

# 一种基于相对熵的雷达测距估计方法

鞠美玉, 徐大专, 许欢

(南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 211106)

**摘要:** 最大后验(Maximum a posteriori, MAP)是最常用的参数估计方法。然而, MAP方法主要关注后验分布最大峰值的位置, 没有充分利用后验分布的完整信息。本文基于相对熵, 提出了一种最小散度(Minimum divergence, MD)雷达测距估计方法。首先推导参数的后验分布, 然后构造一个与其相似分布, 通过寻找二者散度的最小值得到估计值。仿真结果表明, 在雷达测距场景下, MD算法的性能与MAP算法相比, 获得了约1 dB的增益, 具有较好的估计性能。

**关键词:** 参数估计; 最小散度; 最大后验; 雷达测距

**中图分类号:** TN911 **文献标志码:** A

## A Radar Ranging Estimation Method Based on Relative Entropy

JU Meiyu, XU Dazhuan, XU Huan

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China)

**Abstract:** The maximum a posteriori (MAP) algorithm is the most commonly used parameter estimation method. However, the MAP algorithm focuses on the position of the maximum peak of the posterior distribution and does not fully utilize the complete information of the posterior distribution. This article proposes a minimum divergence (MD) radar ranging estimation method based on relative entropy. Firstly, the posterior distribution of the parameters is derived. Secondly, a distribution similar to them is constructed. Therefore, the value is estimated by finding the minimum value of their divergence. Simulation results indicate that in radar ranging scenarios, the MD algorithm achieves approximately 1 dB gain in performance compared to the MAP algorithm, demonstrating its superior estimation performance.

**Key words:** parameter estimation; minimum divergence (MD); maximum a posteriori (MAP); radar ranging

## 引言

目前信号处理领域常用的参数估计方法根据是否使用先验信息可以分为两类。其中最大似然(Maximum likelihood, ML)估计、最小二乘(Least squares, LS)估计由于未使用先验信息性能受到一定的限制。基于贝叶斯准则的估计方法有最小均方误差估计(Minimum mean square error estimation, MMSE)、最大后验(Maximum a posteriori, MAP)估计和线性最小均方误差估计(Linear MMSE, LMMSE)<sup>[1]</sup>。这些方法通过引入先验分布, 将先验知识融合到推断过程中, 使得参数估计更加准确。

MMSE和MAP都利用了后验分布,对于均值和峰值相同的分布二者估计性能相同。当先验分布为均匀分布时,MAP估计就退化为ML估计。此外多重信号分类(Multiple signal classification algorithm, MUSIC)算法<sup>[2]</sup>、旋转不变子空间参数估计算法<sup>[3]</sup>等也是常用的参数估计方法。克拉美罗下界(Cramer-Rao lower bound, CRLB)<sup>[1]</sup>为上述估计方法提供了一种理论上的最小方差下界,用于评估参数估计的性能。目前随着深度学习的不断发展,神经网络已被广泛用于参数问题,取得了重要的研究成果<sup>[4-5]</sup>。近年来,徐大专等<sup>[6-7]</sup>致力于空间信息论的研究,利用贝叶斯准则推导出了雷达测距分布,得到了关于目标归一化时延的最大后验估计,并创造性地提出了一种雷达性能评价指标熵误差(Entropy error, EE)。MAP估计器选择匹配滤波器的峰值,符合一般的直觉,一直被当做是最优。寻找可以实现更好的估计性能的方法是关注热点。

相对熵,又被称为KL(Kullback-Leibler)散度,是用来描述两个概率分布之间差异的非对称性度量。相对熵作为评价指标已被广泛应用于多输入多输出(Multiple input multiple output, MIMO)雷达的最佳波形设计问题中<sup>[8-11]</sup>。针对目标数的估计问题,文献[12]通过计算假设模型和观测数据之间的KL散度来确定目标个数。文献[13]基于KL散度,提出了一种新的系统框架用于解决雷达检测中的多重假设检验问题。随着雷达系统和通信系统联系越来越密切,一些学者将相对熵作为评价指标应用于感知通信一体化领域。Al-Jarrah等<sup>[14-15]</sup>应用KL散度对雷达系统和通信系统的性能进行了统一的评估并分析了二者性能。

