

# 基于非均匀稀疏贝叶斯学习的近场源定位

李一<sup>1</sup>, 傅海军<sup>1</sup>, 戴继生<sup>2</sup>

(1. 江苏大学电气信息工程学院, 镇江 212013; 2. 东华大学信息科学与技术学院, 上海 201620)

**摘要:** 近场源的阵列流型包含角度和距离参数, 两者相互耦合, 难以分离。现有方法一般采用近似解耦模型, 分步估计出角度和距离参数。然而, 在近似解耦过程中, 不可避免地引入了系统模型误差, 导致定位性能严重下降。为了应对上述挑战, 提出了一种基于非均匀网格的稀疏表示近场源定位方法, 将复杂的近场源定位问题直接建模成一个较低维度的稀疏信号恢复问题, 并利用稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian learning, SBL) 方法实现对稀疏信号的自适应恢复, 从而避免引入近似误差, 显著提高了参数估计的准确性。所提方法中的非均匀网格仅含有较少的网格点, 极大降低了计算复杂度; 各网格点之间的角度和距离均不相同, 有效克服了字典矩阵中相邻基之间相关性高的缺陷; 额外引入网格优化技术, 进一步解决了粗糙网格可能导致的失配问题。仿真结果证实了所提方法的优越性。

**关键词:** 近场源定位; 稀疏表示; 稀疏信号恢复; 稀疏贝叶斯学习; 网格细化

**中图分类号:** TN911.7

**文献标志码:** A

## Near-Field Sources Localization Based on Non-uniform Sparse Bayesian Learning

LI Yi<sup>1</sup>, FU Haijun<sup>1</sup>, DAI Jisheng<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China; 2. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** The near-field steering vector contains the angle and range parameters. They are coupled with each other and difficult to separate. Most existing methods adopt the approximate decoupling model to estimate the angle and range parameters step by step. However, such an approximate decoupling model will inevitably introduce a systematic model error, which could lead to severe localization performance degradation. To address the above challenges, this paper proposes a near-field sources localization method for sparse representation via a non-uniform grid. It directly models the complex near-field sources localization as a lower-dimensional sparse signal recovery problem and adopts sparse Bayesian learning (SBL) to adaptively recover the sparse signal, avoiding the approximate error and improving the parameters estimation accuracy. In the proposed method, the non-uniform grid only contains a few points, reducing the computational complexity greatly. The nearby points neither share the same direction of arrival (DOA) nor the range value, effectively overcoming the high correlation basis. And the grid refinement trick is additionally introduced to further solve the mismatch problem caused by the coarse grid. The numerical simulation results confirm the superiority of the proposed method.

**Key words:** near-field sources localization; sparse representation; sparse signal recovery; sparse Bayesian learning (SBL); grid refinement

**基金项目:** 国家自然科学基金(62071206)。

**收稿日期:** 2024-01-06; **修订日期:** 2024-03-25

## 引言

信源定位是阵列信号处理中的一个关键技术,广泛应用于雷达、无线通信等领域<sup>[1-2]</sup>。根据信源到接收阵列的距离,信源可分为远场源和近场源<sup>[2]</sup>。早期通信系统中配置的天线数较少,主要聚焦于远场源定位,其信号传播模型可通过平面波建模,远场信源的位置仅由角度方向确定<sup>[3-4]</sup>。然而,随着超大规模天线(Extremely large antenna arrays, ELAA)技术的发展,近场源定位问题日益突出,此时,信号的传播模型为球面波,近场信源的位置需通过角度和距离这两个耦合参数共同确定<sup>[5]</sup>。这种耦合特性使近场模型变得较为复杂,远场源定位方法难以直接应用。因此,如何实现近场源定位已成为阵列信号处理领域的重要研究问题之一<sup>[5]</sup>。为了应对近场源定位中的角度和距离耦合难题,国内外研究人员尝试使用二阶泰勒公式对近场模型进行简化(即Fresnel近似),进而提出了一系列基于近似模型的近场源定位方法。这些近似方法的主要思想是:利用阵列的对称特性<sup>[6-8]</sup>或高阶累积量<sup>[1-2,9-11]</sup>对近场耦合参数进行近似解耦,将耦合的二维参数转化为两个非耦合的一维参数,然后借助谱峰搜索稀疏信号恢复等方案分别估计解耦后的一维参数。实际应用中,基于Fresnel近似的近场模型与精确的近场模型并不完全匹配,由此产生的系统模型误差会导致近场源定位性能严重下降<sup>[12]</sup>。

Huang等<sup>[13]</sup>和Shu等<sup>[14]</sup>证明了信源处于近场时,子空间理论中的信号子空间和噪声子空间仍然是正交的,并由此提出了一种基于二维的多重信号分类方法(Two-dimension multiple signal classification, 2D-MUSIC)。该方法避免了采用Fresnel近似,能获得较高的估计精度,但需进行二维的空间谱搜索,计算量大幅增加。He等<sup>[15]</sup>提出了一种基于精确模型的高阶累积量方法(Cumulant algorithm for exact model, CAFEM),该方法提供了近场角度和距离参数的解析表达式,无需进行谱峰搜索,有效地降低了计算量。但CAFEM未能充分利用接收阵列的所有信息,参数估计精度较低。近年来,随着压缩感知理论的快速发展,基于稀疏表示的信号恢复技术在信源定位中取得长足发展<sup>[16]</sup>。但该类方法无法直接应用于近场源定位,其主要难点在于:近场源的位置由角度和距离参数确定,传统的稀疏表示方法必须采用一个稠密的网格覆盖角度域和距离域,进而导致计算量十分庞大,且字典矩阵中相邻基之间高度相关<sup>[17]</sup>,从而严重限制了稀疏表示方法在近场源定位领域中的应用。

