

基于多维混沌映射的复合型部分随机测量矩阵构造算法

陈兴兰¹, 鲁进^{1,2}, 张亚楠¹

(1. 云南大学信息学院, 昆明 650500; 2. 云南省高校物联网技术及应用重点实验室, 昆明 650500)

摘要: 测量矩阵的构造是影响压缩感知技术重构性能的重要环节。针对随机性测量矩阵高存储成本以及确定性矩阵较难满足约束等距性(Restricted isometric property, RIP)特性的问题, 提出了一种基于混沌映射构造测量矩阵的改进方法, 将随机高斯矩阵、确定性矩阵和混沌序列相结合, 充分利用随机高斯矩阵少量测量数和混沌映射较低相关性的优势。同时, 分析了混沌序列的相空间特性、测量矩阵的RIP特性、以及构造优化测量矩阵的计算复杂度。最后, 仿真实验对比了随机高斯矩阵、托普利兹矩阵和现有的复合型矩阵。结果表明, 在一维随机信号的相对误差、成功重构概率及信噪比的指标上, 所提优化测量矩阵均优于其他3种矩阵; 在二维图像的重构时间复杂度、峰值信噪比、结构相似性指数和平均结构相似性指数的指标上, 所提优化测量矩阵也均有一定的提升, 表现出更好的重构性能和良好的应用价值。

关键词: 压缩感知; 混沌映射; 约束等距性; 测量矩阵; 信号重构

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

Algorithm for Constructing Compound Partial Random Measurement Matrices Based on Multidimensional Chaotic Mapping

CHEN Xinglan¹, LU Jin^{1,2}, ZHANG Yanan¹

(1. School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming 650500, China; 2. Yunnan Provincial Key Laboratory of Internet of Things Technology and Application in Universities, Kunming 650500, China)

Abstract: The construction of the measurement matrix is a crucial factor influencing the reconstruction performance of compressive sensing techniques. To address the high storage cost of random measurement matrices and the difficulty in satisfying the restricted isometric property (RIP) with deterministic matrices, an improved method for constructing measurement matrices based on chaotic mapping is proposed. This method combines the random Gaussian matrix with the deterministic matrix and chaotic sequences, taking full the advantages of a small number of measurements from random Gaussian matrices and the lower correlation provided by chaotic mappings. Simultaneously, an analysis is conducted on the phase space characteristics of chaotic sequences, the RIP properties of measurement matrices, and the computational complexity involved in constructing optimized measurement matrices. Finally, simulation experiments compare random Gaussian matrices, Toeplitz matrices, and existing composite matrices. The results show that the proposed optimized measurement matrices outperform the other three types of matrices in terms of relative error, success reconstruction probability, and signal-to-noise ratio for one-dimensional random

基金项目: 云南大学研究生科研创新项目(KC-23236074); 云南大学大学生科技创新类项目(202307136)。

收稿日期: 2024-03-03; 修订日期: 2024-05-23

signals. Additionally, these optimized measurement matrices also exhibit improvements in the reconstruction time complexity, peak signal-to-noise ratio, structural similarity index, and mean structural similarity index for two-dimensional images, indicating better reconstruction performance and significant practical value.

Key words: compressive sensing; chaotic mapping; restricted isometric property (RIP); measurement matrix; signal reconstruction

引言

随着无线多媒体传感器网络和5G移动通信系统的发展,网络需要传输、存储和处理大量的视频、图像和音频源。为了减小通信系统中的传输和存储负担,通常采用数据压缩的方法^[1]。与传统的压缩方法相比,压缩感知(Compressed sensing, CS)技术^[2-3]可以降低编码器的计算复杂度,同时具有更低的功耗和更高的压缩效率。CS自2006年左右引入以来,在很多领域具有广阔的应用前景,例如:无线传感网络、医学图像处理^[4]、认知无线电通信^[5]、数据压缩和磁共振成像(Magnetic resonance imaging, MRI)^[6]等。

CS与传统的奈奎斯特(Nyquist)采样定理不同,前者可以同时进行数据压缩和采样^[7],此外CS的采样频率远小于后者的采样频率,可以打破Nyquist采样理论的局限性。CS在保留重要信息的前提下,用一个特定的测量矩阵和线性关系实现高维数据到低维空间的映射。然后,利用低维观测值,通过求解最优问题实现对原信号的高精度重构。压缩感知理论主要由信号(图像)稀疏表示、测量矩阵的构造和重建算法3部分组成^[8]。其中,测量矩阵是CS的重要环节,将直接影响到信号重建的准确性。一个效果良好的测量矩阵在进行压缩取样时能够存留信号的重要特征,还可以提高信号重构的精度和降低算法的复杂度^[9]。目前,已有许多研究证明,随机高斯测量矩阵和伯努利随机测量矩阵等随机测量矩阵可作为一种有效的压缩测量矩阵^[9]。文献[10]提出了使用一个 $M \times N$ 维随机矩阵 Φ ,可以保证以很高的概率重构出具有稀疏度为 $K = O(M/\log(N/M))$ 的稀疏信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 。虽然随机测量矩阵已经有了很好的理论基础,但是它在实际应用中还存在着一些不足。一方面,随机矩阵的生成具有高度的不确定性,增加了硬件实现过程中的难度;另外,因为随机矩阵中的每个元素都需要进行存储,所以导致了额外的存储成本。

基于上述问题,近年来国内外学者对此做了大量而深入的研究。文献[11]给出了一种2个测量矩阵相结合的压缩感知方法,采用混沌离散小波变换和混沌离散余弦变换测量矩阵。Wei等^[12]提出了一种以梯度投影为基础的测量矩阵构建方法,其优化策略在于减小测量矩阵之间的相互关联性。这种方法具有较小的矩阵误差和高精度,但应用于二维图像时,重建误差略大。Tawfic等^[13]提出了基于正弦函数和离散余弦变压器的测量矩阵构造方法,在不引入额外传输负担的情况下,成功地最小化了信号重建误差。这个测量矩阵虽然容易构造,但是只有在重构二维图像时重构性能才会较好。文献[14]提出用Bose-Chaudhuri-Hocquenghem(BCH)码构造测量矩阵的方法。BCH码构造出一类大小为 $(q^l -$

$1) \times q^{o\left(q^{(l-r)} \frac{\log_2 r}{r}\right)}$ 并且互相干性为 $\mu(\Phi) = \frac{q}{2(q-1)} \cdot \frac{q^{l-r} - 1}{q-1}$ 的测量矩阵,其中 q 表示元素个数, l 表示子

空间的维数, r 表示自然数。这类矩阵是双极矩阵,但是元素只包含 ± 1 ,且 $q = 2$ 。文献[15]利用Chirp编码构造了大小为 $q \times q^2$ 且互相干性为 $\mu(\Phi) = 1/\sqrt{q}$ 的测量矩阵,这种类型的矩阵在信号重构方面的表现与高斯随机矩阵相当,但是不适用于维数太小的情况。文献[16]提出了一种扩展二维可分离感知

矩阵的构造方法,虽然计算复杂度较低且重构效果良好,但只适用于二维图像。Nguyen等^[17]提出了一种耦合二次同余随机数生成器辅助测量矩阵的构造方法,可以有效地应用于硬件中,但与托普利兹测量矩阵相比,重构效果没有明显的提升。文献[7]中借助级联的方法,将量子 Logistic 混沌系统和广义 Fibonacci 数列这两种不同的系统结合起来,提出了一种新的复合混沌系统测量矩阵的构造方法,与普通的 Logistic、Chebyshev 和 Tent 等相比,这一方法在不同混沌序列之间引入了加性串扰,使得系统的随机性和混沌性更好,但同时也带来了较高的算法复杂度。文献[18]中构造了一个以异或混合混沌序列为基础的测量矩阵,提高了重构成功率,但对于二维图像效果较差。文献[19]中提出了结合随机高斯矩阵与伪随机序列和哈达玛矩阵优化测量矩阵的方法,这样构造矩阵虽然保留了随机高斯矩阵测量少的优势和良好的重建性能,但伪随机序列的相关性较高。