事实上,只有理论后验分布才可以反映最优的估计性能。MAP在参数估计过程中,仅仅关注后验分布的峰值(局部特性),对后验分布的整体形状不做关心。为了充分利用后验分布的信息,本文基于信息散度,提出了一种最小散度(Minimum divergence, MD)估计方法。首先推导雷达测距分布,然后构造一个与其形状相似的分布,通过散度来计算两个分布之间的差异,散度最小处即为目标归一化时延的估计值。

## 1 系统模型

以单天线雷达的单目标感知系统为例,接收信号经过正交下变频和低通滤波后,得到复基带信号可表示为

$$y(t) = su(t - \tau) + w(t) \quad (1)$$

式中: $y(t)$ 为接收信号; $u(t) = \text{rect}(t/T) \exp(j\pi Kt^2)$ 为线性调频信号,其中, $T$ 为脉冲宽度, $K$ 为线性调频频率; $\tau = 2d/v$ 为接收信号的时延,其中 $d$ 为目标与天线的距离, $v$ 为电磁波的速度; $s = \alpha e^{j\varphi}$ 为目标复散射系数,其中 $\alpha$ 为目标散射系数幅值; $\varphi = -2\pi f_c \tau + \varphi_0$ 为与时延和载波频率相关的散射相位,其中 $f_c$ 为载波频率, $\varphi_0$ 为初始相位; $w(t)$ 为带宽为 $B/2$ ,均值为0,方差为 $N_0$ 的复加性高斯白噪声。

根据奈奎斯特采样定理,以速率 $B$ 对接收信号进行采样。令 $x = B\tau$ ,表示目标的归一化时延。对式(1)进行矢量化,则有

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}(x)s + \mathbf{w} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{y} = [y(-N/2), y(-N/2 + 1), \dots, y(n), \dots]^H$ 为接收信号矢量, $\mathbf{u}(x) = [u(-N/2), u(-N/2 + 1), \dots, u(n - x), \dots]^H$ 为波形矢量, $\mathbf{w} = [w(-N/2), w(-N/2 + 1), \dots, w(n), \dots]^H$ 为复加性高斯白噪声矢量, $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ ,其中 $N = TB$ 表示时间带宽积。

## 2 雷达测距分布

一般认为目标位置和散射是相互独立的,即 $p(x, s) = p(x)p(s)$ 。在没有任何先验信息的情况下,

目标的位置可以假定在观测区间上均匀分布,即  $p(x) = 1/N_0$ 。针对恒模散射目标,通常可以将散射相位  $\varphi$  建模为  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量。因此信号的统计特性可表征为

$$p(s) = p(\alpha, \varphi) = p(\alpha) p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \delta(\alpha - \alpha_0) \quad (3)$$

式(2)定义的系统模型中的噪声矢量  $\mathbf{w}$  的概率密度函数可表示为

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \mathbf{w}^H \mathbf{w}\right\} \quad (4)$$

假设信噪比已知,根据式(2)定义的系统模型,在给定  $x$  和  $\varphi$  时,  $\mathbf{y}$  的多维概率密度函数(Probability density function, PDF)为<sup>[8]</sup>

$$p(\mathbf{y}|x, \varphi) = \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} [\mathbf{y} - \mathbf{u}(x)\alpha e^{j\varphi}]^H [\mathbf{y} - \mathbf{u}(x)\alpha e^{j\varphi}]\right) \quad (5)$$

式(5)能够进一步展开为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|x, \varphi) &= \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left|y(n) - \alpha e^{j\varphi} u(n-x)\right|^2\right) = \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |y(n)|^2 + \alpha^2\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{2\alpha}{N_0} \operatorname{Re}\left(e^{-j\varphi} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y(n)u(n-x)\right)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