为了应对上述稀疏表示方法的难点和挑战,本文提出了一种基于非均匀网格稀疏表示的近场源定位方法,直接将近场源定位问题建模成较低维度稀疏信号恢复问题,并通过稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian learning, SBL)方法自适应恢复稀疏信号,有效提升了参数的估计精度。所采用的非均匀网格仅含有较少的网格点,且任何两个网格点之间角度和距离均不相同,从而降低了字典矩阵中相邻基之间的相关性。此外,为了进一步解决粗糙网格引起的失配问题,引入了网格优化技巧,通过将网格点视作可调节参数并迭代优化网格,有效避免了网格间隙引起的性能损失。仿真结果证实了所提方法的有效性。

## 1 近场模型与现有方法回顾

考虑一个任意线性接收阵列由 $M$ 个阵元组成, $K$ 个近场窄带信号源 $\{s_k(t)\}_{k=1}^K$ ,在 $t$ 时刻从方向 $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ 和距离 $\{r_k\}_{k=1}^K$ 入射,则阵列的接收信号可表示为

$$y(t) = A(\theta, r)s(t) + e(t) \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

式中: $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T$ ,  $r = [r_1, r_2, \dots, r_K]^T$ ,  $s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \in \mathbf{C}^{K \times 1}$ ,  $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_M(t)]^T \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 表示均值为零,方差为 $\sigma^2$ 的复高斯白噪声, $T$ 表示快拍数, $A(\theta, r) = [a(\theta_1, r_1), a(\theta_2, r_2), \dots, a(\theta_K, r_K)] \in \mathbf{C}^{M \times K}$ 表示导向矢量矩阵。由图1所示的几何性质,导向矢量 $a(\theta_k, r_k)$ 可表示为<sup>[14]</sup>

$$\mathbf{a}(\theta_k, r_k) = \left[ 1, \left( \frac{r_k}{r_{2,k}} \right)^{\frac{\ell}{2}} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (r_{2,k} - r_k)}, \dots, \left( \frac{r_k}{r_{M,k}} \right)^{\frac{\ell}{2}} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (r_{M,k} - r_k)} \right]^T \quad (2)$$

式中:  $r_{m,k} = \sqrt{r_k^2 + d_m^2 - 2r_k d_m \sin \theta_k}$  表示第  $k$  个近场源和第  $m$  个阵元之间的距离,  $d_m$  表示第  $m$  个传感器和参考阵元(第 1 个阵元)之间的距离,  $\lambda$  表示波长,  $\ell$  表示路径增益系数<sup>[16]</sup>。定义  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(T)]$ , 有

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})\mathbf{S} + \mathbf{E} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{S} = [s(1), s(2), \dots, s(T)]$ ,  $\mathbf{E} = [e(1), e(2), \dots, e(T)]$ 。

式(2)中近场源参数  $\{\theta_k, r_k\}_{k=1}^K$  相互耦合, 难以直接分离, 从而使得近场源定位问题变得困难, 现有的近场源定位方法大多采用 Fresnel 近似, 将  $r_{m,k}$  近似写为

$$r_{m,k} = r_k \underbrace{- d_m \sin \theta_k}_{\triangleq \tilde{\omega}_{m,k}} + \underbrace{\frac{(d_m \cos \theta_k)^2}{2r_k}}_{\triangleq \tilde{\psi}_{m,k}} + \Delta \left( \frac{d_m^2}{r_k^2} \right) \quad (4)$$

式中:  $\Delta(d_m^2/r_k^2)$  表示大于等于  $(d_m^2/r_k^2)$  阶的泰勒余项。式(4)的成立条件是近场源必须都落在 Fresnel 区域<sup>[6]</sup>(即:  $0.62\sqrt{D^3/\lambda} \leq r_k \leq 2D^2/\lambda$ , 式中  $D$  表示阵列孔径)。将式(4)代入式(2)中, 得到

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta_k, r_k) \approx \left[ 1, e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\tilde{\omega}_{2,k} + \tilde{\psi}_{2,k})}, \dots, e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\tilde{\omega}_{M,k} + \tilde{\psi}_{M,k})} \right]^T \quad (5)$$

式中: 耦合的近场参数  $\{\theta_k, r_k\}$  被转化为非耦合参数  $\{\tilde{\omega}_k, \tilde{\psi}_k\}_{k=1}^K$ 。此时, 仅需通过估计  $\{\tilde{\omega}_k, \tilde{\psi}_k\}_{k=1}^K$ , 然后利用式(4)中的  $\tilde{\omega}_{m,k} \triangleq -d_m \sin \theta_k$  和  $\tilde{\psi}_{m,k} \triangleq (d_m \cos \theta_k)^2 / 2r_k$ , 可确定近场源参数  $\{\theta_k, r_k\}_{k=1}^K$ 。由于 Fresnel 近似忽略了泰勒余项  $\Delta(d_m^2/r_k^2)$  和路径增益  $(r_k/r_{m,k})^{\frac{\ell}{2}}$ , 从而导致在实际应用中, 近似模型与精确模型并不完全匹配, 这种模型失配将不可避免地引入系统误差, 进而带来性能损失<sup>[14]</sup>。此外, 随着近场信源与阵列之间的距离减小, 泰勒余项  $\Delta(d_m^2/r_k^2)$  变大, 由模型失配引入的系统模型误差也会随之增大。若近场信源位于 Fresnel 区域下界内(即:  $r_k < 0.62\sqrt{D^3/\lambda}$ ), Fresnel 近似引起的系统模型误差将无法被忽略, 此时 Fresnel 模型(式(5))将无法使用<sup>[6,12]</sup>。

