

# 基于增强生长型神经气的高维多目标进化算法

薛明, 王鹏, 童向荣

(烟台大学计算机与控制工程学院, 烟台 264005)

**摘要:** 随着对高维多目标优化问题的深入研究, 带有不规则 Pareto 前沿的高维多目标优化问题因其复杂的 Pareto 前沿分布, 给现有方法的求解带来了挑战。针对上述问题, 提出一种基于增强生长型神经气的高维多目标进化算法, 该算法综合生长型神经气的学习特性与二元质量指标的优化特性来增强种群在不规则 Pareto 前沿的收敛压力。首先, 设计了一种增强的生长型神经气网络, 该网络利用 Pareto 最优前沿的拓扑信息指导种群向 Pareto 最优前沿方向收敛。然后, 提出了一种联合度量指标以配合 Pareto 支配信息来综合评价个体的收敛性。最后, 提出一种基于自适应参考点的环境选择增强种群在高维目标空间的多样性。为验证所提算法的性能, 在 DTLZ 和 WFG 基准问题集中的 44 个不规则高维多目标优化问题与 5 种先进的高维多目标进化算法进行对比实验。实验结果表明, 所提出的基于增强生长型神经气的高维多目标进化算法的整体性能优于对比算法。

**关键词:** 多目标优化; 多目标进化算法; 度量指标; 不规则 Pareto 前沿; 生长型神经气

**中图分类号:** TP391 **文献标志码:** A

## Enhanced Growing Neural Gas Based Many-Objective Evolutionary Algorithm

XUE Ming, WANG Peng, TONG Xiangrong

(School of Computer and Control Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract:** With the in-depth research on many-objective optimization problems, many-objective optimization problems with irregular Pareto frontiers pose challenges to existing methods due to their complex Pareto frontiers distribution. To address the above issues, a many-objective evolutionary algorithm based on the enhanced growing neural gas is proposed. This algorithm combines the learning characteristics of growing neural networks with the optimization characteristics of binary quality indicators to enhance the convergence pressure of the population at the irregular Pareto frontier. Firstly, an enhanced growing type of neural gas network is designed, which utilizes the topological information of the Pareto optimal frontier to guide the population to converge towards the Pareto optimal frontier direction. Then, a joint metric is proposed to comprehensively evaluate the convergence of individuals in conjunction with Pareto dominance information. Finally, an adaptive reference point based environment selection is proposed to enhance the diversity of the population in high-dimensional target space. To verify the performance of the proposed algorithm, 44 irregular many-objective optimization problems in the DTLZ and WFG benchmark problem sets are compared with five advanced many-objective evolutionary

**基金项目:** 国家自然科学基金(62072392, 61972360, 62103350); 山东省重大科技创新工程项目(2019522Y020131); 山东省自然科学基金(ZR2020QF113, ZR2020QF046); 烟台市重点实验室: 高端海洋工程装备智能技术。

**收稿日期:** 2023-04-10; **修订日期:** 2023-09-18

algorithms. Experimental results show that the overall performance of the proposed many-objective evolutionary algorithm based on enhanced growing neural gas is superior to the comparison algorithms.

**Key words:** multi-objective optimization; multi-objective evolutionary algorithm; metric index; irregular Pareto front; growing neural gas

## 引言

近年来,随着社会经济的持续发展与科学研究的进一步深入,研究人员面临的多目标优化问题(Multi-objective optimization problem, MOP)<sup>[1]</sup>的目标数量呈现出高维化的趋势。当目标数超过3时,该类问题被称为高维多目标优化问题(Many-objective optimization problem, MaOP)<sup>[2]</sup>。目前处理该类问题的方法主要分为3类:(1)基于Pareto支配的方法<sup>[3-7]</sup>; (2)基于指标的方法<sup>[8-11]</sup>; (3)基于分解的方法<sup>[12-13]</sup>。

对于MaOP,如果其Pareto前沿(Pareto front, PF)是不连续的、倒置的或退化的等特殊拓扑结构,则称其为带有不规则PF<sup>[14]</sup>的MaOP。图1展示了PF不连续时目标空间中解的分布,其中红色三角形为不规则PF上的解,黑色三角形为PF以外的解。显然,解的分布不能完全覆盖PF,这使得向PF的收敛很困难。带有不规则PF的MaOP的出现给现有的高维多目标进化算法(Many-objective evolutionary algorithm, MaOEA)带来了两类挑战:首先,在此类问题中,指导种群探索的参考向量可能分布在远离真实PF的位置,这将导致部分参考向量失去作用,因为没有解与其相关联;其次,对于不规则的PF,最常用的方法在进行种群收敛时,对每个PF区域的解使用相同的聚合方法,不能保证其适配每个不规则区域,从而难以维持收敛性与多样性的平衡。因此如何在各类不规则的PF上都能保证稳定的进化效率一直是研究人员努力的方向。

生长型神经气(Growing neural gas, GNG)<sup>[15]</sup>是一种受自组织映射(Self-organizing map, SOM)<sup>[16]</sup>启发的自组织神经网络,它能逐步调整数据节点的位置,从而学习数据的拓扑结构。这一特性使得GNG适用于学习参考向量的分布,因为参考向量需要逐渐向非支配解的方向移动。由此,通过不断训练GNG使节点反映出PF的拓扑结构,并相应地确定参考向量的分布。虽然GNG具有处理带有不规则PF的MaOP的一系列优势,但基于GNG的进化算法的研究依然比较少。

为了解决以上问题,本文结合生长型神经网络来适配带有不规则PF的MaOP中的参考向量与真实的PF,并提出了一种基于增强生长型神经气的MaOEA,名为MaOEA-EGNG。具体而言,该方法在种群交叉变异后使用一种联合度量指标选出在高维目标空间上更优质的解来生成子代。其后,根据子代中的非支配解来生成GNG的输入信号,为GNG的节点更新以及种群的搜索提供了方向。然后,设计了一种增强的GNG,其中增加了节点淘汰机制,使得生长型神经网络在节点更新时,选择距离非支配解最近的节点并保留了部分孤立节点,以适应不规则的PF。最后,使用基于自适应参考点的环境选择,根据生长型神经气网络的节点作为指导,自适应地生成参考点,并根据联合度量指标排序,选出最终的种群。

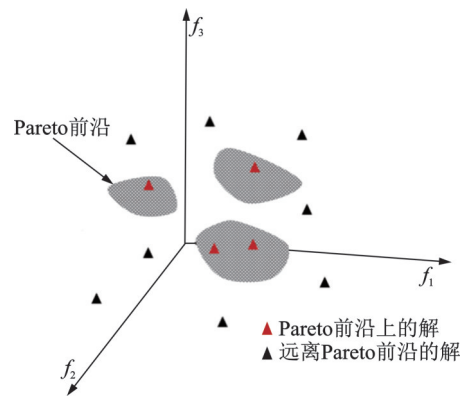


图1 带有不规则PF的MaOP中解的分布  
Fig.1 Distribution of solutions in MaOP with irregular PF

本文的主要贡献包括以下3个方面:(1)设计了一种增强的生长型神经气(Enhanced GNG, EGNG),来适配高维目标空间中的参考点与不规则的PF,以求解带有不规则PF的MaOP。具体而言,为每个节点增加了强度指标,该指标可在每代中评估节点之间的优劣性,并将其量化处理,最终在节点更新时根据强度指标删除劣势节点;(2)设计了一种联合度量指标,其使用  $I_c$  指标描述种群相互支配的最小距离从而维护种群的收敛性,并运用基于位移的密度估计法测算解之间的密度信息,维持了种群的多样性;(3)提出了一种基于自适应参考点的环境选择(Environment selection based on adaptive reference points, ESAR),该方法使用EGNG的节点来指导参考点自适应,具体而言,自适应抽取增强的生长型神经气节点作为参考点,并基于每个参考点的联合度量指标来选择最终种群。