根据贝叶斯公式,后验分布可展开为

$$p(x|\mathbf{y}) = \frac{\int_0^{2\pi} p(\mathbf{y}|x, \varphi) p(\varphi) p(x) d\varphi}{\int_{-N/2}^{N/2} \int_0^{2\pi} p(\mathbf{y}|x, \varphi) p(\varphi) p(x) d\varphi dx} \quad (7)$$

并且

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} p(\mathbf{y}|x, \varphi) p(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2} |y(n)|^2 + \alpha^2\right)\right) \cdot I_0\left(\frac{2\alpha}{N_0} \left|\sum_{n=-N/2}^{N/2} y(n)u(n-x)\right|\right) \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $I_0(\cdot)$  表示第一类零阶修正贝塞尔函数

因此针对恒模散射目标,后验 PDF<sup>[7]</sup>为

$$p(x|\mathbf{y}) = \frac{I_0\left(\frac{2\alpha}{N_0} \left|\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y(n)u(n-x)\right|\right)}{\int_x I_0\left(\frac{2\alpha}{N_0} \left|\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y(n)u(n-x)\right|\right) dx} \quad (9)$$

MAP 估计是在匹配滤波过程中找到最大峰值的位置,即找到后验分布  $p(x|\mathbf{y})$  最大值对应的位置。由于目标归一化时延假定在观测区间内服从均匀分布,因此在测距分布中最大后验估计等价于最大似然估计。

对于一次特定的快拍,假设目标位置为  $x_0$ , 目标散射系数为  $\alpha e^{j\varphi_0}$ , 有

$$y_0(n) = \alpha e^{j\varphi_0} u(n-x_0) + w_0(n) \quad (10)$$

将  $y_0(n)$  代入式(9)并化简,可以得到

$$\begin{aligned}
 p(x|y) &= \frac{I_0\left(\frac{2\alpha}{N_0}\left|\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} [\alpha e^{j\varphi_0} u(n-x_0) + w(n)] u(n-x)\right|\right)}{\int_{-N/2}^{N/2} I_0\left(\frac{2\alpha}{N_0}\left|\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} [\alpha e^{j\varphi_0} u(n-x_0) + w(n)] u(n-x)\right|\right) dx} = \\
 &= \frac{I_0\left(\frac{2\alpha^2}{N_0}\left|\text{sinc}(x-x_0) + \frac{e^{-j\varphi_0}}{\alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n) u(n-x)\right|\right)}{\int_{-N/2}^{N/2} I_0\left(\frac{2\alpha^2}{N_0}\left|\text{sinc}(x-x_0) + \frac{e^{-j\varphi_0}}{\alpha} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n) u(n-x)\right|\right) dx} = \\
 &= \frac{I_0\left[2\rho^2\left|\text{sinc}(x-x_0) + \frac{1}{\alpha} w(x)\right|\right]}{\int_x I_0\left[2\rho^2\left|\text{sinc}(x-x_0) + \frac{1}{\alpha} w(x)\right|\right] dx} \tag{11}
 \end{aligned}$$

式中  $w(x)$  表达式为

$$w(x) = e^{-j\varphi_0} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_0(n) u(n-x) \tag{12}$$

$w(x)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 E[w(x)w^*(x)] &= E\left[e^{-j\varphi_0} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_0(n) u(n-x) \cdot e^{j\varphi_0} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_0^*(m) u^*(m-x)\right] = \\
 &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left\{ \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} u(n-x) u^*(m-x) E[w_0(n)w_0^*(m)] \right\} = N_0 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |u(n-x)|^2 = N_0 \tag{13}
 \end{aligned}$$

$w(x)$  是服从均值为 0、方差为  $N_0$  的复加性高斯白噪声；基带信号的能量被归一化为 1，信噪比定义为  $\rho^2 = \alpha^2/N_0$ 。式(11)称为雷达测距分布。

上面的理论后验分布利用了目标和信道的全部统计特性，并且每一步都是严格推导的，因此理论后验分布反映了雷达感知的最优性能。

### 3 MD 估计

根据 Kullback-Leibler 定义的相对熵为

$$D_{p//q} = \int_x p(x) \log_2 \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{14}$$