由此可见, 近场源定位需避免采用 Fresnel 近似, 直接通过精确模型(式(2))求解。然而, 目前基于精确模型的方法, 文献[13, 14]需要进行二维的谱峰搜索, 导致计算量十分庞大; 文献[15]未能充分利用接收阵列的所有信息, 造成性能损失。传统的稀疏方法将精确的近场源定位问题建模为稀疏表示公式时, 必须使用一个稠密的二维网格均匀地覆盖角度域和距离域。例如: 分别让含有  $N$  个网格点的  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \{\bar{\theta}_n\}_{n=1}^N$  和  $\bar{\mathbf{r}} = \{\bar{r}_n\}_{n=1}^N$  均匀覆盖近场角度域和距离域, 得到

$$\left\{ (\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\mathbf{r}}) \mid (\bar{\theta}_n, \bar{r}_m) \right\} \quad n, m = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

式(6)中这样的—个传统的二维网格  $(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\mathbf{r}})$  将会包含有  $N^2$  个网格点。为了确保真实近场源恰好都落于网格点上, 该二维网格必须足够密集 ( $N$  足够大)。但如此稠密的网格将会带来两个致命缺陷: 计算量十分庞大, 且字典矩阵中相邻基之间高度相关<sup>[17]</sup>, 这使得现有的稀疏方法无法在近场源定位中直接使用。

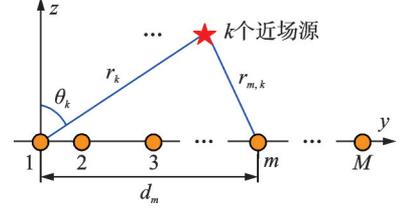


图1 近场源定位模型配置示意图  
Fig.1 Illustration of array model configuration for near-field sources localization

## 2 基于SBL的近场源精确定位

针对传统稀疏表示计算量大,且相邻基之间相关性高的缺陷,拟采用一种非均匀网格来将近场源定位问题进行稀疏表示,该网格仅含有较少的网格点,大大降低了计算复杂度,且任何两个网格点之间角度和距离均不相同,有效降低了相邻基之间的相关性;然后,讨论了对应的贝叶斯建模及推断,自适应地恢复近场稀疏信号。为了进一步解决近场源和网格不匹配的问题,采用一个离网的信号模型,避免了离网误差带来的性能损失。

### 2.1 离网的稀疏表示

针对传统二维网格存在的问题,提出了一个粗糙的非均匀二维网格,它满足以下两个要求:(1) 只用 $N$ 个点来尽可能大地覆盖整个角度域和距离域,避免庞大的计算量;(2) 任意不同的两个网格点之间的角度和距离均不相同,降低基之间的相关性。为此,本文首先将 $\bar{\theta}$ 分为 $G$ 组并让每组包含 $P \approx N/G$ 个相邻的网格点,即

$$\bar{\theta}_g = [\bar{\theta}_{(g-1)P+1}, \bar{\theta}_{(g-1)P+2}, \dots, \bar{\theta}_{gP}] \quad \forall g \quad (7)$$

为了确保每个网格点之间的距离彼此不同,第 $g$ 组的距离分配为

$$\bar{r}_g = [\bar{r}_g, \bar{r}_{g+G}, \dots, \bar{r}_{g+(P-1)G}] \quad \forall g \quad (8)$$

图2给出了一个非均匀二维粗糙网格的示例,图2中 $N=9, G=3$ 。显然,当 $G \approx \sqrt{N}$ 时,含有 $N$ 个元素的非均匀粗糙网格将最大化地均匀覆盖整个角度域和距离域。注意,这种粗糙网格和传统网格相比会产生更大的间隙。为了避免网格失配带来的影响,可以将网格间隙引入到稀疏表示当中<sup>[18-19]</sup>,得到

$$Y = A(\tilde{\theta} + \beta_\theta, \tilde{r} + \beta_r)X + E \quad (9)$$

式中: $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_G]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,  $\tilde{r} = [\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_G]^T$ ,  $\beta_\theta = [\beta_{\theta,1}, \beta_{\theta,2}, \dots, \beta_{\theta,N}]^T$ ,  $\beta_r = [\beta_{r,1}, \beta_{r,2}, \dots, \beta_{r,N}]^T$ 。  $\beta_\theta$ 和 $\beta_r$ 分别指角度间隙和距离间隙。此时, $A(\tilde{\theta} + \beta_\theta, \tilde{r} + \beta_r)$ 可以用一阶泰勒公式近似表示为<sup>[18]</sup>

$$A(\tilde{\theta} + \beta_\theta, \tilde{r} + \beta_r) \approx \underbrace{A(\tilde{\theta}, \tilde{r}) + B_\theta \text{diag}(\beta_\theta) + B_r \text{diag}(\beta_r)}_{\triangleq \Phi(\beta_\theta, \beta_r)} \quad (10)$$

式中: $B_\theta = [b_\theta(\tilde{\theta}_1, \tilde{r}_1), b_\theta(\tilde{\theta}_2, \tilde{r}_2), \dots, b_\theta(\tilde{\theta}_N, \tilde{r}_N)]$ ,  $b_\theta(\tilde{\theta}_n, \tilde{r}_n) = \frac{\partial a(\theta, r)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\tilde{\theta}_n, r=\tilde{r}_n}$ ,  $B_r = [b_r(\tilde{\theta}_1, \tilde{r}_1), b_r(\tilde{\theta}_2, \tilde{r}_2), \dots, b_r(\tilde{\theta}_N, \tilde{r}_N)]$ ,  $b_r(\tilde{\theta}_n, \tilde{r}_n) = \frac{\partial a(\theta, r)}{\partial r} \Big|_{\theta=\tilde{\theta}_n, r=\tilde{r}_n}$ ,  $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角操作。将式(10)代入式(9),最终得

$$Y = \Phi(\beta_\theta, \beta_r)X + E \quad (11)$$

上述稀疏表示模型(11)具有以下优势:(1) 与基于近似模型的近场源定位方法相比,所提出的方法直接将近场源定位建模为稀疏信号恢复问题,避免了由Fresnel近似带来的系统模型误差;(2) 所提出的粗糙网格仅采用 $N$ 个网格点,大大降低了计算复杂度,且相邻任意两个网格点之间角度和距离均不