## 1 相关工作

本节首先介绍多目标优化问题的相关定义,然后分别阐述了基于强度值的适应度计算方法以及生长型神经气的构建及更新方法。

### 1.1 基本定义

**定义 1** 多目标优化问题。一般情况下,多目标优化问题可以表述为

$$\begin{cases} \text{minimize } F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T \\ \text{s.t. } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in D \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为一个 $n$ 维决策向量; $D \subseteq R^n$ 称为决策空间; $F(\mathbf{x}) \in R^m$ 是 $m$ 个目标函数 $f_i(\mathbf{x})$ 组成的目标向量, $i = 1, 2, \dots, m$ ,目标向量构成目标空间。

**定义 2** Pareto 支配关系。一个向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  支配另一个向量  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ , 当且仅当  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \alpha_i \leq \beta_i$  且  $\exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, \alpha_j < \beta_j$ , 这样就可以表示为  $\alpha < \beta$ , 称为  $\alpha$  支配  $\beta$ 。

**定义 3** Pareto 最优解。设  $\mathbf{x}' \in S$  为 Pareto 最优解, 当且仅当不存在任意解  $\mathbf{x} \in S$  使得  $\mathbf{x} < \mathbf{x}'$  成立。Pareto 最优解在一般情况下也叫做 Pareto 非劣解或 Pareto 非支配解。

**定义 4** Pareto 最优解集 (Pareto optimal solution set, PS)<sup>[17]</sup>。Pareto 最优解集 PS 是所有 Pareto 最优解的集合, 表示为

$$\text{PS} = \{ \mathbf{x} \in S, \nexists \mathbf{x}' \in S, F(\mathbf{x}') < F(\mathbf{x}) \} \quad (2)$$

**定义 5** Pareto 最优前沿。PS 经过目标函数的映射构成了此问题的 Pareto 前沿或 Pareto 前沿面, 即 Pareto 最优解在目标空间中所形成的线或面, 表示为

$$\text{PF} = \{ F(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \text{PS} \} \quad (3)$$

### 1.2 基于强度值的适应度计算方法

改进的基于强度值的 Pareto 进化算法 (Improving the strength pareto evolutionary algorithm, SPEA2)<sup>[18]</sup> 修复了原始的基于强度值的 Pareto 进化算法 (Strength Pareto evolutionary algorithm, SPEA) 中个体适应度相同, 选择压力减小以及聚类没有作用在种群中的所有个体, 从而丢失外部种群等问题。以 SPEA2 为基础的工作在近些年也被广泛研究, 例如将一种基于位移的密度估计方法 (Shift-based density estimation, SDE)<sup>[13]</sup> 加入 SPEA2 中, 改善了当目标增加时 SPEA2 多样性难以维持的问题。还有一种基于参考向量的强度 Pareto 进化算法 (Strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction, SPEA-R)<sup>[19]</sup>, 在多样性方面使用解与参考向量之间的角度来维持多样性。

SPEA2 中基于强度值的优势划分方法能清晰地反映出个体之间支配关系。具体来说, 存档  $\bar{P}_t$  和种群  $P_t$  中的每个个体  $i$  都被分配了一个强度值  $S(i)$  来表示被其支配的个体数量, 有

$$S(i) = \left| \left\{ j \mid j \in P_i + \bar{P}_i \wedge i \succ j \right\} \right| \quad (4)$$

式中: $|\cdot|$ 表示一个集合的基数; $+$ 为多集合并集符号; $\succ$ 对应帕累托支配关系。在 $S$ 值的基础上得出适应度的收敛指标 $R(i)$ 为

$$R(i) = \sum_{j \in P_i + \bar{P}_i, j \succ i} S(j) \quad (5)$$

式中 $R(i)$ 表示个体 $i$ 所支配个体的 $S$ 值的总和。

### 1.3 生长型神经气的构建及更新方法

如果在处理不规则PF的MaOP时能够预测出PF的几何性质,则可以根据相应的PF分布选择合适的优化函数来指导种群演化。近年来,PF的估计已成为研究的热点。在PeEA<sup>[20]</sup>中,提出了一种基于自适应曲率估计方法,并利用成就标准化函数来识别几何信息的临界解。MOEAD-UR<sup>[21]</sup>提出了一种确定PF几何性质的方法,该方法量化了规则和不规则问题的评价标准。通过确定问题的几何性质,选择了一个合适的权值更新策略。然而,当处理分离和分散的PF问题时,PeEA和MOEAD-UR的搜索压力会显著增加。BCE-PMOEA<sup>[22]</sup>提出了一种双准则进化框架,将Pareto准则方法与非Pareto准则方法相结合来增强收敛性和多样性。但在进化初期PF难以确定,这时非Pareto准则可能会误导搜索方向,以至于降低进化效率。

为了更准确地找到不规则PF的拓扑结构,近期热门的方法是采用GNG来指导基于分解的MaOEA的搜索。GNG能够自适应地学习给定的一组输入信号的拓扑结构。GNG网络由两部分组成:(1)积累输入信号的节点集;(2)节点对之间的边集,表示连接节点之间的关系。总体步骤如下:

**步骤1** 从随机位置 $w_a$ 和 $w_b$ 上的两个节点 $a$ 和 $b$ 开始。新生成的边的年龄和新生成的节点的误差为0。

**步骤2** 输入一个信号 $\xi$ 。

**步骤3** 找到离 $\xi$ 最近节点 $s_1$ 和第二近节点 $s_2$ 。

**步骤4** 增加由 $s_1$ 产生的所有边缘的年龄。

**步骤5** 通过增加 $s_1$ 和 $\xi$ 的平方距离来增加 $s_1$ 的误差变量,表达式为

$$\Delta \text{error}(s_1) = \|w_{s_1} - \xi\|^2 \quad (6)$$

**步骤6** 将 $s_1$ 及其直接拓扑邻居 $n$ 向 $\xi$ 移动,表达式为

$$\begin{aligned} \Delta w_{s_1} &= \epsilon_b (\xi - w_{s_1}) \\ \Delta w_n &= \epsilon_n (\xi - w_n) \end{aligned} \quad (7)$$