在雷达测距中应用 KL 散度进行估计的思想是：将  $p(x)$  理解为一次快拍所得的后验 PDF 为  $p(x|y)$ ，将  $q(x)$  理解为构造出的后验 PDF 为  $q_\theta(x)$ ，即

$$q_\theta(x) = \frac{I_0[2\rho|\rho \text{sinc}(x-\theta) + \eta(x)]}{\int_x I_0[2\rho|\rho \text{sinc}(x-\theta) + \eta(x)] dx} \tag{15}$$

式中： $\theta$  为观测区间内的变量，用于估计目标的位置， $\eta(x)$  是服从  $N(0, 1)$  的复加性高斯白噪声。因此式(14)可写为

$$D_{p//q}(\theta|\mathbf{y}) = \int_x p(x|\mathbf{y}) \log_2 \frac{p(x|\mathbf{y})}{q_\theta(x)} dx \quad (16)$$

假设一次快拍中,在 $\hat{\theta}$ 处求得的 $D(\theta|\mathbf{y})$ 最小,则将 $\hat{\theta}$ 判为目标的估计位置,即

$$\hat{\theta}_{\text{MD}} = \arg \min_{\theta} \{D(\theta|\mathbf{y})\} \quad (17)$$

ML和MAP估计器都是峰值估计器,传统的看法认为ML估计器和MAP估计器是最优的估计器。实际上ML和MAP都只是利用了后验分布的局部特性(峰值)而不是全局特性。本文提出的MD算法通过构造一个与后验分布 $p(x|\mathbf{y})$ 相似的分布 $q_\theta(x)$ ,然后与 $p(x|\mathbf{y})$ 进行KL散度运算, $q_\theta(x)$ 与 $p(x|\mathbf{y})$ 的相似度越高,对应的估计值 $\hat{\theta}$ 就越贴近于真实值 $x_0$ 。本文所提方法充分利用了后验分布的整体形态信息,获得了优越的估计性能。

考虑一次蒙特卡罗仿真的MD和MAP方法的复杂度。复杂度分析如表1所示,由于本文所提MD方法需要通过计算真实分布与构造分布之间的KL散度估计参数,因此复杂度略大于MAP方法。

表1 MAP与MD算法复杂度对比

Table 1 Comparison of complexity between MAP and MD algorithms

参数估计方法	算法复杂度
MAP	$O(N \log_2 N + N)$
MD	$O(N \log_2 N + N^2 + N)$

#### 4 仿真结果

本文在雷达测距场景下针对恒模散射目标进行仿真,设目标距离的归一化时延 $x_0 = 0$ ,时延间隔 $\Delta = 0.01$  m,观测区间设置为 $[-N/2, N/2 - 1]$ ,其中 $N$ 为64,蒙特卡罗仿真次数设置为10 000次。

图1给出了在信噪比为15 dB时,一次特定快拍下雷达测距分布MAP和MD的估计位置。从图1中可看出,使用MAP方法得到的位置估计值为 $\hat{x}_{\text{MAP}} = 0.35$ ,使用MD方法得到的位置估计值为 $\hat{\theta} = 0.11$ ,显然 $\hat{\theta}$ 比 $\hat{x}_{\text{MAP}}$ 更贴近于真实值 $x_0$ 。

图2比较了单次快拍下EE<sup>[5]</sup>、MD以及MAP估计的误差性能。可以看到在-10~5 dB信噪比区间时,MD和MAP的曲线基本重合,二者性能几乎一致;而在中等信噪比区间5~15 dB,与MAP方法相比,MD方法的估计误差有大约1 dB的增益;MD与MAP方法的估计误差从20 dB信噪比开始都收敛