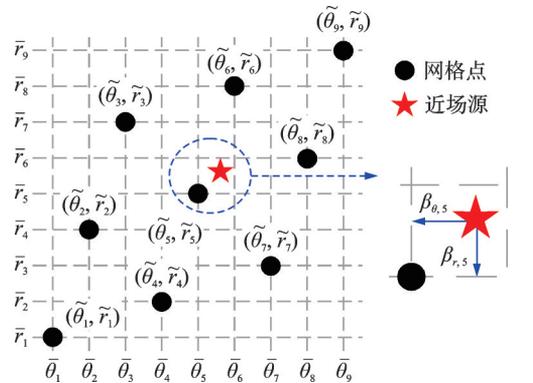


图2 非均匀二维采样网格和离网间隙示例 ( $G=3, N=9$ )

Fig.2 Illustration of non-uniformly sampled 2D-grid and off-grid gaps ( $N=9, G=3$ )

相同,字典矩阵中基之间相关性低;(3)引入了一个离网的信号模型,有效避免网格失配引起的性能损失,具体细节将在2.3节进行讨论。

## 2.2 稀疏贝叶斯公式及推断

在复高斯白噪声的假设下,可以得到

$$p(Y|X, \alpha; \beta_\theta, \beta_r) = \prod_{t=1}^T \mathcal{CN}(y(t)|\Phi(\beta_\theta, \beta_r)x(t), \alpha^{-1}I) \quad (12)$$

式中 $\alpha = \sigma^{-2}$ 表示噪声精度。假设 $\alpha$ 服从Gamma分布<sup>[19]</sup>

$$p(\alpha) = \Gamma(\alpha; a, b) \quad (13)$$

式中 $a$ 和 $b$ 都是非常小的常量。为了刻画 $X$ 的稀疏性,为 $X$ 的每一行分配具有不同精度 $\{\tau_n\}_{n=1}^N$ 的独立高斯分布<sup>[20]</sup>

$$p(X|\tau) = \prod_{t=1}^T \mathcal{CN}(x(t)|0, \text{diag}(\tau)^{-1}) \quad (14)$$

式中 $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N]^T$ 。类似地, $\tau$ 被建模为Gamma分布

$$p(\tau) = \prod_{n=1}^N \Gamma(\tau_n; a, b) \quad (15)$$

综合上述概率模型(式(12~15)),联合概率密度函数可以表示为

$$p(Y, \Psi; \beta_\theta, \beta_r) = p(Y|X, \alpha; \beta_\theta, \beta_r) p(X|\tau) p(\tau) p(\alpha) \quad (16)$$

式中 $\Psi \triangleq \{X, \tau, \alpha\}$ 。为了便于后续的贝叶斯推断,本文将离网间隙 $\beta_\theta$ 和 $\beta_r$ 视为参数而不是随机变量,其引起的离网误差可以通过更新网格来消除。

近场源定位问题等同于获得 $\Psi$ 的最大后验估计 $p(\Psi|Y; \beta_\theta, \beta_r)$ ,但直接求解难度较大,本文采用变分贝叶斯推断技术<sup>[21]</sup>来获得它的最优近似 $q(\Psi)$ ,可分解为

$$q(\Psi) = q(X)q(\tau)q(\alpha) \quad (17)$$

它的最优解可以通过最小化Kullback-Leibler(KL)散度来获得<sup>[21]</sup>

$$q^*(\Psi) = \arg \min_{q(\Psi)} D_{\text{KL}}(q(\Psi) \| p(\Psi|Y; \beta_\theta, \beta_r)) \quad (18)$$

或等价于

$$\ln q^*(\Psi_i) \propto \langle \ln p(Y, \Psi; \beta_\theta, \beta_r) \rangle_{\prod_{j \neq i} q^*(\Psi_j)} \quad \forall i \quad (19)$$

式中: $\Psi_i$ 表示 $\Psi$ 中的第 $i$ 个元素, $\langle \cdot \rangle_{q(\cdot)}$ 表示对于 $q(\cdot)$ 的期望。遵循文献[21]当中的推导过程,可以得到目标函数(19)的迭代解

$$q^{\text{new}}(X) = \prod_{t=1}^T \mathcal{CN}(x(t)|\mu(t), \Sigma) \quad (20)$$

$$q^{\text{new}}(\alpha) = \Gamma(\alpha|a + TM, b^\alpha) \quad (21)$$

$$q^{\text{new}}(\tau) = \prod_{n=1}^N \Gamma(\tau_n|a + T, b_n^\tau) \quad (22)$$

式中: $\mu(t) = \hat{\alpha} \Sigma \Phi^H y(t)$ ,  $\Sigma = (\hat{\alpha} \Phi^H \Phi + \text{diag}(\hat{\tau}))^{-1}$ ,  $\hat{\tau} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N]^T$ ,  $\hat{\tau}_n = (a + T)/b_n^\tau$ ,  $b_n^\tau = b + \sum_t [\mu(t) \mu^H(t) + \Sigma]_{nn}$ ,  $\hat{\alpha} = (a + TM)/b^\alpha$ ,  $b^\alpha = b + \sum_t \|\mathbf{y}(t) - \Phi \mu(t)\|_2^2 + T \cdot \text{tr}\{\Phi \Sigma \Phi^H\}$ ,  $\Phi$ 表示 $\Phi(\beta_\theta, \beta_r)$ 的缩写, $[\cdot]_{nn}$ 表示矩阵的第 $n$ 个对角元素。

### 2.3 网格细化

本小节给出了网格细化的具体更新规则,并且讨论了如何有效地消除离网间隙。最优的  $\beta_\theta$  和  $\beta_r$  应当最小化 KL 散度,等价于

$$\{\beta_\theta^{\text{new}}, \beta_r^{\text{new}}\} = \underbrace{\arg \min}_{\beta_\theta, \beta_r} \langle \ln p(Y|X, \alpha; \beta_\theta, \beta_r) \rangle_{q(X)q(\alpha)} \quad (23)$$