**步骤7** 如果 $s_1$ 和 $s_2$ 由一条边连接,则将该边的age设置为零。如果这样的边不存在,则创建它。

**步骤8** 删除age大于 $\text{age}_{\max}$ 的边缘。如果这导致节点没有发散边,则删除孤立节点。

**步骤9** 如果到目前为止输入的信号数是参数 $\lambda$ 的倍数,并且节点数没有达到最大值,请按如下方法插入一个新的节点。

(1) 确定错误变量最大的节点 $q$ 。

(2) 在具有最大错误变量的 $q$ 与其邻居 $f$ 之间插入一个新节点 $r$ ,表达式为

$$w_r = 0.5(w_q + w_f) \quad (8)$$

(3) 插入连接新单元 $r$ 和单元 $q$ 和 $f$ 的边,并删除位于 $q$ 和 $f$ 之间的原始边。

(4) 通过将 $q$ 和 $f$ 的误差变量乘以一个常数 $a$ 。设置 $r$ 的错误变量与 $q$ 的错误变量相同。

**步骤10** 通过乘以常数 $d$ 来减少所有的误差变量。

**步骤11** 如果停止标准尚未得到满足,则执行步骤2。

虽然 GNG 具有良好的灵活性和适应性等优点,并在信息建模中得到了广泛的应用,但在不规则 PF 的 MaOEA 中应用还很少。因此若将 GNG 嵌入 MaOEA 中,使用已知的非支配解来训练 GNG 中的节点,则 GNG 会根据非支配解的分布来学习带有不规则 PF 的 MaOP 的 PF 拓扑结构,并在不规则拓扑空间生成参考点来指导种群的进一步收敛,达到处理带有不规则 PF 的 MaOP 的目的。

## 2 基于 EGNG 的高维多目标进化算法

本节主要介绍 MaOEA-EGNG 的算法框架,联合度量指标计算方法,EGNG 的节点更新策略以及基于自适应参考点的环境选择,图 2 为 MaOEA-EGNG 的算法流程图。

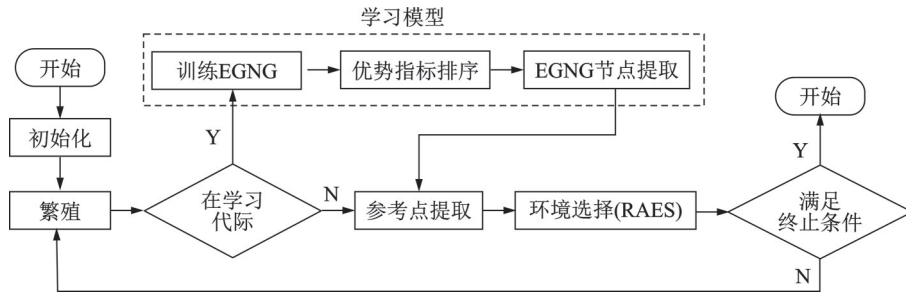


图2 MaOEA-EGNG 流程图

Fig.2 Flow chart of MaOEA-EGNG

### 2.1 算法框架

算法 1 展示了 MaOEA-EGNG 的算法框架,主要分为 5 步:

(1) 初始化:生成一组随机分布的参考点和一个初始种群  $P$ ,根据参考点和初始种群  $P$  构建初始 GNG 网络。

(2) 繁殖:繁殖过程分为交叉变异和生成子代两部分,交叉变异使用流行的模拟二项式交叉和多项式变异方法,根据原始种群和变异后种群的联合度量指标排序来筛选并保留多样性和收敛性更加平衡的解作为后代种群。

(3) 增强生长型神经气学习:在增强的生长型神经气网络中,为每个节点加入了一个优势属性,在每代节点移动后,基于优势属性对节点进行排序,删除末尾的节点,并在排名首位的节点处增加新节点,直到达到网络容量的最大值。

(4) 参考点提取:将 EGNG 的节点与最近个体进行绑定,自适应地生成与节点数量相当的参考点,这些参考点在目标空间上与 PF 的距离很小,使用这些解来指导环境选择可以有效处理在不规则 PF 的 MaOP 中 PF 的定位与分布问题。

(5) 环境选择:根据一组近似 PF 的参考点,以及每个候选解的联合度量指标,首先在子代种群中根据参考点来选择与之对应的最近的解,其次再计算这些解的联合度量指标,最终根据联合度量指标以及精英选择策略,选出最终的后代种群。

#### 算法 1 MaOEA-EGNG

输入:种群  $P$ ,子代  $O$ ,种群大小  $N$ ,最大迭代数 MaxGen。

输出:种群  $P$

- (1) Initialize: Reference point  $R_u$ ; Input signal  $\xi$
- (2)  $net \leftarrow \text{InitilizeGrowingNeuralGas}(P)$ ; /\*根据初始种群  $P$  来初始化 GNG 网络\*/
- (3)  $\xi \leftarrow \text{UpdateInput}(P, \xi)$

- (4) Metrics  $\leftarrow$  CalMetrics( $P$ )
- (5) if gen  $<$  MaxGen
- (6)  $O \leftarrow$  Reproduction( $P$ , Metrics)
- (7)  $P = P \cup O$
- (8)  $\xi \leftarrow$  UpdateInput( $P$ ,  $\xi$ )
- (9) if gen  $<$  0.9MaxGen
- (10) net  $\leftarrow$  GNGupdate( $P$ ,  $\xi$ )
- (11) end
- (12) [ $P$ , Metrics]  $\leftarrow$  ESGP( $P$ ,  $N$ , net,  $R_u$ ,  $\xi$ )
- (13) end

## 2.2 联合度量指标计算

考虑到在SPEA2中基于强度值的适应度计算方法在遇到两个或以上解的 $R$ 值为0时,算法的选择压力下降,本文的优势评估方法改进了算法处理MaOP时选择压力不足的问题。具体而言,本文的联合度量指标有收敛性标准与多样性标准两个部分。收敛性标准用了基于 $I_{\epsilon^+}$ 的指标<sup>[23]</sup>来描述种群与Pareto最优集在目标空间上的最小距离。 $I_{\epsilon^+}$ 指标能够很好地适应种群的搜索偏好,因此可以将优化过程定义为针对 $A \in \Omega$ 最小化 $I(A, S)$ ,其中 $S$ 为Pareto最优集。在收敛性指标 $R$ 中,根据集合 $A$ 中成员对于优化目标的贡献进行排序,再对其取倒数来保证适应度与 $I$ 的取值成反比。详细公式<sup>[23]</sup>如下

$$I_{\epsilon^+}(A, B) = \min_{\epsilon} \begin{cases} \forall x^2 \in B \exists x^1 \in A; f_m(x^1) - \epsilon \leq f_m(x^2) \\ \text{for } m \in \{1, 2, \dots, M\} \end{cases} \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{\sum_{x^2 \in P \setminus \{x^1\}} -e^{-\frac{I(\{x^2\}, \{x^1\})}{\sigma}} + 1} \quad (10)$$