目前这些测量矩阵的构造和优化方法虽然获得了较好的重构性能,但大部分只能针对一些特定的实验条件和对象,关键的问题是需要考虑在满足约束等距性(Restricted isometric property, RIP)条件的前提下,如何减少随机性矩阵带来的存储开销大和重构效率的问题。受上述文献中各种类型测量矩阵结合思想的启发,本文设计一种将随机矩阵、确定性矩阵和混沌序列结合去优化测量矩阵构造方法。首先,生成1个 $M \times N$ 的随机高斯矩阵。其次,将Hadamard矩阵嵌套到有限域稀疏方阵中,构造1个渐近最优的确定性矩阵。再者,将Logistic混沌映射和Chebyshev映射分别与Fibonacci数列级联,然后利用符号函数映射生成两路序列,即0-1序列,再通过异或操作将两路序列生成一路混合混沌序列,接着将混合混沌序列按列进行排序生成混沌序列矩阵。最后,将随机高斯矩阵和确定性矩阵、混沌序列矩阵结合生成1个大小为 $M \times N$ 的测量矩阵。这利用了变阶随机高斯矩阵的灵活性、混沌序列的良好伪随机性、低相关性及哈达玛矩阵的二元性质。同时,验证了本文所提出的相关理论的合理性,并且所提出的测量矩阵满足RIP条件,为精确重构出信号提供了可能。此外,还分析了混沌序列的相空间特性和构造优化测量矩阵的计算复杂度。

1 CS基本理论

如果一个实离散时间信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 中只有少量的非零元素,它称为稀疏信号,其中非零元素的数量 $K = \|x\|_0$ 代表了信号的稀疏度。根据CS理论,假设信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 可用一组正交基 $\Psi = \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示且是稀疏的,则只需远低于奈奎斯特采样率的数据点就可以重建和恢复出原始信号 $x \in \mathbb{R}^N$ ^[19],即

$$x = \Psi\alpha \quad (1)$$

式中 $\alpha \in \mathbb{R}^N$ 是信号 x 在 Ψ 上的系数向量。

CS测量模型为

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha \quad (2)$$

式中:待测信号 $x \in \mathbb{R}^N$,其稀疏度为 K ;压缩后的测量值为 $y \in \mathbb{R}^M$,测量矩阵为 Φ 和稀疏基为 Ψ 。若存在残差向量 $\|n\|_2 = \|y - \Phi x\|_2 \leq \epsilon$, ϵ 为噪声误差,使得

$$(1 - \delta_k) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_2^2 \quad (3)$$

式中:当 $\delta_k \in (0, 1)$ 时,矩阵 Φ 满足RIP准则^[20]。Wang等^[21]指出可以在 l_0 范数条件下通过求解优化问题来解出式(3)中的 x 。由于 l_0 范数最小化问题是非确定性多项式(NP)-Hard问题^[22],因此需要转化成在 l_1 范数条件下通过求解最优化问题来求解 x ,表达式为

$$\begin{cases} \min \|x\|_{l_1} \\ \text{s.t. } \Phi \Psi \alpha = y \end{cases} \quad (4)$$

可以通过线性规划求解式(4)。

在实际应用中验证测量矩阵是否满足 RIP 特性非常具有挑战性,所以通常将验证测量矩阵是否满足 RIP 特性的问题可以转换为非相干性问题。假设存在一个矩阵 $\Psi_{n \times n}$,其每个列向量用 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 表示;存在一个矩阵 $\Phi_{m \times n}$,其行向量用 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ 表示,那么两个矩阵之间的相干系数 μ 可以被定义为^[19]

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max |\phi_k, \psi_j| \tag{5}$$

式中: $1 \leq k \leq m; 1 \leq j \leq n; n$ 表示矩阵列向量值。

2 本文测量矩阵构造方法

2.1 矩阵构造

鉴于哈达玛矩阵在计算、处理和存储等方面都具有显著优势,并且在有限域多项式生成的确定性矩阵基础上,将列相干系数较小的矩阵(如 Hadamard 矩阵)嵌套到确定性矩阵中,可以在保持列相干系数不变的情况下,展开矩阵维数的同时降低矩阵的相关性;同时,还考虑到混沌序列的良好伪随机性、低相关性。因此本文以嵌套后得到的确定性矩阵和混沌序列为基础,提出了一种全新的测量矩阵设计方法。

假定测量矩阵为 $\Phi = DCG$,其中 D 为一个可调整大小的随机高斯矩阵, C 为哈达玛矩阵嵌套到有限域多项式生成的矩阵中得到的确定性矩阵, G 为混沌序列矩阵。哈达玛矩阵的构造规则^[19]通常是

$$H = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}, \text{若 } H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{则}$$

$$H_{N'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

式中 $N' = 2k, k \in \mathbb{N}$ 。

借鉴 Devore 的思想,使用一个有限域多项式来构造一个满足 RIP 特性的确定性矩阵^[23],具体内容如下:

(1) 形成一个元素为 $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ 的有限域 F_q ,且 q 为质数。

(2) 对于任意一个给定的自然数 $r(0 < r \leq q)$,构造一个多项式集 $Q(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_r x_1^r$,式中 $a_0, a_1, \dots, a_r \in F_q$,所以有 $N = q^{r+1}$ 个这样的多项式。当多项式模上 q 时,可以将多项式 $Q(x_1)$ 看作是 F_q 到 F_q 的映射。

(3) 给出一个全零矩阵 $E_{q \times q}$,矩阵中各元素的坐标为 $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (q-2, q-2), (q-1, q-1)\}$ 。

(4) 把矩阵 E 第 x_1 行的第 $Q(x_1) \bmod q$ 个元素从 0 变成 1,即让矩阵 E 中坐标为 $(x_1, Q(x_1) \bmod q)$ 的元素值从 0 变为 1, $(x_1, Q(x_1) \bmod q) \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$,如图 1 所示^[9]。

(5) 将矩阵 E 按照 $\{(0, 0), (1, 0), \dots, (q-1, q-1)\}$ 的顺序转换成大小为 $q^2 \times 1$ 的列向量 v_Q 。从图 1 可以看出,列向量 v_Q 中的前 q 个元素中有 1 个 1,前 $2q$ 个元素中有 2 个 1,前 $3q$ 个元素中有 3 个 1。以此类推,整个向量有 q 个元素 1。

(6) 通过取不同的多项式 $Q(x_1)$,得到 $N = q^{r+1}$ 个相似的列向量 v_Q ,构成 $M \times N$ 维矩阵 A ,其中 $M = q^2, N = q^{r+1}$ 。

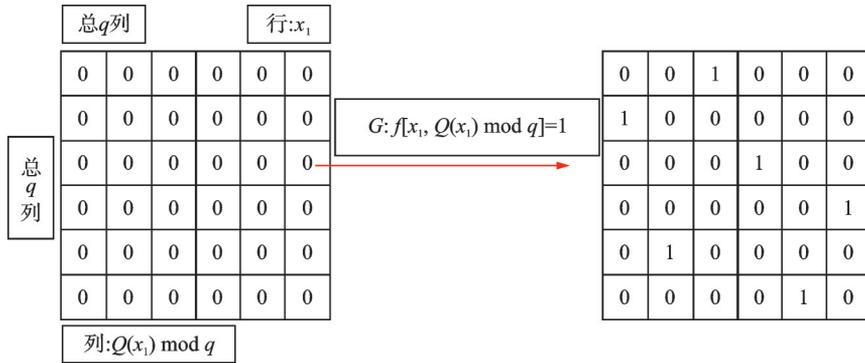


图1 基于零矩阵多项式映射的矩阵列构造方法

Fig.1 A method for constructing matrix columns based on zero matrix polynomial mappings