忽略与  $\beta_\theta, \beta_r$  的无关项,目标函数(23)可以重写为

$$\begin{aligned} & \langle \ln p(Y|X, \alpha, \beta_\theta, \beta_r) \rangle_{q(X)q(\alpha)} \\ & \propto -\hat{\alpha} \cdot \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}(t) - \Phi \boldsymbol{\mu}(t)\|_2^2 - \hat{\alpha} \cdot T \cdot \text{tr}\{\Phi \boldsymbol{\Sigma} \Phi^H\} \\ & \propto -\hat{\alpha} \cdot (\beta_\theta^T P_\theta \beta_\theta - 2\mathbf{v}_\theta^T \beta_\theta) - \hat{\alpha} \cdot (\beta_r^T P_r \beta_r - 2\mathbf{v}_r^T \beta_r) - \hat{\alpha} \cdot (2\beta_\theta^T W \beta_r) \end{aligned} \quad (24)$$

式中:  $P_\theta = R \left\{ B_\theta^T B_\theta^* \circ \sum_t (\boldsymbol{\mu}(t) \boldsymbol{\mu}^H(t) + \boldsymbol{\Sigma}) \right\}$ ,  $P_r = R \left\{ B_r^T B_r^* \circ \sum_t (\boldsymbol{\mu}(t) \boldsymbol{\mu}^H(t) + \boldsymbol{\Sigma}) \right\}$ ,  $\mathbf{v}_\theta = \sum_t R \left\{ \text{diag}(\boldsymbol{\mu}^*(t)) \cdot B_\theta^H (\mathbf{y}(t) - A(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\mu}(t)) \right\} - T \cdot R \left\{ \text{diag}(B_\theta^H A(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\Sigma}) \right\}$ ,  $\mathbf{v}_r = \sum_t R \left\{ \text{diag}(\boldsymbol{\mu}^*(t)) B_r^H (\mathbf{y}(t) - A(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\mu}(t)) \right\} - T \cdot R \left\{ \text{diag}(B_r^H A(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\Sigma}) \right\}$ ,  $W = R \left\{ B_\theta^T B_r^* \circ \sum_t (\boldsymbol{\mu}(t) \boldsymbol{\mu}^H(t) + \boldsymbol{\Sigma}) \right\}$ ,  $R\{\cdot\}$  表示取实数,“ $\cdot^*$ ”表示共轭,“ $\circ$ ”表示 Hadamard 积。分别求式(24)对  $\beta_\theta$  和  $\beta_r$  的偏导,并令其等于零,得到

$$\beta_\theta^{\text{new}} = P_\theta^+ (\mathbf{v}_\theta - W \beta_r) \quad (25)$$

$$\beta_r^{\text{new}} = P_r^+ (\mathbf{v}_r - W^T \beta_\theta) \quad (26)$$

式中  $(\cdot)^+$  表示伪逆。为了消除网格失配引入的误差,本文将网格点视作可调节的参数并通过下式进行细化

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\text{new}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \beta_\theta^{\text{new}} \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^{\text{new}} = \tilde{\mathbf{r}} + \beta_r^{\text{new}} \quad (28)$$

经过数次迭代后,更新后的网格点将接近真实的近场源,此时对于每一个真实的近场源,至少存在一个网格点与其相对应,由式(11)引起的近似误差从而被有效消除<sup>[17,19]</sup>。

所提方法的具体步骤为:(1) 参数初始化:令  $a = b = 10^{-10}$  以获取广义超先验<sup>[18]</sup>,由于 SBL 对参数初始值有很强的鲁棒性<sup>[20]</sup>,可以直接令  $\alpha^{(0)} = 1$ ,  $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{I}_{N \times 1}$ ,  $\beta_\theta^{(0)} = \beta_r^{(0)} = \mathbf{0}_{N \times 1}$ ;(2) 参数迭代及网格细化:通过式(20~22)以及式(25~26)分别计算  $\boldsymbol{\mu}(t)$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $\beta_\theta^{\text{new}}$ ,  $\beta_r^{\text{new}}$ ,然后利用式(27~28)细化网格  $(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}})$ ;(3) 收敛判定:当  $\|\boldsymbol{\tau}^{(i)} - \boldsymbol{\tau}^{(i-1)}\|_2 / \|\boldsymbol{\tau}^{(i-1)}\|_2 \leq \epsilon$  (收敛阈值  $\epsilon = 10^{-5}$ <sup>[19]</sup>)或迭代次数  $I \geq 500$  时,停止迭代并输出细化后的网格  $(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{r}})$  及  $\boldsymbol{\mu}(t)$ , 否则返回步骤(2)。

所提方法的主要计算复杂度为:(1) 每次迭代更新  $\boldsymbol{\mu}(t)$  和  $\boldsymbol{\Sigma}$  的计算复杂度分别为  $O(TN^2)$  和  $O(MN^2)$ ;(2) 每次迭代更新  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  的计算复杂度分别为  $O(TMN)$  和  $O(TN)$ 。(3) 每次迭代更新  $\beta_\theta$  和  $\beta_r$  的计算复杂度为  $O(TM^2)$ 。因此,所提方法每次迭代的总计算复杂度为  $O(ITN^2)$ 。现有的基于二阶统计量(Second-order-statistics, SOS)的算法<sup>[6]</sup>、降维多重信号分类(Reduced-dimension multiple signal classification, RD-MUSIC)算法<sup>[8]</sup>、2D-MUSIC 方法<sup>[13]</sup>、基于高阶累积量(Cumulant algorithm for exact model, CAFEM)的方法<sup>[15]</sup>、正交匹配跟踪(Orthogonal matching pursuit, OMP)<sup>[22]</sup>、传统稀疏贝叶斯学