式中: $\epsilon$ 为一个小正数,用于避免解集过度拥挤; $M$ 为MaOP的目标数; $\sigma$ 为一个正参数,用来表示比例缩放因子。

多样性标准使用SPEA2-SDE<sup>[13]</sup>中的基于位移的密度估计方法。该方法旨在将收敛性差的个体移动到一个拥挤区域,以便于在选择时将其淘汰。具体而言,在评估个体 $p$ 的密度时,若其收敛性优于另一个个体 $q$ ,则将 $p$ 转移到 $q$ 的当前目标位置。此方法有效改善了在处理MaOP时收敛压力缺失问题,公式如下<sup>[13]</sup>

$$Di(p, P) = Di(di(p, q_1), di(p, q_2), \dots, di(p, q_{N-1})) \quad (11)$$

式中: $Di$ 为 $p$ 在种群 $P$ 中新的密度表达; $N$ 为种群大小; $di(p, q_i)$ 为 $p$ 与 $q_i$ 的密度距离。式(11)中已将每个解的密度信息存储到一个数组中,按照递增排序后,选择第 $k$ 个元素作为最终密度大小,记为 $Di^k$ 。多样性指标如下

$$D = \frac{1}{Di^k + 2} \quad (12)$$

式中 $Di$ 越大表示越密集(多样性越差),因此取其倒数作为多样性标准,分母中加2以确保 $0 < D < 1$ 。

$k$ 的设置与SPEA2相同,使用种群数的平方根来计算,因此 $k = \sqrt{N + N}$ 。

联合度量指标的计算可以看作是对于一个适应度值的优化过程。在收敛性指标 $R$ 中, $\epsilon$ 值可探测附

近小范围区域来避免解集过度拥挤,这使得 $R$ 具有相应的多样性维护策略,因此可将 $R$ 视为原始的适应度。再将转换后的密度估计值 $D$ 代入原始适应度 $R$ 对其优化,最终联合度量指标可表示为

$$\text{Metrics} = R + D \quad (13)$$

### 2.3 增强的生长型神经气节点更新策略

本文中使用了基于一元 $I_c$ 指标集合来保存搜索过程中生成的非支配解(输入信号)。然而,在进化过程中,父代的支配解可能会进化为后代的非支配解,而当前代内的非支配解通常包含PF的最新信息。因此本文结合父代与子代来训练EGNG。其主要步骤为:(1)为GNG的每个节点增加一个优势属性 $PaE$ ,并设置 $PaE$ 的初始值0;(2)通过所提出的联合度量指标,为每个节点进行优劣评估,并根据评估结果进行排序;(3)提升前四分之一节点的 $PaE$ 值;(4)删除多余的 $0.5N$ 个节点,并在最优位置生成新的 $0.5N$ 个节点。

为了使环境选择带有更多的候选解,本文将EGNG的大小设置为 $2.5N$ ,其中 $N$ 为种群的大小。图3为EGNG策略的原理图,展示了在3个目标问题上,EGNG节点的更新原理。其中黑色点和灰色点表示EGNG中待更新的节点,灰色节点因优势属性较差被淘汰,如图中从节点 $w_2$ 所发出的虚线所示。图中的五角星为根据非支配解所形成的输入信号,白色点为EGNG迭代后保留的节点向PF移动的新位置,根据输入信号的指导,以及优势属性的筛选,使得EGNG稳定地向PF方向移动。EGNG更新策略的伪代码如算法2所示。

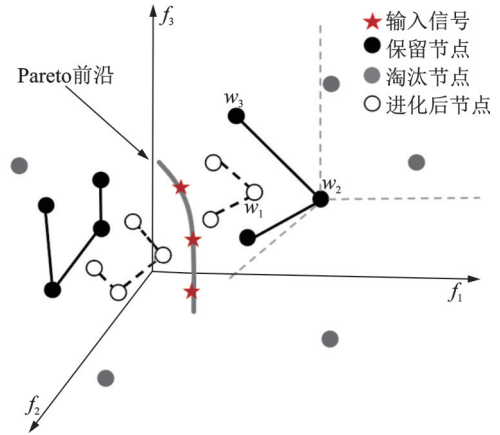


图3 EGNG策略的原理图

Fig.3 Schematic diagram of EGNG strategy

#### 算法2 增强生长型神经气节点更新策略

输入:种群 $P$ ,种群大小 $N$ ,GNG节点集 $net$

输出:GNG节点集 $net$

(1)  $w = net.w; PaE = net.PaE;$

(2)  $\text{Metrics} \leftarrow \text{CalMetrics}(w);$

(3) Generate a Rank based on a descending order

of Metrics values;

(4) for  $i = \text{size}(\text{Rank})$

(5) if  $i \leq 3/4 \times \text{size}(\text{Rank})$

(6)  $PaE = PaE;$

(7) else

(8)  $PaE = PaE + 1;$

(9) end

(10) end

(11) if  $\text{size}(w) > 2.5 \times N$

(12)  $\text{del} \leftarrow \text{Rank}$  in descending  $PaE$  order and find the first  $0.5N$  nodes;

(13) Delete the  $\text{del}$  and delete the connections emanating from  $\text{del};$

(14) end

(15) for  $i=1: \text{size}(P)$

- (16) net  $\leftarrow$  GrowingNeuralGas( $P(i), 2.5 \times N$ ); /\*生成新节点,直到GNG大小为 $2.5N$ \*/  
 (17) end  
 (18) net. $w = w$

## 2.4 基于自适应参考点的环境选择

本文提出的ESAR,根据EGNG的节点来自适应生成参考点,再通过对每个参考点的联合度量指标来进行最终选择。ESAR主要分为3部分:分别为关联节点、优势评估和精英选择,具体方法如算法3所示。值得注意的是,在算法3的开始阶段需要合并种群 $P$ 与GNG的输入信号 $\xi$ ,因为本文将EGNG的大小设置为 $2.5 \times N$ ,EGNG节点数如果跟种群 $P$ 的大小相同则关联节点将没有意义,因为总会有一个节点没有相关连的解,因此形成的候选解的分布可能会严重偏离原来的节点分布。

**算法3** 基于自适应参考点的环境选择

输入:种群 $P$ ,种群大小 $N$ ,GNG节点集net,参考点 $R_u$ ,输入信号 $\xi$

输出:种群 $P$ ,联合度量指标Metrics

- (1)  $P = P \cup \xi$   
 (2)  $R_u \leftarrow$  Associate nodes in net. $w$  with the closest solution in the  $P$   
 (3) Metrics  $\leftarrow$  CalMetrics( $R_u$ )  
 (4) while size( $P$ )  $>$   $N$   
 (5) Delete the solution with the worst Metrics  
 (6) end

## 3 对比实验与结果分析

本节为了测试MaOEA-EGNG的性能,设计了针对不规则PF问题的对比试验,实验设计包括比较算法、测试问题,性能指标和参数设置。最后得出实验结果并对其进行具体分析。

### 3.1 对比算法

选出5个具有代表性的MaOEA,与其进行比较,分别是RVEA-iGNG<sup>[14]</sup>、DEA-GNG<sup>[24]</sup>、PeEA<sup>[20]</sup>、MOEAD-PaS<sup>[25]</sup>和VaEA<sup>[26]</sup>。对5种算法进行简要描述如下。

(1)RVEA-iGNG是一种利用iGNG的自适应RVEA,用于不规则PF的MaOP。在RVEA-iGNG中,采用一组由iGNG训练的参考向量来指导搜索,并通过边界节点来保留PF的边界信息。此方法显著提高了GNG学习效率,以及种群的进化效率。

(2)DEA-GNG分别提出了一种基于GNG的参考向量生成方法和一种自适应优化函数选择方法,分别负责搜索复杂问题的PF以及平衡多样性与收敛性。

(3)PeEA提出了一种自适应选择的PF曲率估计方法来预测PF的几何形状,并提出了一种自适应的适应度计算方法,保证了PF的非支配性。最后提出了基于维度边距距离的密度估计方法来保证算法在各维度上均能保证良好的多样性。