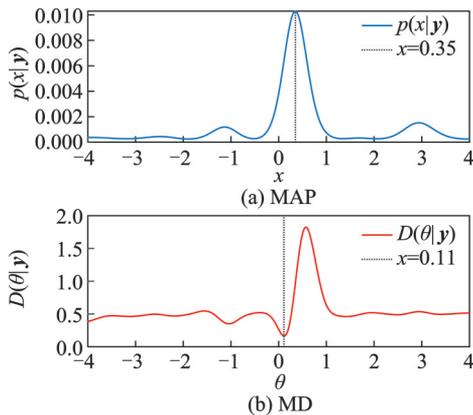


图1 单次快拍条件下MAP与MD的估计位置  
Fig.1 Estimated positions of MAP and MD under single-shot condition

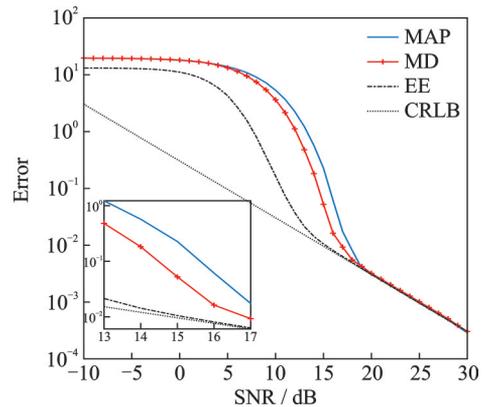


图2 单次快拍条件下不同估计方法的误差比较  
Fig.2 Comparison of errors between different estimation methods under single-shot condition

于CRLB。在中低信噪比区间上,MD与MAP估计器的性能都达不到熵误差的理论界,这说明MAP准则和MD准则都还不是最优估计。

图3比较了100次快拍下EE<sup>[5]</sup>、MD以及MAP估计的误差性能。相较于单次快拍,几种方法估计的误差性能都有一定的提升,在较低信噪比时收敛于CRLB。在-15~-5 dB信噪比区间内相比于MAP方法,MD方法仍展现出了明显的性能增益。此外,在多拍情况下,MD与MAP估计器在中低信噪比区间仍达不到熵误差的理论界,再次说明MAP准则和MD准则都不是最优的估计。

为了进一步探究快拍数对误差性能的影响,本文仿真了信噪比为10 dB条件下,误差性能随快拍次数变化的曲线图,如图4所示。随着快拍数增多,不同方法的误差逐渐减小,在快拍数为10次时基本收敛于CRLB。此外,相较于MAP方法,MD方法仍呈现出了明显的性能增益。

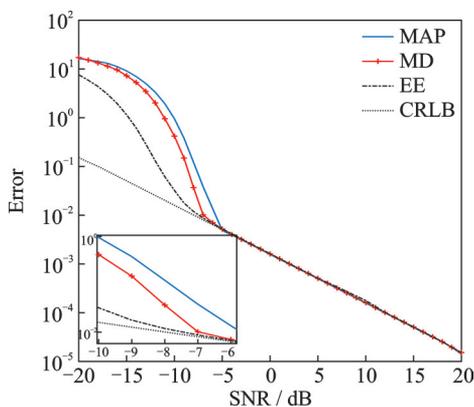


图3 100次快拍条件下不同估计方法的误差比较

Fig.3 Comparison of errors between different estimation methods under 100-shot conditions

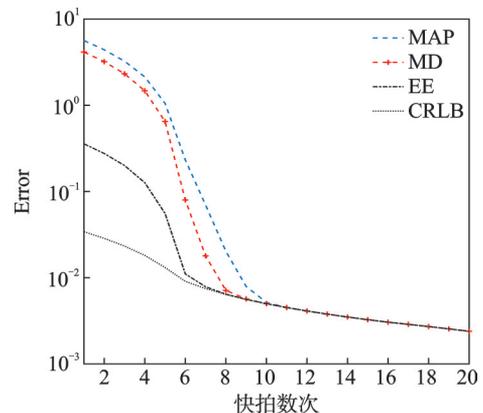


图4 固定信噪比下不同估计方法的误差比较

Fig.4 Comparison of errors between different estimation methods under fixed signal-to-noise ratio

