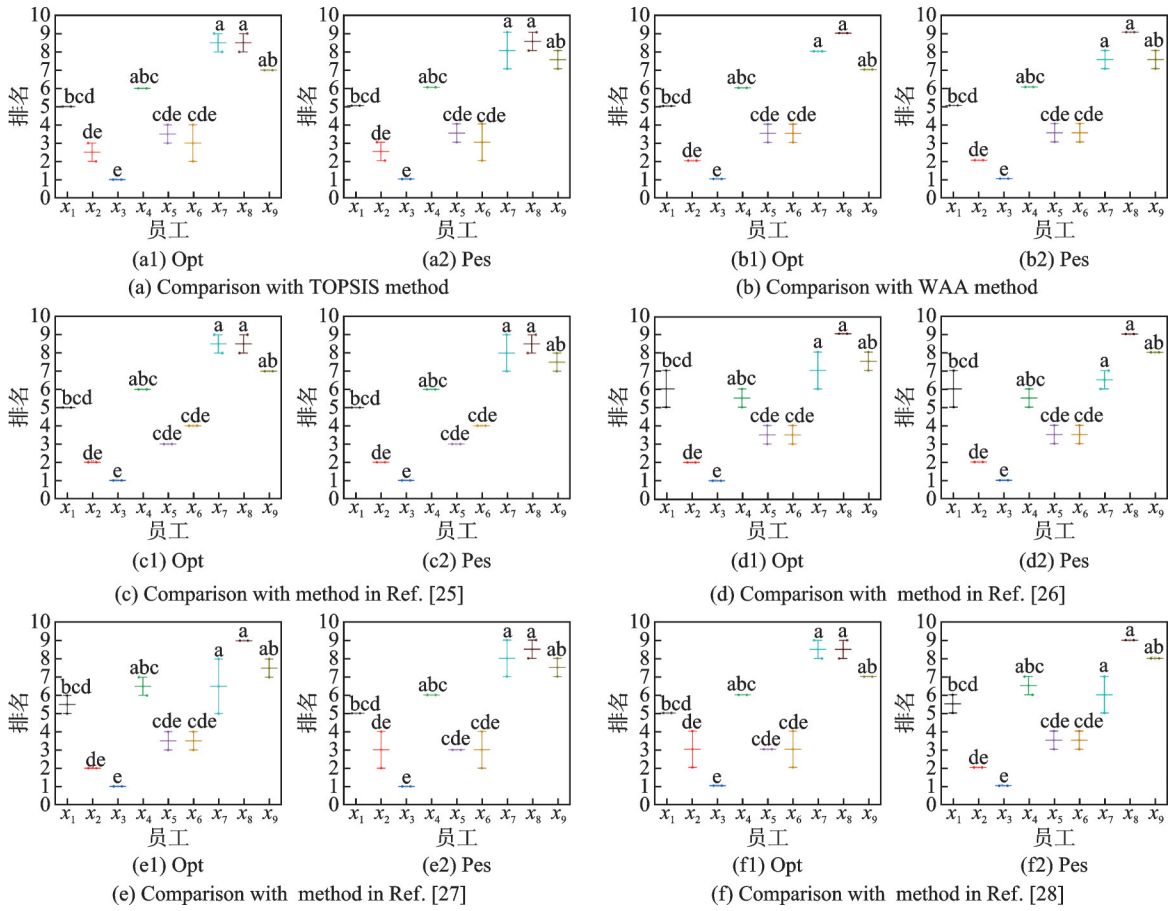


图2 乐观、悲观状态下排序一致性结果对比

Fig.2 Comparison of sorting consistency results under optimistic and pessimistic states

[25]和文献[28]方法认为 x_7 是最差解;WAA方法、文献[26]和文献[27]方法以及本文方法认为 x_8 是最差解。WAA方法、文献[25]、文献[26]和文献[27]方法以及本文方法中 x_2 仅次于 x_3 。