(4)MOEAD-PaS使用了Pareto自适应标度逼近的方法来找到 $L_p$ 方法中的最优 $p$ 值。 $L_p$ 方法为基于分解的MOEA中一系列优化方法的集合,其中 $p$ 值对于算法对PF几何的鲁棒性至关重要。

(5)VaEA与基于分解的算法不同,它不需要任何特定的参考点或权值向量,而是利用了当前种群中不同非支配前沿解的信息。利用权值向量之间的角度来增强种群的多样性,并基于欧氏距离删除了较差解,以保证算法的收敛性。



### 3.2 测试问题

为了测试算法处理不规则 PF 的性能,本实验选择了 11 个具有不规则 PF 的测试问题,即 CDTLZ2<sup>[27]</sup>、DTLZ5~DTLZ7<sup>[28]</sup>、IDTLZ1~IDTLZ2<sup>[29]</sup>、SDTLZ1~SDTLZ2<sup>[30]</sup> 和 WFG1~WFG3<sup>[31]</sup>,问题的特征如表 1 所示,所有测试问题都考虑了 3、5、10、15 个目标。注意在 DTLZ7 和两个 DTLZ1 的变体问题上设置决策变量的数量分别为  $M+19$  和  $M+4$ 。对于其他测试问题,决策变量的数量为  $M+9$ 。本文为每个目标个数的问题设置了不同的种群数量  $N$  和最大迭代数  $\max FE$ ,当  $M$  为 3、5、8、10、15 时, $N$  和  $\max FE$  分别为 100、121、156、169、200 和 10 000、15 000、20 000、25 000、30 000。

### 3.3 性能标准

为了判断这些对比算法在处理有不规则 PF 的 MaOP 的优劣,采用一个反转世代距离的变体(称为  $IGD^+$ <sup>[32]</sup>)作为性能指标,它给出了一个种群的收敛性和多样性的全面量化。因为  $IGD^+$  不遵循 Pareto 支配标准,因此相对于原始反转世代距离(Inverted generational distance,  $IGD$ )<sup>[33]</sup> 与超体积(Hypervolume,  $HV$ )<sup>[34]</sup> 而言, $IGD^+$  的量化数值表达得更加准确。一般而言,一个算法的  $IGD^+$  值越小,说明该算法的性能越好。在计算  $IGD^+$  时,需要从真实 PF 中采样出均匀分布的参考点,本文从每个测试问题中采样超过 5 000 个参考点,并将解和参考点根据真实 PF 进行归一化。

### 3.4 参数设置

在参数设置上,所有算法均采用模拟二项式交叉和多项式变异来生成子代,交叉和变异算子分别设置为  $d_c=20$  和  $d_m=20$ 。交叉概率和突变概率分别设置为  $p_c=1$  和  $p_m=1/D$ ,其中  $D$  为决策变量的数量。GNG 的参数分别设置为  $\lambda=50$ ,  $\epsilon_b=0.2$ ,  $\epsilon_n=0.06$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha_{\max}=50$ ,  $d=0.995$ ,优势属性设置为  $PaE=60$ 。

### 3.5 结果与分析

本实验的测试环境为 PlatEMO<sup>[35]</sup> 平台,所有测试在 AMD 锐龙 R7-5700(3.20 GHz)上使用 MATLAB 2021a 进行。为了更直观地表现 MaOEA-EGNG 在各问题集上的性能,将测试问题分为 3 部分:DTLZ 问题、WFG 问题以及 DTLZ 的变体问题。实验结果中被深灰色处理的值为单个测试问题中  $IGD^+$  的最小值,被浅灰色处理的值为  $IGD^+$  第二小值,最终根据  $IGD^+$  值进行排名,获得第一名的次数为 First sum,获得前两名的次数为 First two sum,根据这两项指标来判断算法性能的优劣。

表 2 展示了 MaOEA-EGNG 与对比算法在 DTLZ 问题上经过 30 此独立计算的平均  $IGD^+$  值,不难看出 MaOEA-EGNG 获得最小  $IGD^+$  值的次数最多,总体性能排名为第一名。第二名为 PeEA,在 12 个测试问题上有 7 个问题获得了前两名,这是由于 PeEA 所使用的基于维度的密度估计方法,在高维问题中相较于其他对比算法有更强的稳定性。

表 3 展示了 MaOEA-EGNG 与对比算法在 WFG 问题上经过 30 此独立计算的平均  $IGD^+$  值, MaOEA-EGNG 的总体排名仍然是第一。但值得注意的是,算法在处理 WGF1 问题时的表现不佳,其

表 1 测试问题特征

Table 1 Characteristics of test questions

测试问题	目标数( $M$ )	决策变量( $D$ )	Pareto 前沿形状
DTLZ5	3, 5, 10, 15	$M+9$	退化的
DTLZ6	3, 5, 10, 15	$M+9$	退化的
DTLZ7	3, 5, 10, 15	$M+19$	断开的
CDTLZ2	3, 5, 10, 15	$M+9$	缩放不当
IDTLZ1	3, 5, 10, 15	$M+4$	倒置的
IDTLZ2	3, 5, 10, 15	$M+9$	倒置的
SDTLZ1	3, 5, 10, 15	$M+4$	缩放不当
SDTLZ2	3, 5, 10, 15	$M+9$	缩放不当
WFG1	3, 5, 10, 15	$M+9$	长尾的
WFG2	3, 5, 10, 15	$M+9$	断开的
WFG3	3, 5, 10, 15	$M+9$	退化的

表2 MaOEA-EGNG与对比算法在DTLZ测试问题上的平均IGD<sup>+</sup>值Table 2 Average IGD<sup>+</sup> values of MaOEA-EGNG and comparison algorithms on DTLZ testing problem