## 5 结束语

本文提出了一种基于相对熵的雷达测距估计方法——MD估计。首先给出了雷达测距分布,然后构建一个与其相似分布,计算二者之间的KL散度从而得到参数估计值。本文提出的MD算法利用了后验分布每个位置的特征,充分考虑了整个后验分布的形态信息。仿真结果表明,在雷达测距场景下,MD算法获得了和MAP算法相当的估计性能,在中等信噪比区间性能甚至超越了MAP算法。本文从信息论的视角提供了一种新的参数估计思路。

### 参考文献:

- [1] STEVENM K.统计信号处理基础:估计与检测理论[M].北京:电子工业出版社,2011.
- [2] WANG H, SCHMID C. Action recognition with improved trajectories[C]//Proceedings of International Conference on Computer Vision. [S.l.]: IEEE, 2014.
- [3] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.
- [4] SHEN H, HUERTA E A, O'SHEA E, et al. Statistically-informed deep learning for gravitational wave parameter estimation [J].Machine Learning-Science and Technology, 2022, 3(1): 015007.
- [5] BAO Y, TAN Z, SUN H, et al. SimNet: Simplified deep neural networks for OFDM channel estimation[C]//Proceedings of 2020 IEEE the 3rd International Conference on Information Communication and Signal Processing (ICICSP). [S.l.]: IEEE,

2020: 348-352.

- [6] 徐大专, 罗浩. 空间信息论的新研究进展[J]. 数据采集与处理, 2019, 34(6): 941-961.  
XU Dazhuan, LUO Hao. Recent progress on spatial information theory[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2019, 34(6): 941-961.
- [7] 徐大专, 屠伟林, 施超, 等. 参数估计定理[J]. 数据采集与处理, 2020, 35(4): 591-602.  
XU Dazhuan, TU Weilin, SHI Chao, et al. Parameter estimation theorem[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2020, 35(4): 591-602.
- [8] TANG B, TANG J, PENG Y. MIMO radar waveform design in colored noise based on information theory[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9): 4684-4697.
- [9] 韩金梦. 基于凸优化理论的MIMO雷达波形设计方法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2017.  
HAN Jinmeng. Research on MIMO radar waveform design method based on convex optimization theory[D]. Changchun: Jilin University, 2017.
- [10] GROSSI E, LOPS M. Kullback-Leibler divergence region in MIMO radar detection problems[C]//Proceedings of International Conference on Information Fusion. [S.l.]: IEEE, 2012.
- [11] WANG L, WONG K K, WANG H, et al. MIMO radar adaptive waveform design for extended target recognition[J]. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2015, 11(6): 84.
- [12] ADDABBO P, HAN S, BIONDI F, et al. Adaptive radar detection in the presence of multiple alternative hypotheses using Kullback-Leibler information criterion-part I: Detector designs[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021(69): 3730-3741.
- [13] 孙贺麟, 高洪元, 杜亚男, 等. 频控阵MIMO雷达的目标数与方位参数联合估计方法[J]. 通信学报, 2023, 44(2): 41-51.  
SUN Helin, GAO Hongyuan, DU Yanan, et al. Joint estimation method of target number and orientation parameters for FDA-MIMO radar[J]. *Journal of Communications*, 2023, 44(2): 41-51.
- [14] AL-JARRAH M, ALSUSA E, MASOUROS C. Kullback-Leibler divergence analysis for integrated radar and communications (RadCom)[C]//Proceedings of the 2023 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). [S.l.]: IEEE, 2023: 1-6.
- [15] AL-JARRAH M, ALSUSA E, MASOUROS C. A unified performance framework for integrated sensing-communications based on KL-divergence[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2023, 22(12): 9390-9411.

#### 作者简介:



鞠美玉(1999-), 女, 硕士研究生, 研究方向: 空间信息论, E-mail: jumeiyu@nuaa.edu.cn。



徐大专(1963-), 通信作者, 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 空间信息论、信息与编码理论、宽带无线通信, E-mail: xudazhuan@nuaa.edu.cn。



许欢(1998-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 空间信息论, E-mail: xu\_huan@nuaa.edu.cn。

(编辑: 陈珺)