衡量测量矩阵性能的一个关键指标是列相干性。对于某些二进制矩阵,由于其元素取值为非负数,很难构造一个具有低互相干性的矩阵。Amini等^[24]从矩阵结构的观点出发,提出了一种嵌套的矩阵构建方法,如图2所示。采用图中嵌套方法,将Hadamard矩阵嵌套到Devore提出的有限域多项式矩阵中^[9],可以构造出逐步优化相干性的稀疏矩阵。

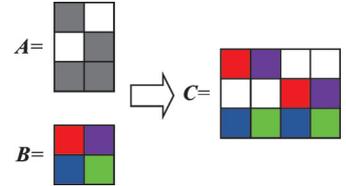


图2 矩阵嵌套规则

Fig.2 Matrix nesting rules

矩阵 A 是有限域多项式构造的确定性矩阵,其大小为 $q^2 \times q^{r+1}$,将Hadamard矩阵构造为大小是 $q \times q$ 的矩阵 B ,然后利用图2的嵌套规则,对矩阵 A 和 B 进行嵌套。规则是用矩阵 B 的第 i 行 ($i = 1, 2, \dots, q$) 去替换矩阵 A 每列的第 i 个元素1,且将零元素扩展到相同的维度,直到替换完矩阵 A 中的所有非零元素,最后产生一个维数是 $q^2 \times q^{r+2}$ 的确定性矩阵 C 。

除了考虑Hadamard矩阵和有限域多项式矩阵的优势之外,同时利用了混沌序列较好的低相关性和伪随机性,它在自然界中普遍存在。其中Logistic混沌映射和Chebyshev映射作为常见的映射方法,本文将Logistic混沌映射和Chebyshev映射分别与Fibonacci数列级联,然后利用符号函数映射生成两路0-1序列,再通过异或操作将两路序列结合,从而得到一路混合混沌序列,接着按列进行排序生成混沌序列矩阵,其原理如图3所示。

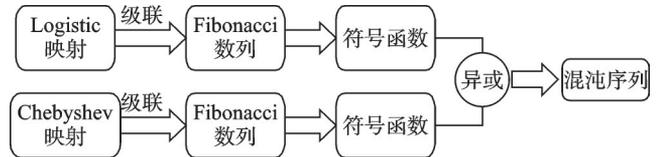


图3 混沌序列产生原理

Fig.3 Principle of chaotic sequence generation

本文用级联法建立混沌系统模型,将3D-Logistic混沌映射、3D-Chebyshev混沌映射分别与Fibonacci数列级联,构造具有广义变参的Fibonacci混沌系统,可以有效地减小序列元素之间的相关性,从而提高了混沌映射的整体随机性。混沌系统模型为^[7]

$$F_i = (aF_{i-1} + \alpha_1 bF_{i-2} + \alpha_2 cF_{i-3}) \bmod D \tag{7}$$

式中: a, b, c 为3个系数; α_1, α_2 为权值系数; F_i 为迭代的Fibonacci数列; D 为常数。

3D-Logistic混沌映射作为高维混沌系统,它将扰动修正引入到混沌迭代过程中,很好地提升了混沌序列的非周期性,并显著增强了混沌的伪随机性。其表达式为^[25]

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) + \beta y_n^2 x_n + \gamma z_n^3 \\ y_{n+1} = \alpha y_n(1 - y_n) + \beta z_n^2 y_n + \gamma x_n^3 \\ z_{n+1} = \alpha z_n(1 - z_n) + \beta x_n^2 z_n + \gamma y_n^2 \end{cases} \tag{8}$$

式中: x_n, y_n, z_n 分别表示3组混沌序列的不同迭代变量; α, β, γ 为控制参数。当控制参数取值在 $3.53 < \alpha < 3.81, 0 < \beta < 0.022, 0 < \gamma < 0.015$ 范围和初始值 $(x_0, y_0, z_0) \in (0, 1)$ 时,式(8)非线性方程表现出混沌特征行为。3D-Logistic映射中具有3个控制参数的二次和三次耦合,使其更加复杂和混沌。在实际应用中,控制参数 α, β, γ 和初始值 x_0, y_0, z_0 的取值非常关键,这些参数的取值直接影响到混沌系统的混沌性和混沌映射序列的相关性。

3D-Chebyshev混沌映射是由二维混沌映射^[26]扩展而来,为了提高混沌系统的混沌性和算法的安全性,本文将二维扩展到三维Chebyshev映射中,其3D-Chebyshev混沌映射的定义为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos(\omega \arccos x_n) \\ y_{n+1} = \cos(\omega \arccos y_n) \\ z_{n+1} = \cos(\omega \arccos z_n) \end{cases} \quad (9)$$

式中 ω 为系统阶数。映射在 $\omega > 2$ 的情况下处于混沌状态,混沌序列的生成可通过式(9)来实现;在 $\omega > 4$ 的情况下映射处于满秩状态,混沌序列则在区间 $[-1, 1]$ 上遍历。

为了可以通过异或操作生成混合混沌序列,利用阈值函数法^[18]将两路实值序列转换成0-1序列。阈值函数的数学表达式为

$$\text{sgn}(x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 \geq t \\ 0 & x_2 < t \end{cases} \quad (10)$$

式中: t 为门限值; x_2 为实值序列的值。最后将上述产生的两路0-1序列通过异或操作,生成1组长度为 $M \times N$ 的混沌序列 $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots, P_{MN-1}\}$,然后按列进行排序得到混沌序列矩阵 $G_{M \times N}$,表达式为

$$G = \begin{pmatrix} P_0 & P_M & \dots & P_{M(N-1)} \\ P_1 & P_{M+1} & \dots & P_{M(N-1)+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{M-1} & P_{2M-1} & \dots & P_{MN-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

在算法1~3中列出了测量矩阵具体的构造过程。

算法1 测量矩阵的优化算法

输入:测量数 M ,信号长度 N

输出: Φ

初始化: $q \in [7, 16], r = 1, k = 2, 4$

- (1) for $a_0 = 0; q - 1$
- (2) for $a_1 = 0; q - 1$
- (3) $Q(x_1, y_1) = (a_0, a_1)$
- (4) end
- (5) end
- (6) $E = \text{zeros}(q, q), S = q^{r+1}$
- (7) for $l = 1; S$
- (8) for $y_2 = 1; q$