测试问题(M)	RVEA-iGNG	DEA-GNG	PeEA	MOEA/D-PaS	VaEA	MaOEA-EGNG
DTLZ5(3)	2.303 6e-3	2.174 1e-3	1.652 1e-2	1.030 1e-2	3.452 2e-3	1.497 8e-3
	(6.73e-5)-	(5.87e-5)-	(1.92e-3)-	(5.28e-4)-	(3.01e-4)-	(2.02e-4)
DTLZ5(5)	4.656 2e-2	8.897 3e-2	4.016 4e-2	4.481 9e-2	1.072 9e-1	2.224 0e-2
	(9.45e-3)-	(2.75e-2)-	(1.94e-2)-	(9.51e-3)-	(2.38e-2)-	(8.59e-3)
DTLZ5(10)	1.078 3e-1	1.723 3e-1	9.412 8e-2	2.768 4e+0	2.826 8e-1	3.990 3e-2
	(4.15e-2)-	(4.91e-2)-	(2.33e-2)-	(1.32e-1)-	(9.93e-2)-	(1.99e-2)
DTLZ5(15)	1.049 6e-1	2.085 0e-1	1.535 0e-1	2.763 2e+0	3.131 0e-1	5.544 8e-2
	(2.91e-2)-	(6.53e-2)-	(3.72e-2)-	(9.70e-2)-	(1.07e-1)-	(2.27e-2)
DTLZ6(3)	2.022 8e-3	2.556 6e-3	1.469 8e-2	9.125 6e-2	2.349 8e-3	1.180 5e-3
	(3.65e-5)-	(7.83e-4)-	(1.96e-3)-	(1.98e-1)-	(3.06e-4)-	(5.33e-4)
DTLZ6(5)	2.309 4e-1	3.515 9e-1	7.605 1e-2	1.261 0e-1	2.566 9e+0	1.355 8e-1
	(2.25e-1)-	(2.86e-1)-	(1.83e-1)+	(1.19e-1)+	(8.56e-1)-	(2.40e-1)
DTLZ6(10)	5.174 6e-1	6.899 1e-1	8.427 6e-1	1.003 7e+1	4.819 7e+0	2.605 5e-1
	(3.56e-1)-	(3.19e-1)-	(7.23e-1)-	(2.27e-1)-	(7.16e-1)-	(3.01e-1)
DTLZ6(15)	1.149 6e+0	8.726 5e-1	4.274 2e-1	9.617 3e+0	4.674 3e+0	3.221 9e-1
	(4.70e-1)-	(4.04e-1)-	(3.90e-1)=	(5.79e-1)-	(6.49e-1)-	(3.85e-1)
DTLZ7(3)	7.745 3e-2	5.564 0e-2	4.806 2e-2	2.516 4e+0	8.732 5e-2	4.840 0e-2
	(6.15e-2)-	(5.23e-2)-	(3.75e-3)+	(2.04e+0)-	(6.90e-2)-	(4.92e-2)
DTLZ7(5)	3.620 4e-1	2.631 5e-1	2.401 6e-1	2.939 1e+0	4.276 7e-1	2.281 5e-1
	(1.07e-1)-	(9.54e-2)=	(3.48e-2)=	(1.40e+0)-	(9.84e-2)-	(8.15e-2)
DTLZ7(10)	1.555 3e+0	6.047 8e+0	2.479 5e+0	2.197 8e+1	2.453 2e+0	1.135 5e+0
	(5.60e-1)-	(1.09e+0)-	(2.06e+0)-	(5.75e+0)-	(5.66e-1)-	(3.03e-1)
DTLZ7(15)	1.645 6e+1	2.213 8e+1	5.492 8e+0	5.470 4e+1	1.017 6e+1	1.138 5e+1
	(2.51e+0)-	(2.36e+0)-	(2.29e+0)+	(1.07e+1)-	(2.18e+0)=	(2.37e+0)
+ / - / =	0/12/0	0/11/1	3/7/2	1/11/0	0/11/1	-
First sum	0	0	3	0	0	9
First two sum	4	1	7	1	1	10

注:“+”、“-”和“=”分别表示实验数据明显地优于、劣于和统计上无差别与MaOEA-EGNG算法所得出的实验数据。

原因是在求解WFG1时,得到的PF通常是从一个微小区域扩展到整个PF,这导致了大部分输入信号堆积在其实区域,使得节点难以向外发散。由此得出,WFG1的这一特征对MaOEA-EGNG有较大的负面影响。

表4展示了MaOEA-EGNG与对比算法在DTLZ的变体问题上经过30次独立计算的平均IGD<sup>+</sup>值,其中MaOEA-EGNG在CDTLZ2与SDTLZ1~SDTLZ2共12个问题上占据统治地位,在IDTLZ1和IDTLZ2上除IDTLZ1(15)外MaOEA-EGNG的排名均达到了前两名的水平。令人意料之外的是,RVEA-iGNG的First sum参数为0,但在本次实验中获得了第二名,这是因为此类DTLZ变体问题的PF更加复杂,在目标空间搜索时,搜索进程会明显放慢,而RVEA-iGNG中使用的基于偏好生成GNG输入信号的方法,稳定了GNG的更新方向,因此该方法得到的种群多样性相较于其他对比算法更加优秀。

表3 MaOEA-EGNG与对比算法在WFG测试问题上的平均IGD<sup>+</sup>值Table 3 Average IGD<sup>+</sup> values of MaOEA-EGNG and comparison algorithms on WFG testing problem

测试问题(M)	RVEA-iGNG	DEA-GNG	PeEA	MOEA/D-PaS	VaEA	MaOEA-EGNG
WFG1(3)	5.811 1e-1	4.916 9e-1	<b>4.339 8e-1</b>	1.557 9e+0	5.491 2e-1	<b>4.813 7e-1</b>
	(9.75e-2)-	(9.90e-2)=	<b>(7.02e-2)+</b>	(4.55e-2)-	(5.04e-2)-	<b>(8.89e-2)</b>
WFG1(5)	1.365 7e+0	1.160 9e+0	<b>8.455 5e-1</b>	2.048 2e+0	1.313 1e+0	<b>1.103 6e+0</b>
	(1.35e-1)-	(1.13e-1)=	<b>(1.79e-1)+</b>	(1.18e-1)-	(1.14e-1)-	<b>(1.53e-1)</b>
WFG1(10)	2.092 6e+0	2.067 1e+0	<b>1.708 0e+0</b>	3.002 8e+0	2.399 2e+0	<b>1.502 2e+0</b>
	(2.22e-1)-	(2.47e-1)-	<b>(3.35e-1)-</b>	(8.77e-2)-	(1.81e-1)-	<b>(2.47e-1)</b>
WFG1(15)	3.133 3e+0	2.648 5e+0	<b>1.557 0e+0</b>	3.384 5e+0	3.132 8e+0	<b>2.613 0e+0</b>
	(2.98e-1)-	(2.61e-1)=	<b>(4.89e-1)+</b>	(1.35e-1)-	(1.99e-1)-	<b>(2.46e-1)</b>
WFG2(3)	7.492 3e-2	9.347 7e-2	<b>6.737 6e-2</b>	1.189 5e-1	9.023 3e-2	<b>5.302 1e-2</b>
	(1.02e-2)-	(8.78e-2)-	<b>(4.65e-3)-</b>	(2.35e-2)-	(6.48e-3)-	<b>(1.03e-2)</b>
WFG2(5)	1.824 1e-1	2.072 0e-1	<b>1.559 8e-1</b>	4.545 6e-1	2.494 7e-1	<b>1.559 8e-1</b>
	(2.64e-2)-	(1.98e-2)-	<b>(3.39e-2)=</b>	(1.22e-1)-	(1.82e-2)-	<b>(8.23e-3)</b>
WFG2(10)	5.263 1e-1	6.860 4e-1	<b>3.645 4e-1</b>	1.531 1e+1	5.332 5e-1	<b>3.202 9e-1</b>
	(9.18e-2)-	(1.79e-1)-	<b>(7.54e-2)-</b>	(3.16e+0)-	(5.31e-2)-	<b>(6.18e-2)</b>
WFG2(15)	1.173 9e+0	1.277 4e+0	1.116 8e+0	2.230 7e+1	<b>6.982 5e-1</b>	<b>6.880 3e-1</b>
	(2.06e-1)-	(3.85e-1)-	(2.22e-1)-	(5.41e+0)-	<b>(9.56e-2)=</b>	<b>(1.59e-1)</b>
WFG3(3)	1.191 4e-1	1.185 7e-1	1.199 1e-1	<b>1.142 4e-1</b>	1.445 5e-1	<b>6.307 6e-2</b>
	(1.49e-2)-	(1.25e-2)-	(2.03e-2)-	<b>(1.60e-2)-</b>	(1.64e-2)-	<b>(1.73e-2)</b>
WFG3(5)	3.215 9e-1	4.507 5e-1	3.325 8e-1	<b>2.970 7e-1</b>	5.392 7e-1	<b>2.732 0e-1</b>
	(4.24e-2)-	(1.02e-1)-	(6.14e-2)-	<b>(8.96e-2)=</b>	(7.77e-2)-	<b>(3.26e-2)</b>
WFG3(10)	8.934 3e-1	1.039 0e+0	<b>7.930 6e-1</b>	9.993 7e+0	1.083 8e+0	<b>5.698 5e-1</b>
	(1.36e-1)-	(2.06e-1)-	<b>(1.57e-1)-</b>	(7.87e-3)-	(1.64e-1)-	<b>(9.26e-2)</b>
WFG3(15)	1.106 6e+0	1.460 2e+0	1.347 5e+0	1.494 0e+1	<b>1.086 7e+0</b>	<b>1.033 3e+0</b>
	(9.91e-2)-	(2.75e-1)-	(2.51e-1)-	(5.78e-2)-	<b>(1.73e-1)=</b>	<b>(1.04e-1)</b>
+ / - / =	0/12/0	0/9/3	3/8/1	0/11/1	0/10/2	-
First sum	0	0	3	0	0	9
First two sum	0	0	8	2	2	12