习(Tradition SBL, T-SBL)<sup>[18]</sup>的计算复杂度分别为: $O((N_\theta + N_r)M^3)$ 、 $O(N_\theta M^3)$ 、 $O(N_\theta N_r M^3)$ 、 $O(TM^2)$ 、 $O(KNTM)$ 以及 $O(ITN^2)$ ,其中 $N_\theta$ 和 $N_r$ 分别表示角度域和距离域的搜索网格数。显然,由于 $N_\theta$ 和 $N_r$ 取值通常很大<sup>[8]</sup>,因此本文方法的计算复杂度远低于2D-MUSIC。尽管SOS和RD-MUSIC方法的计算复杂度略低于本文方法,但由于SOS和RD-MUSIC使用了Fresnel近似,在实际应用中的性能会严重下降。CAFEM的计算复杂度最小,但其性能却比本文方法的差。OMP的计算复杂度低于本文方法,但所提方法仅需少量的网格点数 $N$ 便可取得优越的性能,而现有的压缩感知方法要求网格点数 $N$ 充分大(字典矩阵完备)。T-SBL的计算复杂度和本文方法相同,但本文方法仅需要少量网格点,实际计算量要小于T-SBL。

### 3 仿真结果与分析

将本文方法与SOS、RD-MUSIC、2D-MUSIC、CAFEM、OMP、T-SBL以及克拉美-罗下界(Cramer-Rao lower bound, CRLB)<sup>[23]</sup>进行比较。考虑一个 $M = 15$ 的ULA,相邻天线之间的间距 $d = \lambda/2$ ,其中信号波长 $\lambda = 0.1$ ,信号频率 $f = c/\lambda = 3$  GHz,其中 $c$ 为光速,路径增益系数 $\ell = 2$ 。假设均匀线性阵列(Uniform linear array, ULA)接收到 $K = 2$ 个不相干的入射窄带近场信号,信号角度分别在 $[-15^\circ, -10^\circ]$ 和 $[20^\circ, 30^\circ]$ 内随机生成,相应的距离为 $[4\lambda, 5\lambda]$ 和 $[6\lambda, 7\lambda]$ 。稀疏方法的网格点数 $N = 80$ ,其中OMP和T-SBL采用传统网格,而所提方法采用粗糙网格,谱峰搜索方法的搜索步长为0.01,所有方法的角度域和距离域都为 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 和 $[0, 2D^2/\lambda]$ 。Monte Carlo实验的总次数为200次,采用均方误差根(Root mean square error, RMSE)来衡量所有方法的性能。

**实验1** 研究在ULA下,信噪比对于近场源参数估计性能的影响。图3(a,b)分别给出了在快拍数 $T = 500$ 情况下不同算法的角度RMSE和距离RMSE随着SNR变化的曲线。从仿真结果可以看出:(1)所有方法的角度RMSE和距离RMSE都随着SNR的增加而减小;(2)SOS和RD-MUSIC方法的性能在所有方法中表现最差,因为这两个方法都基于Fresnel近似模型,严重影响了算法的定位性能;(3)CAFEM和2D-MUSIC在低信噪比下性能表现较差,因为获取高阶累积量矩阵和信号子空间都十分依赖较高的信噪比;(4)OMP和T-SBL的性能并不理想,因为传统压缩感知方法通常采用传统的网格且要求网格点数密集(字典矩阵完备);(5)本文方法在所有方法中可以取得最优的性能且总是接近CRLB,因为它不仅避免了模型失配带来的近似误差,而且通过将网格点视作可调节的参数充分消除网间隙。

**实验2** 研究在ULA下,快拍数 $T$ 对于近场源参数估计性能的影响,这里设置 $\text{SNR} = 10$  dB,其他实验条件和实验1保持相同。图4(a,b)分别给出了在 $\text{SNR} = 10$  dB下不同算法的角度RMSE和距离RMSE随着 $T$ 变化的曲线。从仿真结果表明:(1)所有方法的角度RMSE和距离RMSE都随着 $T$ 的增加而减小,所提方法总是可以取得最优的性能;(2)当 $T$ 较小时,CAFEM和2D-MUSIC性能严重下降,这是因为高阶累积量矩阵和信号子空间的准确获取十分依赖较大的快拍数。

**实验3** 研究在ULA下,阵元个数 $M$ 对于近场源参数估计性能的影响,实验条件和实验1相同。图5(a,b)分别给出了在 $\text{SNR} = 10$  dB和 $T = 500$ 情况下不同算法的角度和距离RMSE随着阵元个数 $M$ 变化的曲线。仿真结果表明:(1)随着阵元个数的增加,所有方法的性能都得到了提升,所提方法仍能保持最优的性能且最接近CRLB;(2)CAFEM的性能随阵元个数增加提升很小,因为该方法未能充分利用接收阵列的所有信息,其近场参数估计仅通过有限的阵元来确定。

**实验4** 研究在ULA下,信源个数 $K$ 对于近场源参数估计性能的影响,实验条件和实验1相同,其

中信源的角度和距离参数随机在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 以及 $[0, 2D^2/\lambda]$ 内产生。图6(a,b)分别给出了不同算法的角度和距离RMSE随 $K$ 变化的曲线。仿真结果表明,所提方法在信源个数增加时,仍然能保持较好的估计精度。