算法2 Hadamard矩阵构造算法

输入: k

输出: B

- (1) if $k = 1$
- (2) $B = [1 \ 1; 1 \ -1]$
- (3) else if
- (4) $H = B_1(k/2)$
- (5) $B = \text{kron}([1 \ 1; 1 \ -1], H)$
- (6) end

```

(9)  $x_4 = \text{mod}(Q(x_1, y_1), q)$ 
(10)  $E(x_4 + 1, y_2) = 1$ 
(11)  $E_V((y_2 - 1) * q + 1 : y_2 * q) = E(:, y_2)$ 
(12) end
(13)  $A(:, l) = E_V$ 
(14) end
(15) 由算法 2, 得到 Hadamard 矩阵  $B$ 
(16)  $x_{5i} = \text{randperm}(\text{size}(B, 1), q), x_5 = B(x_{5i}, :)$ 
(17) for  $j = 1 : \text{size}(A, 2)$ 
(18)   for  $r = 1 : \text{size}(A(:, j), 1)$ 
(19)     if  $A(r, j) = 1$ 
(20)        $r_1 = [r_1, r]$ 
(21)     end
(22)   end
(23)   for  $i = 1 : \text{length}(r_1)$ 
(24)      $i_1 = r_1(i)$ 
(25)      $F(i_1, :) = x_5(i, :)$ 
(26)   end
(27) end
(28)  $x_6 = \text{randperm}(\text{size}(F, 1), N)$ 
(29)  $F_1 = F(:, x_6), C = F_1^T$ 
(30) 由算法 3, 得到混沌序列矩阵  $G$ 
(31)  $D = \text{randn}(M, N)$ 
(32)  $\Phi = DCG$ , 如式(12)所示

```

算法 3 混沌序列矩阵构造算法输入: M, N 输出: G 初始化: $\alpha, \beta, \gamma, \omega, x_1, y_1, z_1$ $F_1, F_2, F_3, \alpha_1, \alpha_2, c, D$ (1) for $i = 2 : (M * N)$ (2) 由式(8)和式(9), 得到 x_i, y_i, z_i (3) for $j = 4 : (M * N)$ (4) 由式(7), 得到 F_j

(5) end

(6) end

(7) for $s = 1 : (M * N)$ (8) if $F_s < c$ (9) $F_s = 0$

(10) else if

(11) $F_s = 1$

(12) end

(13) end

(14) 由式(8)得到的序列: $a = F_s$ (15) 由式(9)得到的序列: $b = F_s$ (16) $P = \text{mod}(a + b, 2)$ (17) for $r = 1 : \text{length}(P)$ (18) $P_i = 2P_i - 1$

(19) end

(20) 由式(11)得到混沌矩阵 G

$$\Phi = DCG = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{M1} & \cdots & d_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{N \times M} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}_{M \times N} \quad (12)$$

2.2 相空间特性分析

相空间特性是一个衡量混沌序列相关性的重要指标。相空间是由系统的状态变量构成的多维空间,其中每一个维度对应着一种状态变量。相空间中两个状态变量之间的关系可以用相图表示,从相图中可以直观地看出序列间的相关性。

图4展示了 Logistic、Chebyshev、Logistic-Tent 和 Chebyshev-Tent 映射混沌序列 $x(i-1)$ 与 $x(i)$ 的关系以及本文提出的混沌系统序列 $F(i-1)$ 与 $F(i)$ 关系的相图。其中图4(a,c)的初始值分别是 $x_0 = 0.859375, y_0 = 0.156250, z_0 = 0.921875$ 和 $x_0 = 0.859375$; 图4(b,d)的初始值是随机数; 图4(e)是在常数参数 $\alpha = 3.770, \beta = 0.0157$ 和 $\gamma = 0.0125$, 初始值 $x_0 = 0.859375, y_0 = 0.156250, z_0 = 0.921875, F_0 = 0.8, F_1 = 0.8$ 和 $F_2 = 0.8$ 的情况下生成; 图4(f,e)的初始值相同。根据图4可见,通过对6种混沌系统相空间特性的比较,发现一维 Logistic 映射和 Chebyshev 映射的递推函数之间存在着简单的线性关

系,混沌序列中前后两个数据的线性关系非常明显。Logistic-Tent映射和前两种映射一样,也是简单的线性关系递推函数,混沌序列中的数据相关性很强。Chebyshev-Tent混沌映射中的数据相关性虽然降低了,但还是有比较高的相关性。本文提出的广义变参Fibonacci混沌系统在相图中呈现出了混沌状态,这是因为混沌系统的各参量在迭代过程中会不断地改变,使得所得到的数据之间并不存在显著的线性关系,因而其相空间特征也具有随机性。图4表明,本文提出的Logistic-Fibonacci和Chebyshev-Fibonacci两种混沌映射生成的序列具有很低的相关性,因此更适合构造混沌序列矩阵。

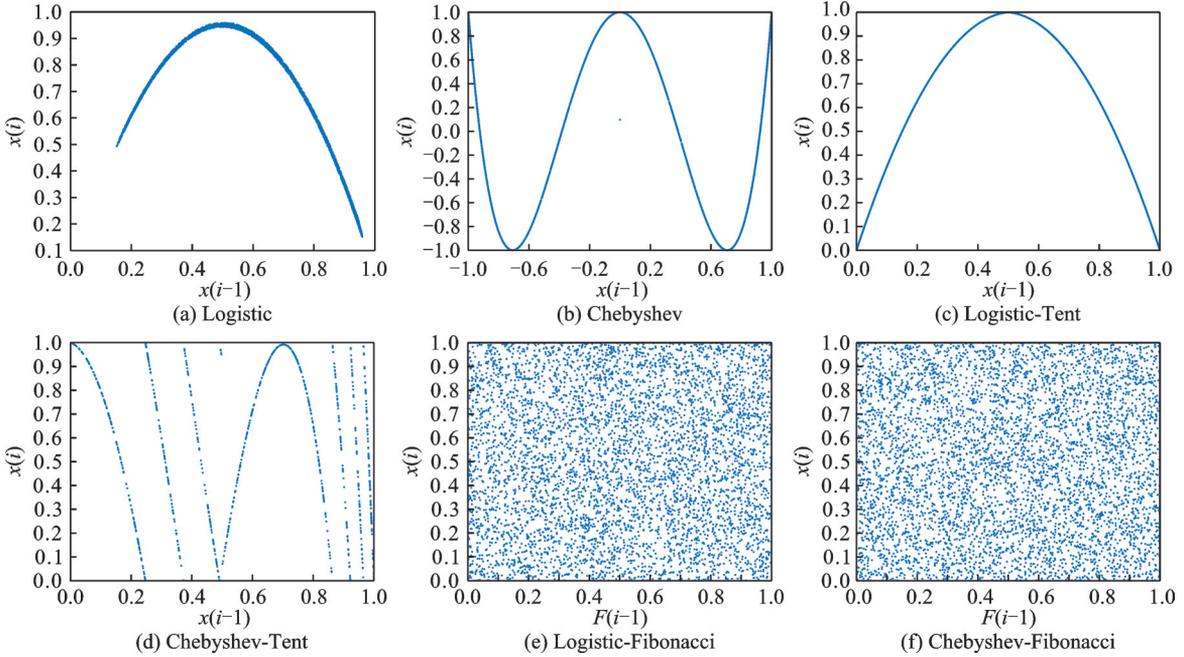


图4 混沌系统相图

Fig.4 Phase diagram of chaotic systems

2.3 RIP特性分析

定理1 假设 D 为一个具有可变行数的随机高斯矩阵, C 为哈达玛矩阵嵌套到有限域多项式方正中的确定性矩阵, G 为混沌序列矩阵,则测量矩阵 $\Phi = DCG$ 与稀疏矩阵 Ψ 是不相关的。

证明:可以通过证明乘积矩阵 $\Phi\Psi$ 的期望值为零来验证测量矩阵 Φ 和稀疏矩阵 Ψ 是不相关的^[19]。具体证明步骤如下:

假设 $\Phi = DCG = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$, $Q = CG\Phi = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, Ψ 为1个列向量两两正交的稀疏矩阵,其中 $|\phi_{ij}| = O(1)$ 。

$$E(q_{ij}) = E(\langle \phi_{(i)}, \psi_{(j)} \rangle) = E\left(\sum_{k=1}^N C_{ki} G_{ik} \psi_{kj}\right) = 0 \tag{13}$$

$$D(q_{ij}) = E(\langle \phi_{(i)}, \psi_{(j)} \rangle^2) - E^2(\langle \phi_{(i)}, \psi_{(j)} \rangle) = \left(\sum_{k=1}^N C_{ki} G_{ik} \psi_{kj}\right)^2 = (C_{1i} G_{i1} \psi_{1j} + C_{2i} G_{i2} \psi_{2j} + \dots + C_{Ni} G_{iN} \psi_{Nj})^2 = \sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \psi_{kj}^2 \tag{14}$$

由式(13,14)可知, $q_{ij} \sim \left(0, \sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2\right)$ 。然后证明 $D(q_{ij})$ 的期望和方差值都存在且有界, 这样就可以证明 q_{ij} 满足中心极限定理的要求。

$E(q_{ij}) = 0, D(q_{ij}) = \sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2$, 其中 $C_{ki} = \{-1, 0, 1\}, G_{ik} = \{-1, 1\}$ 。则有

$$E\left(\sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2\right) = E\{C_{1i}^2 G_{i1}^2 \phi_{1j}^2 + C_{2i}^2 G_{i2}^2 \phi_{2j}^2 + \dots + C_{Ni}^2 G_{iN}^2 \phi_{Nj}^2\} = E\left(\sum_{k=1}^N \phi_{kj}^2\right) \leq z \quad (15)$$

式中 z 为 ϕ_{kj} 非 0 的个数, $0 \leq z \leq N, z \in \mathbf{Z}^+$ 。

$$D\left(\sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2\right)^2 - \left[E\left(\sum_{k=1}^N C_{ki}^2 G_{ik}^2 \phi_{kj}^2\right)\right]^2 = E\left(\sum_{k=1}^N \phi_{kj}^2\right)^2 - \left[E\left(\sum_{k=1}^N \phi_{kj}^2\right)\right]^2 \geq 0 \quad (16)$$

同理, 假设式(16)的最大值为 $d, 0 \leq d \leq N, d \in \mathbf{Z}^+$, 则 $D(q_{ij})$ 的方差是有限值, q_{ij} 满足中心极限定理的要求。根据中心极限定理得: $q_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ 。

然后只要证明随机高斯矩阵 D 与 Q 之间不相关即可。已知 $d_{ij} \sim N(0, 1), q_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, 且 D 与 Q 之间相互独立。假设 $z_{ij} = d_{ij}q_{ij}$, 则 z_{ij} 的概率密度函数为

$$f(z_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-d_{ij}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-q_{ij}^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \delta(d_{ij}q_{ij} - z_{ij}) dd_{ij} dq_{ij} = \frac{K_0(|z_{ij}|)}{\pi} \quad (17)$$

式中: $K_0(|z_{ij}|)$ 为诺伊曼函数, $z_{ij} = \frac{(d_{ij} + q_{ij})^2 - d_{ij}^2 - q_{ij}^2}{2}$, 则 $E(z_{ij}) = 0$, 所以得出矩阵 D 与 Q 不相干。

综上所述, 通过证明乘积矩阵 $\Phi\Psi$ 的期望值为零, 可以进一步证明 Φ 与 Ψ 之间是不相关的, 从而得出本文优化的矩阵满足 RIP 特性的结论。

2.4 计算复杂度分析

对于本文提出的基于混沌映射构造测量矩阵的改进方法, 构造多项式集合 $Q(x_1)$ 的复杂度为 $O(q^2)$, 把矩阵 E 的第 x_1 行第 $Q(x_1) \bmod q$ 个元素从 0 变成 1 的复杂度为 $O(q^{r+2})$, 将 Hadamard 矩阵嵌套到多项式构造的矩阵中的复杂度为 $O(N(M+q))$, 生成混沌序列矩阵的复杂度为 $O(MN^2)$, 该算法总复杂度为 $O(q^{r+2} + qN + (MN)^2)$ 。

3 仿真实验及结果分析

在仿真平台上, 本文采用离散余弦变换正交基 Ψ 和正交匹配追踪法 (Orthogonal matching pursuit, OMP) 算法对具有一定稀疏度的一维随机信号和几张经典图像进行了重构实验, 并且与随机高斯矩阵、托普利兹矩阵和文献[19]提出的方法进行比较。笔记本电脑配置是 Intel(R) Core(TM) i7-12650H 处理器、CPU 主频 2.30 GHz、内存 16 GB。

3.1 重构时间复杂度分析

本节将对 4 种测量矩阵的重建时间进行讨论和比较。选取图像 Lenna、Peppers、Baboon、Barbara 和 Cameraman 作为实验对象, 其中图像 Lenna、Peppers、Baboon 和 Barbara 大小为 512 像素 \times 512 像素, 图像 Cameraman 大小为 256 像素 \times 256 像素。在 4 种测量矩阵和 $M = 64, K = 16$ 的情况下, 进行了 200 次实验, 并取得了结果的平均值, 如表 1 所示。从表 1 得出, 在重构图像 Lenna 时, 虽然本文的优化矩阵所用时间比文献[19]构造的测量矩阵较长, 但是在与其他图像比较时都较短, 总体上说明重构的时间是减少的。通过分析得出, 本文构造的测量矩阵包含有限域多项式生成的确定性矩阵, 虽然增加了时间,

表1 不同测量矩阵的重构时间 ($M=64, K=16$)

Table 1 Reconstruction time of different measurement matrices ($M=64, K=16$)

图像	随机高斯	托普利兹	$\Phi = DHG^{[19]}$	本文优化矩阵
Lenna	11.464 324	19.210 731	11.132 235	11.133 090
Peppers	11.319 380	12.925 551	12.897 068	11.282 554
Baboon	11.458 011	14.247 876	12.723 371	11.242 184
Cameraman	2.850 858	3.176 399	3.446 346	2.765 600
Barbara	11.665 085	12.810 339	12.550 933	10.926 611

但是因为矩阵的相干性和稀疏性较好,使得重构算法可以快速迭代和收敛,证明了本文算法在时间上的优势。

3.2 相对误差分析

本节对优化矩阵用于重构一维信号的准确度进行了分析。对于稀疏信号的重构质量,以相对误差 ($RE = |x_3 - \hat{x}|/|x|$,其中 x_3 为重构值, x 是原始值) 作为重建精度的度量指标。

在实验中,产生1个包含 $N = 256$ 个元素的稀疏信号,其中有 K (稀疏度) 个非零值在信号中随机分布, y 是长度为 M 的观测矢量,则信号的采样率为 M/N 。根据图5展示的信号重构情况,可以观察到,在稀疏占比 (Sparsity percentage, $SP = K/N$) 约为0.04、采样率为0.88的情况下,本文改进测量矩阵能够失真较少地重构信号,呈现出良好的重构效果。

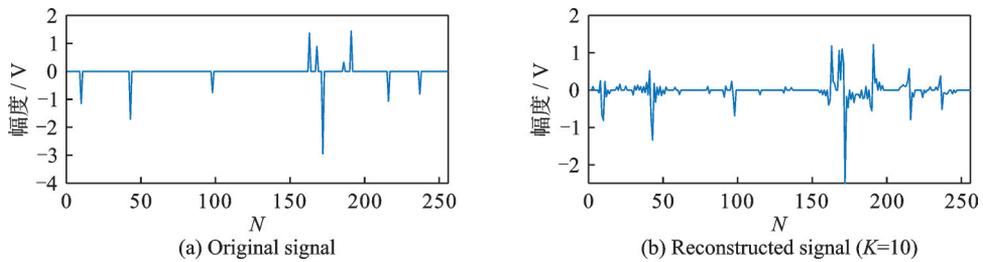


图5 一维信号的压缩采样与重构

Fig.5 Compression sampling and reconstruction of one-dimensional signals

计算本文优化矩阵在不同稀疏程度下的信号重构 RE 时,先进行200次实验,然后取这200个数据的平均值得到表2。从图6可看出,优化矩阵的 RE 在 $SP = 0.04$ 的情况下的实验值最小。当在稀疏度相同的情况下,测量数目逐渐增加时,重构相对误差则逐渐减小;在测量数目相同的情况下,稀疏度逐渐增加时,重构相对误差也逐渐增大。