注：“+”、“-”和“=”分别表示实验数据明显地优于、劣于和统计上无差别与MaOEA-EGNG算法所得出的实验数据。

表4 MaOEA-EGNG与对比算法在DTLZ变体问题上的平均IGD<sup>+</sup>值Table 4 Average IGD<sup>+</sup> values of MaOEA-EGNG and comparison algorithms on DTLZ variation problem

测试问题(M)	RVEA-iGNG	DEA-GNG	PeEA	MOEA/D-PaS	VaEA	MaOEA-EGNG
CDTLZ2(3)	<b>1.604 5e-2</b>	1.976 8e-2	2.624 8e-2	2.523 3e-2	3.312 0e-2	<b>1.280 8e-2</b>
	<b>(3.08e-4)-</b>	(1.75e-3)-	(2.63e-3)-	(1.25e-3)-	(1.69e-3)-	<b>(1.85e-3)</b>
CDTLZ2(5)	<b>2.283 1e-2</b>	3.182 5e-2	3.176 9e-2	8.332 0e-2	5.152 8e-2	<b>2.066 1e-2</b>
	<b>(8.55e-4)-</b>	(3.76e-3)-	(1.63e-3)-	(3.02e-2)-	(1.96e-3)-	<b>(1.16e-3)</b>
CDTLZ2(10)	<b>2.367 4e-2</b>	3.359 9e-2	2.725 5e-2	9.550 1e-1	4.804 8e-2	<b>1.865 7e-2</b>
	<b>(2.01e-3)-</b>	(7.97e-3)-	(5.19e-3)-	(3.10e-1)-	(9.46e-3)-	<b>(9.63e-4)</b>

续表

测试问题(M)	RVEA-iGNG	DEA-GNG	PeEA	MOEA/D-PaS	VaEA	MaOEA-EGNG
CDTLZ2(15)	2.719 0e-2	3.088 2e-2	3.774 5e-2	1.224 1e+0	5.205 2e-2	1.813 6e-2
	(3.97e-3)-	(8.54e-3)-	(7.02e-3)-	(3.82e-1)-	(1.41e-2)-	(2.05e-3)
IDTLZ1(3)	2.664 6e-1	1.581 6e-1	2.494 7e-1	2.019 8e+0	1.869 4e-1	2.262 9e-1
	(5.06e-1)=	(2.58e-1)=	(3.24e-1)=	(2.47e+0)-	(2.38e-1)=	(2.73e-1)
IDTLZ1(5)	5.077 5e-1	4.632 5e-1	4.507 5e-1	5.666 2e-1	4.541 9e-1	4.495 2e-1
	(7.60e-1)=	(4.29e-1)=	(5.12e-1)=	(5.93e-1)=	(4.93e-1)=	(7.63e-1)
IDTLZ1(10)	1.421 9e+0	1.093 7e+0	1.085 4e+0	1.851 2e+0	8.012 8e-1	9.540 8e-1
	(2.35e+0)=	(1.65e+0)=	(1.28e+0)=	(2.50e+0)=	(9.42e-1)+	(9.45e-1)
IDTLZ1(15)	3.385 5e+0	2.221 9e+0	1.538 4e+0	3.703 5e+0	1.253 3e+0	3.868 0e+0
	(3.36e+0)=	(2.58e+0)+	(1.30e+0)+	(3.64e+0)=	(9.87e-1)+	(4.29e+0)
IDTLZ2(3)	2.742 3e-2	3.012 7e-2	3.646 7e-2	4.289 1e-2	3.813 3e-2	1.954 4e-2
	(6.10e-4)-	(1.81e-3)-	(3.20e-3)-	(1.76e-3)-	(1.70e-3)-	(1.76e-3)
IDTLZ2(5)	1.083 3e-1	1.329 1e-1	1.110 5e-1	1.886 7e-1	1.385 4e-1	9.533 9e-2
	(3.87e-3)-	(1.11e-2)-	(3.62e-3)-	(3.97e-3)-	(2.87e-3)-	(4.77e-3)
IDTLZ2(10)	2.815 7e-1	2.858 5e-1	2.446 1e-1	3.479 1e-1	3.258 6e-1	2.521 7e-1
	(7.16e-3)-	(1.29e-2)-	(3.34e-3)+	(4.13e-3)-	(1.00e-2)-	(1.27e-2)
IDTLZ2(15)	4.323 7e-1	3.911 7e-1	3.299 0e-1	4.658 3e-1	4.001 2e-1	3.859 0e-1
	(2.96e-2)-	(4.82e-2)=	(3.44e-3)+	(8.91e-3)-	(1.11e-2)-	(1.09e-2)
SDTLZ1(3)	2.410 1e-1	2.485 3e-1	2.060 1e-1	4.986 0e+0	2.908 1e-1	1.344 9e-1
	(2.21e-1)-	(2.49e-1)-	(2.19e-1)-	(5.07e+0)-	(2.82e-1)-	(2.06e-1)
SDTLZ1(5)	9.458 2e-1	1.400 3e+0	8.641 3e-1	2.698 9e+1	1.805 2e+0	6.142 1e-1
	(1.01e+0)-	(8.73e-1)-	(9.13e-1)=	(4.98e+1)-	(1.13e+0)-	(6.08e-1)
SDTLZ1(10)	1.784 0e+1	8.712 4e+0	1.926 4e+1	5.705 2e+3	2.281 5e+1	3.849 0e+0
	(1.76e+1)-	(5.51e+0)-	(1.96e+1)-	(2.34e+3)-	(1.93e+1)-	(4.75e+0)
SDTLZ1(15)	6.011 4e+2	4.612 9e+2	5.851 6e+2	2.028 5e+5	6.690 3e+2	1.092 8e+2
	(6.21e+2)-	(3.73e+2)-	(3.82e+2)-	(9.82e+4)-	(5.20e+2)-	(1.26e+2)
SDTLZ2(3)	4.648 5e-2	4.846 1e-2	7.229 7e-2	6.108 4e-2	5.012 3e-2	3.608 5e-2
	(1.17e-3)-	(1.71e-3)-	(7.29e-3)-	(1.93e-3)-	(1.49e-3)-	(1.54e-3)
SDTLZ2(5)	2.805 8e-1	3.457 0e-1	3.684 7e-1	4.398 6e-1	2.946 1e-1	1.763 0e-1
	(6.82e-3)-	(2.89e-2)-	(7.81e-3)-	(1.13e-1)-	(1.35e-2)-	(5.02e-3)
SDTLZ2(10)	2.713 6e+0	1.120 1e+1	9.357 4e+0	4.192 9e+2	1.224 5e+0	7.117 1e-1
	(7.29e-1)-	(5.40e+0)-	(6.17e+0)-	(2.74e+1)-	(2.64e-1)-	(3.00e-2)
SDTLZ2(15)	4.004 9e+1	2.923 1e+2	2.699 5e+2	1.472 9e+4	1.559 6e+1	2.605 5e+0
	(2.27e+1)-	(1.55e+2)-	(1.43e+2)-	(1.85e+3)-	(6.04e+0)-	(1.64e+0)
+ / - / =	0/16/4	1/15/4	3/13/4	0/17/3	2/16/2	-
First sum	0	1	2	0	2	15
First two sum	9	3	5	0	4	19