其次,采用皮尔曼秩相关系数(Spearman rank correlation coefficient, SRCC)分析不同方法的排序结果之间的相关系数。SRCC的计算公式为

$$\text{SRCC} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (19)$$

式中: n 为备选方案个数; $d_i = x_i - y_i$, x_i 表示给定方法的备选方案排名, y_i 表示另一种方法中备选方案排名。当 $\text{SRCC} > 0.8$ 时,说明两种方法排序结果的相关程度显著。本文方法与其他方法之间的SRCCs如表11所示。

综上可得,TOPSIS方法、WAA方法以及文献[26]和文献[28]方法未考虑决策者的主观决策偏好程度,而文献[25]和文献[27]方法只使用了单一指标。本文方法可对多名专家的评价值进行综合评估,且考虑了主观决策偏好程度,并从悲观、乐观两方面进行多粒度决策,具有更好的实际应用价值。

表 11 本文方法与其他方法的 SRCCs 对比
Table 11 SRCCs of the proposed method and other methods

对比方法	乐观	悲观	TOPSIS	WAA	文献[25]	文献[26]	文献[27]	文献[28]
乐观	1	0.93	0.93	0.98	0.98	0.90	0.88	0.92
悲观	—	1	0.92	0.95	0.92	0.93	0.89	0.81
TOPSIS	—	—	1	0.97	0.95	0.85	0.82	0.98
WAA	—	—	—	1	0.97	0.92	0.90	0.93
文献[25]	—	—	—	—	1	0.85	0.82	0.93
文献[26]	—	—	—	—	—	1	0.95	0.82
文献[27]	—	—	—	—	—	—	1	0.78
文献[28]	—	—	—	—	—	—	—	1

4 结束语

本文针对多粒度直觉模糊信息决策与排序问题,提出了一种基于后悔理论的多粒度直觉模糊三支决策模型。首先,将 θ 算子与直觉模糊粗糙集结合,提出了多粒度背景下的直觉模糊粗糙集上、下近似算子,并与三支决策结合构造正域、负域和边界域的划分规则。进一步,提出了基于后悔理论的三支排序方法,用于处理决策过程中决策者的不完全理性问题。对比实验表明,本文方法能取得较好的决策结果,且本文方法考虑了主观决策偏好程度,更符合决策者的需求。由于当前模型只考虑了完备信息系统,在未来的研究中将考虑将所提模型拓展到不完备信息系统,建立更通用的多属性认知决策模型。

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[2] YAO Y Y, WONG S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts[J]. International Journal of Man-machine Studies, 1992, 37(6): 793-809.

[3] YAO Y Y. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory[C]//Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 4th International Conference, RSKT 2009. Gold Coast, Australia: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 642-649.

[4] QIAN Wenbin, ZHOU Yangyang, QIAN Jin, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision for information system with fuzzy decision[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 149: 85-103.

[5] XIN Xianwei, SHI Chunlei, SONG Tianbao, et al. Intuitionistic fuzzy three-way transfer learning based on rough almost stochastic dominance[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 118: 105659.

[6] YAN Enliang, YU Cunguo, LU Liming, et al. Incremental concept cognitive learning based on three-way partial order structure[J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 220: 106898.

[7] YE Xiaoqing, LIU Dun. A cost-sensitive temporal-spatial three-way recommendation with multi-granularity decision[J]. Information Sciences, 2022, 589: 670-689.

[8] CHU Xiaoli, SUN Bingzhen, MO Xiumei, et al. Time-series dynamic three-way group decision-making model and its application in TCM efficacy evaluation[J]. Artificial Intelligence Review, 2023, 56(10): 11095-11121.

[9] QIAN Yuhua, LIANG Jiye, YAO Yiyu, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[10] WU Weizhi, LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[11] XIN Xianwei, SONG Jihua, XUE Zhanao, et al. Multi-granular intuitionistic fuzzy three-way decision model based on the risk preference outranking relation[J]. Cognitive Computation, 2022, 14: 1823-1843.

[12] XIAO Yibin, ZHAN Jianming, ZHANG Chao, et al. Three-way decision method within prospect theory via intuitionistic fuzzy numbers in multi-scale decision information systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2023. DOI: 10.1109/TFUZZ.2023.3329486.