表2 不同 M 和 SP 下的重构相对误差

Table 2 Reconstruction relative error under different M and SP

测量数目	稀疏占比			
	0.04	0.08	0.12	0.16
49	0.882 0	0.893 9	0.909 7	0.925 3
64	0.808 1	0.859 6	0.901 8	0.920 9
81	0.711 9	0.823 2	0.857 8	0.916 7
100	0.487 2	0.761 4	0.789 6	0.859 3
121	0.448 2	0.478 1	0.705 9	0.722 1
144	0.330 6	0.459 4	0.565 7	0.695 7
169	0.257 4	0.352 4	0.556 9	0.578 7
196	0.121 0	0.246 7	0.321 6	0.370 8
225	0.056 8	0.167 6	0.198 5	0.237 4
256	0.046 4	0.092 0	0.129 4	0.131 2

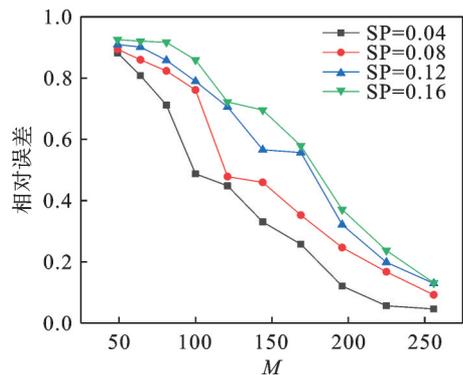


图6 不同 M 和 SP 下的重构相对误差曲线图

Fig.6 Reconstruction relative error curves under different M and SP

此外,通过先进行200次实验,再取其平均值,对优化矩阵与 $\Phi = DHG$ 、高斯随机矩阵和托普利兹矩阵的RE进行了比较。当 $K = 10$ 时,得到表3结果。

表3 不同矩阵在不同 M 处重构信号的相对误差

Table 3 Relative error in reconstructing signals with different matrices at various M

测量数目	随机高斯	托普利兹	$\Phi = DHG^{[19]}$	本文优化矩阵
49	0.894 2	0.902 3	0.911 5	0.882 0
64	0.853 4	0.863 6	0.876 0	0.808 1
81	0.797 1	0.822 7	0.788 4	0.711 9
100	0.727 5	0.764 5	0.574 6	0.487 2
121	0.624 4	0.697 8	0.467 0	0.448 2
144	0.499 9	0.617 2	0.373 6	0.330 6
169	0.347 6	0.506 1	0.337 6	0.257 4
196	0.259 2	0.445 1	0.191 9	0.121 0
225	0.116 5	0.249 6	0.112 2	0.056 8
256	0.096 7	0.121 2	0.073 5	0.046 4

从图7可直观看出,在测量数目相同的情况下,本文优化矩阵得到的RE始终比高斯矩阵、托普利兹矩阵和 $\Phi = DHG$ 得到的RE值小。因此本文优化测量矩阵在重建性能方面优于其他3种矩阵。

3.3 重构成功概率分析

本节以一维随机信号为例,对优化测量矩阵进行了重建效果的实验研究,并与其他方法作了对比。选取高斯随机矩阵、托普利兹矩阵和文献[19]提出的矩阵为对比矩阵,经过200次迭代实验,在记录了不同稀疏度下,利用不同的测量矩阵进行信号重建后,本文通过图8对比了各个测量矩阵的重构成功概率。从图中可以看出,随机高斯矩阵、托普利兹矩阵和文献[19]提出的方法分别在稀疏度为25、20和35时已经出现了重构失败,但是只有在稀疏度大于40的情况下,本文优化测量矩阵才会发生重建失败。虽然在一些稀疏度较低的情形下会出现重建失败,但采用本文优化测量矩阵进行重建的成功率依然比其他3种方法都要高。

3.4 信噪比/峰值信噪比分析

本小节将通过实验来评估本文优化矩阵重构一维信号时的信噪比(Signal-to-noise ratio, SNR)以及二维图像时的峰值信噪比(Peak SNR, PSNR)。信噪比公式为^[19]

$$SNR = 10 \log \frac{\|x\|_2^2}{\|x - x_3\|_2^2} \quad (18)$$

式中: x 为原始信号; x_3 为重构信号。

首先测试了一维随机信号的重构信噪比,当稀疏度 $K = 10$ 时通过与3种矩阵进行对比,即 $\Phi = DHG$ 、高斯随机矩阵和托普利兹矩阵,得到表4和图9结果。从图9中可以看出,在信号重构方面本文

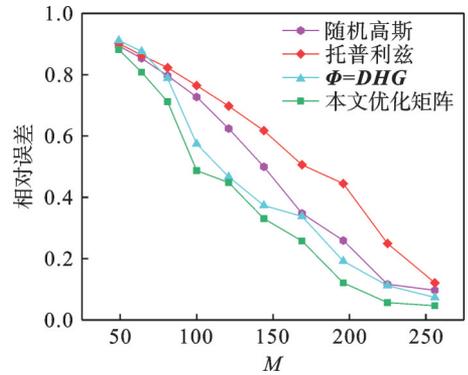


图7 不同测量矩阵重构的相对误差曲线图

Fig.7 Relative error curves in reconstruction using different measurement matrices

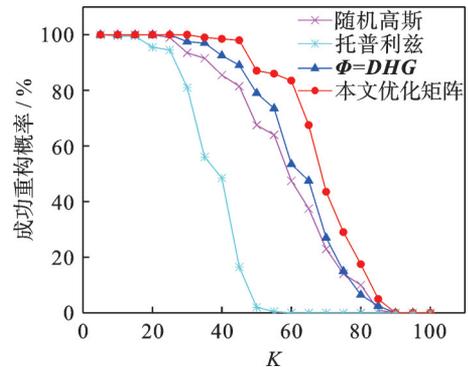


图8 $M=225$ 时与其他矩阵成功重构概率的比较

Fig.8 Comparison of success reconstruction probability with other matrices at $M=225$

表 4 不同矩阵在不同 M 处重构信号 SNR

测量数目	随机高斯	托普利兹	$\Phi = DHG^{[19]}$	本文优化矩阵
49	0.975 0	0.908 0	0.807 4	1.091 6
64	1.381 3	1.288 5	1.154 4	1.851 8
81	1.977 4	1.720 2	2.074 9	2.960 9
100	2.773 8	2.367 6	4.865 0	6.290 8
121	4.112 0	3.183 8	6.684 7	7.031 0
144	6.058 4	4.271 4	8.607 6	9.707 8
169	9.223 4	6.028 7	9.495 8	11.864 8
196	11.773 6	7.223 5	14.393 3	18.443 7
225	18.743 0	12.508 7	19.030 5	24.917 8
256	20.294 0	18.332 3	22.677 8	26.661 1