**实验 5** 研究在 ULA 下,稀疏类方法的网格对于近场源参数估计性能的影响,这里设置 SNR = 10 dB,其余条件和实验 1 保持相同。图 7(a,b)分别为不同算法的角度和距离 RMSE 随着网格点数  $N$  变化的曲线,其中虚线表示传统网格,实线表示粗糙网格。仿真结果表明:(1) 随着网格点数的增加,所有方法的性能均得到了一定提升,但当传统网格足够密集时(例如: $N = 10\ 000$ ),性能反而会有一定下降,因为密集的传统网格相邻基之间的较大相关性影响了算法的性能;(2) 所提的粗糙网格总是优于传统网格,且在网格点数大时算法仍能保持较好的性能;(3) 在粗糙网格下,所提方法在网格点数较少时,便可取得优异性能。因为所提方法将网格点看作可调节参数进行迭代细化,细化后的网格点将对应真实的近场源位置,从而有效消除了粗糙网格引起的离网误差。此外,粗糙网格仅需少量网格点,降低了所提算法的计算复杂度。

**实验 6** 研究在任意线性阵列的情况下,信噪比对于近场源参数估计性能的影响,这里除了将阵元的位置部署为: $[0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.3, 2.8, 3.5, 3.7, 4, 4.2, 4.5, 5.0, 5.5, 6.5, 7.0]\lambda$ 之外,其他实验条件和实验 1 相同。图 8(a,b)分别给出了不同算法的角度 RMSE 和距离 RMSE 随 SNR 变化的曲线。可以看出与 ULA 相比,所提出方法也适用于任意线性阵列,性能几乎没有任何改变。