- [13] YANG Jilin, YAO Yiyu, ZHANG Xianrong. A model of three-way approximation of intuitionistic fuzzy sets[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2022, 13: 163-174.
- [14] 李小南, 赵璐, 易黄建. 基于加权信息熵的直觉模糊信息系统的三支决策[J]. *控制与决策*, 2022, 37(10): 2705-2713.
LI Xiaonan, ZHAO Lu, YI Huangjian. Three-way decision-making of intuitive fuzzy information system based on weighted information entropy[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(10): 2705-2713.
- [15] ZHANG Zhiying, LIAO Huchang, AL-BARAKATI A. A regret theory-based decision-making method with a reference set under the hesitant fuzzy environment[C]//*Proceeding of 2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.]: IEEE, 2020: 1-7.
- [16] WANG Jiajia, MA Xueling, XU Zeshui, et al. Regret theory-based three-way decision model in hesitant fuzzy environments and its application to medical decision[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(12): 5361-5375.
- [17] HUANG Xianfeng, ZHAN Jianming. TWD-R: A three-way decision approach based on regret theory in multi-scale decision information systems[J]. *Information Sciences*, 2021, 581: 711-739.
- [18] YE Jin, SUN Bingzhen, ZHAN Jianming, et al. Variable precision multi-granulation composite rough sets with multi-decision and their applications to medical diagnosis[J]. *Information Sciences*, 2022, 615: 293-322.
- [19] ATANASSOV K T, ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20: 87-96.
- [20] ZHU Jinxing, MA Xueling, ZHAN Jianming. A regret theory-based three-way decision approach with three strategies[J]. *Information Sciences*, 2022, 595: 89-118.
- [21] DENG Jiang, ZHAN Jianming, XU Zeshui, et al. Regret-theoretic multiattribute decision-making model using three-way framework in multiscale information systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022. DOI: 10.1109/TCYB.2022.3173374.
- [22] QUIGGIN J. Regret theory with general choice sets[J]. *Journal of Risk and Uncertainty*, 1994, 8: 153-165.
- [23] 周志华, 曹存根. 神经网络及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
ZHOU Zhihua, CAO Cungen. *Neural networks and applications*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [24] 吴家明, 黄哲煌, 李进金, 等. Sigma 优劣关系熵及其在多属性决策的应用[J]. *控制与决策*, 2024, 39(2): 613-624.
WU Jiaming, HUANG Zhehuang, LI Jinjin, et al. Sigma relationship entropy of superiority and inferiority and its application in multi-attribute decision-making[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(2): 613-624.
- [25] ZHANG Li, ZHAN Jianming. Fuzzy soft β -covering based fuzzy rough sets and corresponding decision-making applications[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(6): 1487-1502.
- [26] YE Jin, ZHAN Jianming, XU Zeshui. A novel decision-making approach based on three-way decisions in fuzzy information systems[J]. *Information Sciences*, 2020, 541: 362-390.
- [27] 徐怡, 骆帆, 王敏. 基于层次聚类的三支决策移动策略[J]. *计算机科学*, 2023, 50(6): 92-99.
XU Yi, LUO Fan, WANG Min. Three-way decision-making movement strategy based on hierarchical clustering[J]. *Computer Science*, 2023, 50(6): 92-99.
- [28] WANG Wenjie, ZHAN Jianming, ZHANG Chao, et al. A regret-theory-based three-way decision method with a priori probability tolerance dominance relation in fuzzy incomplete information systems[J]. *Information Fusion*, 2023, 89: 382-396.

作者简介:



庞文莉(1993-),女,助理教师,研究方向:三支决策、粒计算、直觉模糊集, E-mail: panwenli@htu.edu.cn。



于潇(1999-),男,硕士研究生,研究方向:三支决策、粒计算, E-mail: name_yuxiao@163.com。



郑宇(1997-),男,硕士研究生,研究方向:多粒度粗糙集、模糊集理论和直觉模糊集。



陈辉(1991-),男,讲师,研究方向:舆情分析、网络行为分析等, E-mail: chen-hui@htu.edu.cn。



薛占熬(1963-),男,博士,教授,研究方向:粗糙集、模糊集与三支决策。



辛现伟(1991-),通信作者,男,博士,讲师,研究方向:模糊语义度量、粒计算与认知计算。