优化矩阵取得了最高的 SNR, 而且在高压缩比的情况下, 对应的 SNR 也相对较大。

本节测试了测量矩阵在二维图像方面的重构峰值信噪比。选取大小为 $512 \text{ 像素} \times 512 \text{ 像素}$ 的图像 Lena、Peppers、Baboon 和 Barbara 以及大小为 $256 \text{ 像素} \times 256 \text{ 像素}$ 的图像 Cameraman 作为实验对象, 在 4 种不同的测量矩阵下进行实验验证。图 10 展示了在 $M = 225, K = 10$ 的情况下, 使用本文提出的优化矩阵进行的信号重构结果, 可以看出重建的图像在细节和轮廓等方面与原始图像很接近。

PSNR 通过比较原始图像与重建图像在相应像素点上的差异来度量图像的质量。经过 200 次实验, 对使用 4 种测量矩阵进行图像重构的平均峰值信噪比进行了计算, 如表 5 所示, 其中 PSNR 的表达式如下^[27]

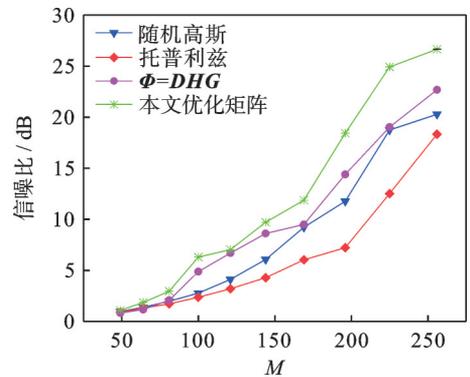


图 9 不同矩阵在不同 M 处重构信号 SNR 曲线图

Fig.9 SNR curves of signal reconstruction with different matrices at various M

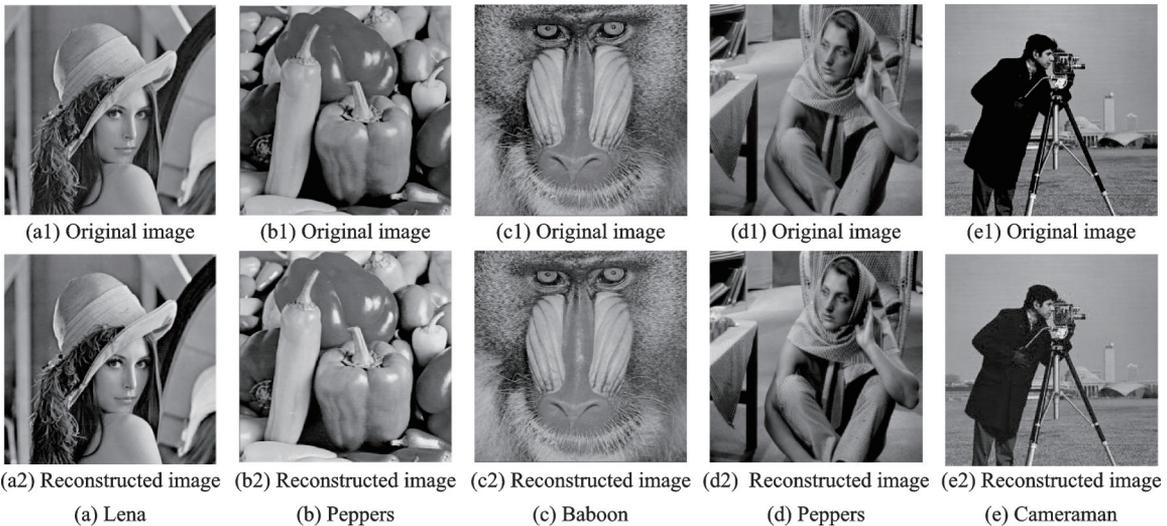


图 10 本文矩阵重构图像与原始图像对比

Fig.10 Comparison between the matrix-reconstructed images and the original images

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{255 \times 255}{\text{MSE}} \right) \quad (19)$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x(i, j) - x_3(i, j))^2 \quad (20)$$

式中: $x(i, j)$ 和 $x_3(i, j)$ 分别表示原始图像和重建图像; N 为图像的宽度和高度。

表5 不同测量矩阵重构图像 PSNR($M=225, K=10$)

Table 5 PSNR of reconstructed images with different measurement matrices ($M=225, K=10$)					dB
图像	随机高斯	托普利兹	$\Phi = DHG^{[19]}$	本文优化矩阵	
Lenna	22.630 7	22.509 1	28.509 5	39.157 1	
Peppers	21.100 1	22.797 8	37.211 4	37.226 2	
Baboon	21.520 3	22.729 8	28.007 9	27.874 9	
Cameraman	20.889 9	22.231 6	31.051 8	31.888 8	
Barbara	22.237 0	24.108 1	39.326 3	39.496 1	

从图10和表5可以看出,与其他测量矩阵相比,当压缩比为0.88、 $K=10$ 时,通过本文提出的优化矩阵进行重构表现出了更为优越的性能。在重构Lenna时,优化测量矩阵的PSNR与其他3种矩阵相比都显著得到了提升;重构Peppers、Cameraman和Barbara时,较文献[19]提出的方法相比分别只提高了0.014 8、0.837和0.169 8 dB(1.48%、83.7%和16.98%),而与其他两种测量矩阵相比PSNR明显提高了。虽然在重构Baboon图像时,与文献[19]提出的方法相比反而降低了0.133 dB(13.3%),但是总体来说本文优化矩阵的PSNR值相对都有增加。因此,本文构建的测量矩阵相较于其他矩阵具有更强的鲁棒性。

3.5 结构相似性指数和平均结构相似性指数分析

本节对结构相似性(Structural similarity, SSIM)指数和平均结构相似性(Mean SSIM, MSSIM)指标进行了实验分析,其定义分别如下^[19]

$$\text{SSIM} = \frac{(2\mu_x \mu_{x_3} + c_1)(2\sigma_{xx_3} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_{x_3}^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_{x_3}^2 + c_2)} \quad (21)$$

$$\text{MSSIM} = \frac{1}{256} \text{SSIM} \quad (22)$$

式中: μ_x 和 μ_{x_3} 分别为 x 和 x_3 的平均值; σ_x 、 σ_{x_3} 和 σ_{xx_3} 分别为 x 和 x_3 的方差及协方差; c_1 和 c_2 为常数。

用不同的测量矩阵对5幅图片进行重建后,得到了SSIM和MSSIM的评估结果,如表6所示。其中SSIM提升了0.05%~53.95%,除了在重构Lenna和Baboon图像时,与文献[19]提出的方法相比略微降低了,其总体上得到了一定的提升。相较于前两种矩阵,MSSIM表现出一定的提升。

表6 不同测量矩阵重构图像的SSIM/MSSIM($M=225, K=10$)

Table 6 SSIM/MSSIM of reconstructed images with different measurement matrices ($M=225, K=10$)				
图像	随机高斯	托普利兹	$\Phi = DHG^{[19]}$	本文优化矩阵
Lenna	0.369 1/0.001	0.336 4/0.001	0.878 6/0.003	0.875 9/0.003
Peppers	0.393 8/0.002	0.354 6/0.001	0.852 7/0.003	0.853 3/0.003
Baboon	0.664 8/0.003	0.630 7/0.002	0.882 0/0.003	0.881 7/0.003
Cameraman	0.426 2/0.002	0.406 0/0.002	0.764 2/0.003	0.811 8/0.003
Barbara	0.546 9/0.002	0.511 4/0.002	0.939 9/0.004	0.940 4/0.004

图 11 呈现了用不同矩阵重构 Lena 图像的结果,同时展现了图像的局部边缘噪声情况,从而更加全面地验证了本文优化矩阵在重建精度上的卓越性。图 11 中的实验结果还表明,当采样率为 0.88 时,本文优化矩阵重建的图像比用随机高斯、托普利兹矩阵重构出来的图像具有更小的边缘噪声,明显表现出更高的重构精度和更优的视觉效果。虽然与文献[19]提出的方法相比,边缘噪声相差不明显,但是从整体的重构图像来看,本文优化测量矩阵的重构效果较好。