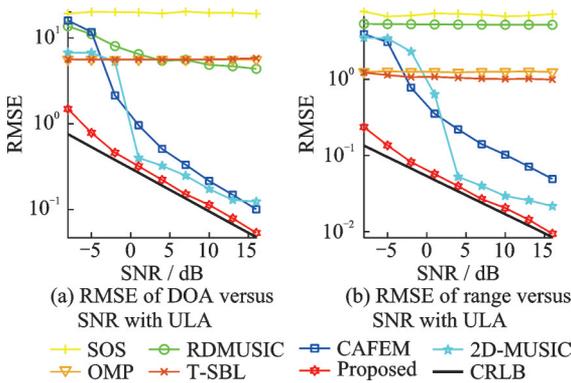


图 3 ULA 下 RMSE 随 SNR 变化的曲线  
Fig.3 RMSE versus SNR with ULA

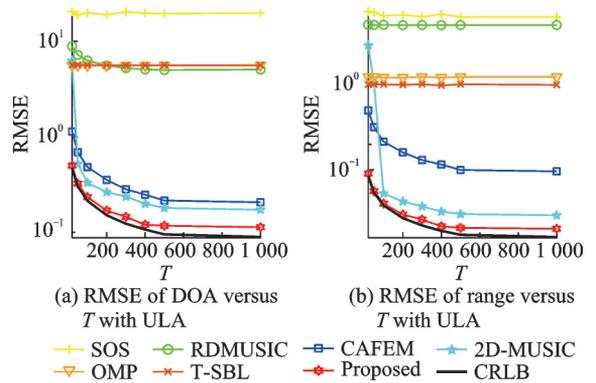


图 4 ULA 下 RMSE 随  $T$  变化的曲线  
Fig.4 RMSE versus  $T$  with ULA

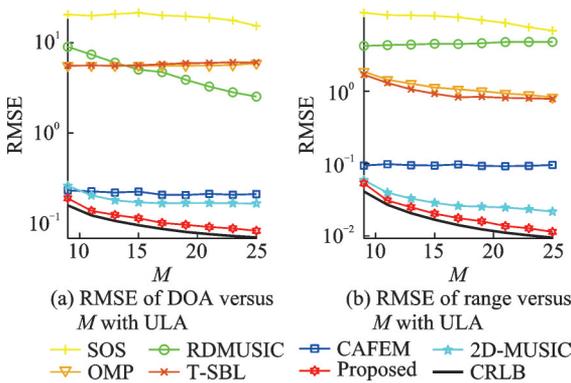


图 5 ULA 下 RMSE 随  $M$  变化的曲线  
Fig.5 RMSE versus  $M$  with ULA

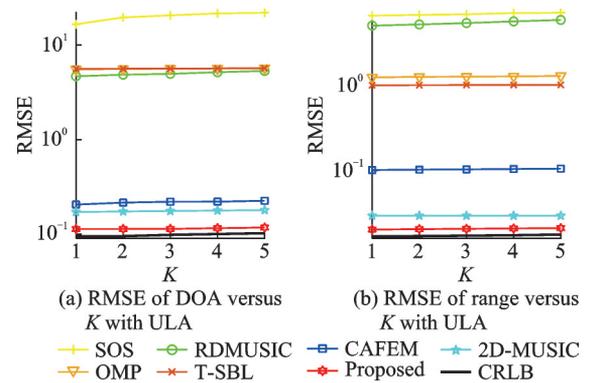


图 6 ULA 下 RMSE 随  $K$  变化的曲线  
Fig.6 RMSE versus  $K$  with ULA

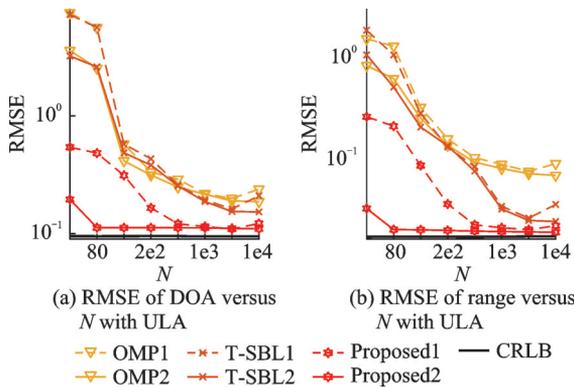


图7 ULA下RMSE随N变化的曲线  
Fig.7 RMSE versus N with ULA

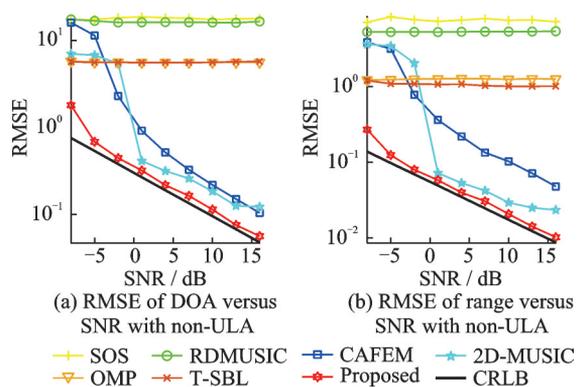


图8 非ULA下RMSE随SNR变化的曲线  
Fig.8 RMSE versus SNR with non-ULA

### 4 结束语

本文主要研究了近场源定位问题,考虑到现有方法大多采用近似模型,提出了一种基于非均匀稀疏贝叶斯学习的近场源定位方法。所提方法直接建立了近场源定位问题的稀疏表示公式,避免了近似模型带来的系统误差。提出了一种粗糙的网格,极大降低了计算量和相邻基之间的相关性;引入了一种离网的信号模型,通过将网格点看作可调节的参数并迭代细化网格,有效避免了离网间隙引起的性能损失。所提出的方法在精确的近场模型中的优异表现有望推动近场问题研究从Fresnel近似模型向精确模型转变,进一步提升近场源的定位准确性。此外,所提出的粗糙网格表示有效克服了传统网格存在的缺陷,为其他稀疏表示方法提供了新的见解。除了近场源定位问题,所提出的针对近场的方法也可用于近场通信、医学成像等领域,为这些领域带来实质性改进。对于本文提出的方法,可能的改进方向包括:进一步提升网格划分策略,以进一步降低计算复杂度和相邻基之间相关性;将所提方法拓展至平面阵列和混合源场景,使其在复杂场景下仍然具有很好的应用场景;引入期望近似传播方法,以降低所提方法中矩阵求逆步骤的计算复杂度等。

### 参考文献:

- [1] 靳一, 徐常志, 荆涛, 等. 基于离格稀疏表示的近场信源定位方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(11): 3105-3110.  
JIN Yi, XU Changzhi, JING Tao, et al. Off-grid sparse representation based localization method for near-field sources[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(11): 3105-3110.
- [2] 李宛儒, 邓科, 殷勤业, 等. 降维的四阶累量近场信源定位方法[J]. 数据采集与处理, 2023, 38(6): 1257-1267.  
LI Wanru, DENG Ke, YIN Qinye, et al. Dimension reduced fourth-order cumulant near-field source localization method[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2023, 38(6): 1257-1267.
- [3] SCHMIDT R, Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [4] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.
- [5] CUI M, WU Z, LU Y, et al. Near-field MIMO communications for 6G: Fundamentals, challenges, potentials, and future directions[J]. IEEE Communications Magazine, 2023, 61(1): 40-46.
- [6] ZHI W, CHIA M Y W. Near-field source localization via symmetric subarrays[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(6): 409-412.
- [7] XIE J, TAO H, RAO X, et al. Passive localization of noncircular sources in the near-field[C]//Proceedings of the 16th International Radar Symposium. Dresden, Germany: IEEE, 2015: 493-498.

- [8] ZHANG X, CHEN W, ZHENG W, et al. Localization of near-field sources: A reduced-dimension MUSIC algorithm[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(7): 1422-1425.
- [9] LIANG J, LIU D. Passive localization of near-field sources using cumulant[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2009, 9(8): 953-960.
- [10] XU J, WANG B, HU F. Near-field sources localization in partly calibrated sensor arrays with unknown gains and phases[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2019, 8(1): 89-92.
- [11] LI J, WANG Y, WEI G. Signal reconstruction for near-field source localization[J]. *IET Signal Processing*, 2015, 9(3): 201-205.
- [12] HSU Y, WONG K T, YEH L. Mismatch of near-field bearing-range spatial geometry in sources localization by a uniform linear array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(10): 3658-3667.
- [13] HUANG Y D, BARKAT M. Near-field multiple source localization by passive sensor array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(7): 968-975.
- [14] SHU T, LI L, HE J. Near-field source localization with two-level nested arrays[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(11): 2488-2492.
- [15] HE J, LI L, SHU T. Localization of near-field sources for exact source-sensor spatial geometry[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 1040-1044.
- [16] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLISKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions Signal Processing*, 2005, 53: 3010-3022.
- [17] CAO Z, ZHOU L, DAI J. Sparse Bayesian approach for DOD and DOA estimation with bistatic MIMO radar[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 155335-155346.
- [18] YANG Z, XIE L, ZHANG C. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. *IEEE Transactions Signal Processing*. 2013, 61(1): 38-43.
- [19] DAI J, SO H C. Real-valued sparse Bayesian learning for DOA estimation with arbitrary linear arrays[J], *IEEE Transactions Signal Processing*. 2021, 69: 4977-4990.
- [20] TIPPING M. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. *The Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1(1): 211-244.
- [21] TZIKAS D G, LIKAS A C, GALATSANOS N P. The variational approximation for Bayesian inference[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(6): 131-146.
- [22] WEI X, DAI L. Channel estimation for extremely large-scale massive MIMO: Far-field, near-field, or hybrid-field?[J]. *IEEE Communications Letters*, 2022, 26(1): 177-181.
- [23] WANG M, NEHORAI A. Coarrays, MUSIC, and the Cramér-Rao bound[J]. *IEEE Transactions Signal Processing*, 2016, 65(4): 933-946.

#### 作者简介:



李一(1998-),男,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理, E-mail: 2212107004@stmail.ujs.edu.cn。



傅海军(1976-),男,教授,研究方向:阵列信号处理、稀疏信号处理, E-mail: fuhaijun21@ujs.edu.cn。



戴继生(1982-),通信作者,男,教授,研究方向:信道估计、阵列信号处理、稀疏信号处理, E-mail: jsdai@dhu.edu.cn。

(编辑:陈珺)