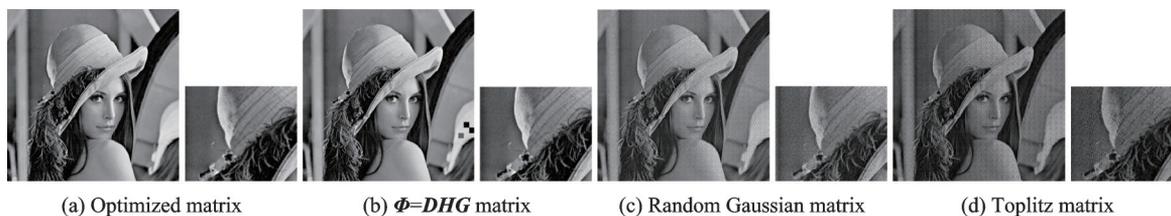


图 11 重构图像细节

Fig.11 Details of reconstructed images

4 结束语

测量矩阵是压缩感知理论的一个重要部分。针对随机测量矩阵的硬件难实现和压缩比较小时重构性能不佳的问题,提出了一种测量矩阵的改进方法,即将随机高斯矩阵、确定性矩阵和混沌序列矩阵相结合的方法。该矩阵不仅保留了随机测量矩阵和确定性矩阵各方面的优势,且混沌序列间的相关性和构造测量矩阵的计算复杂度都较低,同时还满足了重构中的 RIP 条件。仿真实验将本文优化矩阵与常用的随机矩阵及已有的伪随机矩阵进行了比较。结果表明:本文所提出的测量矩阵在重构算法时间、一维信号的 RE 和 SNR 以及图像的 PSNR 和 SSIM 等性能方面都取得了提升,说明本文方法在图像处理和信号采集等方面具有广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] WANG Z, JIANG Y, CHEN S. Image parallel block compressive sensing scheme using DFT measurement matrix[J]. Multimedia Tools and Applications, 2023, 82(14): 21561-21583.
- [2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [3] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [4] BAI H, LI X. Measurement-driven framework with simultaneous sensing matrix and dictionary optimization for compressed sensing[J]. IEEE Access, 2020, 8: 35950-35963.
- [5] YOU D, ZHANG J, XIE J, et al. COAST: Controllable arbitrary-sampling network for compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2021, 30: 6066-6080.
- [6] 杜秀丽, 刘晋廷, 吕亚娜, 等. 基于迭代 p 阈值投影算法的压缩感知磁共振成像[J]. 数据采集与处理, 2020, 35(6): 1060-1068.
DU Xiuli, LIU Jinting, LYU Yana, et al. Compressed sensing magnetic resonance imaging based on projected iterative p-thresholding algorithm[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2020, 35(6): 1060-1068.
- [7] 郭媛, 王充, 杜松英. 基于广义变参 Fibonacci 混沌系统的压缩感知测量矩阵构造算法[J]. 计算机工程与科学, 2021, 43(3): 503-510.
GUO Yuan, WANG Chong, DU Songying. A compressed sensing measurement matrix construction algorithm based on generalized variable parameter Fibonacci chaotic system[J]. Computer Engineering and Science, 2021, 43(3): 503-510.
- [8] 陈映瞳. 压缩感知中提升测量矩阵稀疏性的等效字典优化设计[J]. 数据采集与处理, 2022, 37(6): 1363-1375.
CHEN Yingtong. Optimization of equivalent dictionary with sparsification of measurement matrix for compressed sensing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2022, 37(6): 1363-1375.
- [9] KAZEMI V, SHAHZADI A, BIZAKI H K. New flexible deterministic compressive measurement matrix based on finite

- Galois field[J]. *IET Image Processing*, 2022, 16(1): 239-251.
- [10] CANDES E J, TAO T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [11] WANG Z, HUSSEIN Z S, WANG X. Secure compressive sensing of images based on combined chaotic DWT sparse basis and chaotic DCT measurement matrix[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106246>.
- [12] WEI Z, ZHANG J, XU Z, et al. Measurement matrix optimization via mutual coherence minimization for compressively sensed signals reconstruction[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2020: 1-18.
- [13] TAWFIC I S. Construction of compressive measurement matrix based on sinusoidal function called sinusoidal sensing matrix (SSM)[J]. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.bspc.2021.102451>.
- [14] WANG G, NIU M Y, FU F W. Deterministic construction of compressed sensing matrices from constant dimension codes[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2020, 285: 9-17.
- [15] KHOSRAVY M, GUPTA N, PATEL N, et al. Compressive sensing in healthcare[M]. Netherlands: Elsevier. 2020: 111-124.
- [16] XUE X, XIAO S, DONG W. Extended two-dimensional separable sensing matrix in compressive sensing[J]. *Digital Signal Processing*, 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dsp.2024.104405>.
- [17] NGUYEN U L P, NHAT NAM P, PHUOC VO T, et al. Coupled quadratic congruential random number generator-aided measurement matrix construction[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/tim.2023.3338702>.
- [18] 李雪珍, 凌永发. 基于混合混沌序列的测量矩阵构造算法研究[J]. *微电子学与计算机*, 2021, 38(9): 23-30.
LI Xuezheng, LING Yongfa. Research on the construction algorithm of measurement matrix based on mixed chaotic[J]. *Microelectronics and Computer*, 2021, 38(9): 23-30.
- [19] HE J, WANG T, WANG C, et al. Improved measurement matrix construction with pseudo-random sequence in compressed sensing[J]. *Wireless Personal Communications*, 2022, 123(4): 3003-3024.
- [20] 王彤. 宽带压缩频谱感知信号采样及量化重构算法研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2022.
WANG Tong. Research on wideband compression spectrum sensing signal sampling and quantitative reconstruction algorithm [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2022.
- [21] WANG J, WANG X T. Sparse signal reconstruction via the approximations of l_0 quasinorm[J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2020, 16(4): 1907-1925.
- [22] WANG S, ZHANG H, CHEN W, et al. Compressed sensing-based data acquisition via intelligent vehicles[J]. *IEEE Sensors Letters*, 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/lens.2024.3360453>.
- [23] DEVORE R A. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. *Journal of Complexity*, 2007, 23(4/5/6): 918-925.
- [24] AMINI A, MONTAZERHODJAT V, MARVASTI F. Matrices with small coherence using p-Ary block codes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(1): 172-181.
- [25] LONE M A, QURESHI S. RGB image encryption based on symmetric keys using arnold transform, 3D chaotic map and affine hill cipher[J]. *Optik*, 2022, 260: 168880.
- [26] LI J, LIU H. Colour image encryption based on advanced encryption standard algorithm with two-dimensional chaotic map[J]. *IET Information Security*, 2013, 7(4): 265-270.
- [27] LIU J, ZHANG M, TONG X, et al. Image compression and encryption algorithm based on 2D compressive sensing and hyperchaotic system[J]. *Multimedia Systems*, 2022, 28(2): 595-610.

作者简介:



陈兴兰(1999-),女,硕士研究生,研究方向:压缩感知, E-mail: chenxinglan@stu.ynu.edu.cn。



鲁进(1984-),通信作者,男,副教授,研究方向:随机共振、频谱感知、机器学习、压缩感知, E-mail: lujin211636@ynu.edu.cn。



张亚楠(2003-),女,本科生,研究方向:压缩感知。

(编辑:张黄群)