注：“+”、“-”和“=”分别表示实验数据明显地优于、劣于和统计上无差别与MaOEA-EGNG算法所得出的实验数据。

### 3.6 联合度量指标的有效性评估

为验证所提出的联合度量指标的有效性,本节设计了消融实验来验证该指标的可行性。具体来说,对比算法去除了本文引入的SDE方法,而仅使用 $I_{\epsilon^+}$ 指标进行度量,将其命名为Nu-MaOEA-EGNG。测试问题选用了DTLZ与WFG测试套件中的DTLZ5~DTLZ7以及WFG1~WFG3,保证它们带有不规则PF的问题特性。表5展示了MaOEA-EGNG与Nu-MaOEA-EGNG在具有10个目标的DTLZ5~DTLZ7和WFG1~WFG3问题上的平均IGD<sup>+</sup>值。可以看出,使用联合度量指标后的算法在平均IGD值上要小于原算法,这表明本文所提出的联合度量指标在平衡种群收敛性与多样性方面有着促进作用。

表5 MaOEA-EGNG与Nu-MaOEA-EGNG在DTLZ和WFG问题上的平均IGD<sup>+</sup>值  
Table 5 Average IGD<sup>+</sup> values of MaOEA-EGNG and Nu-MaOEA-EGNG on DTLZ and WFG problems

测试问题(M)	Nu-MaOEA-EGNG	MaOEA-EGNG
DTLZ5(10)	1.564 6e-1 (4.08e-2)=	<b>1.377 2e-1 (5.35e-2)</b>
DTLZ6(10)	5.274 7e-1 (3.25e-1)-	<b>4.234 0e-1 (5.57e-1)</b>
DTLZ7(10)	1.130 5e+0 (2.27e-1)=	<b>1.116 3e+0 (3.13e-1)</b>
WFG1(10)	2.014 5e+0 (1.73e-1)-	<b>1.581 3e+0 (1.80e-1)</b>
WFG2(10)	1.390 3e+0 (7.99e-2)-	<b>1.045 3e+0 (5.65e-2)</b>
WFG3(10)	1.208 2e+0 (1.15e-1)-	<b>7.320 9e-1 (1.04e-1)</b>
+ / - / =	0/4/2	

注:“+”、“-”和“=”分别表示实验数据明显地优于、劣于和统计上无差别与MaOEA-EGNG算法所得出的实验数据。

## 4 结束语

本文提出了一种基于EGNG的MaOEA,称为MaOEA-EGNG,用于解决含有不规则的PF的MaOP。该算法将EGNG网络与一种基于联合度量指标结合将探索PF的拓扑信息与目标问题的优化分开处理。首先提出了一种联合度量指标,使用 $I_{\epsilon^+}$ 指标作为收敛标准与基于位移的密度估计方法作为多样标准,提高了算法在高维空间中的性能。其次,设计了一种增强的生长型神经气学习模型,使用非支配解来自适应更新EGNG。最后设计了一个基于自适应参考点的环境选择,使用EGNG的节点来自适应生成参考点,并对参考点进行指标度量,选出平衡收敛性与多样性的种群。实验结果表明,MaOEA-EGNG的性能要优于其他对比的方法。在未来的工作中,一方面,将针对现实的MaOP中不断增大的数据规模以及日益复杂的PF特征,对MaOEA-EGNG进行优化,并验证其在更复杂的不规则PF问题上的性能;另一方面,结合多目标优化问题的PF特征和应用场景的已知信息,构建基于GNG网络的新型学习框架,以探究其在现实MaOP中的可行性。

### 参考文献:

- [1] 谢承旺,王志杰,夏学文. 应用档案精英学习和反向学习的多目标进化算法[J]. 计算机学报, 2017, 40(3): 757-772.  
XIE Chengwang, WANG Zhijie, XIA Xuewen. Multi-objective evolutionary algorithm based on archive-elite learning and opposition-based learning[J]. Chinese Journal of Computers, 2017, 40(3): 757-772.
- [2] LIU Hailin, CHEN Lei, ZHANG Qingfu, et al. Adaptively allocating search effort in challenging many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(99): 433-448.
- [3] HE Zhenan, YEN G G, ZHANG Jun. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(2): 269-285.

- [4] IKEDA K I, KITA H, KOBAYASHI S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal? [C]//Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation.[S.l.]: [s.n.], 2001.
- [5] YANG Shengxiang, LI Miqing, LIU Xiaohui, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [6] YUAN Yuan, XU Hua, WANG Bo, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(1): 16-37.
- [7] TIAN Ye, CHENG Ran, ZHANG Xingyi, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation: A Publication of the IEEE Neural Networks Council, 2019(2): 23.
- [8] YUAN J, LIU H L, Yang S. An adaptive parental guidance strategy and its derived indicator-based evolutionary algorithm for multi-and many-objective optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2024, 84: 101449.
- [9] BADER J, ZITZLER E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [10] BEUME N, NAUJOKS B, EMMERICH M. SMS-EMOA: Multi-objective selection based on dominated hypervolume[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [11] LIANG Zhenping, LUO Tingting, HU Kaifeng, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(9): 4553-4566.
- [12] ZHANG Xingyi, TIAN Ye, JIN Yaochu. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 19(6): 761-776.
- [13] LI Miqing, YANG Shengxiang, LIU Xiaohui. Shift-based density estimation for pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(3): 348-365.
- [14] LIU Qi, JIN Y, HEIDERICH M, et al. An adaptive reference vector-guided evolutionary algorithm using growing neural gas for many-objective optimization of irregular problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(5): 2698-2711.
- [15] FRITZKE B. A growing neural gas network learns topologies[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 1994, 7: 625-632.
- [16] GU Fangqing, CHEUNG Yiuming. Self-organizing map-based weight design for decomposition-based many-objective evolutionary algorithm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 22(2): 211-225.
- [17] ZHOU Aimin, QU Boyang, LI Hui, et al. Multi-objective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(1): 32-49.
- [18] ZITZLER E, LAUMANN M, THIELE L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm[J]. TIK Report, 2001, 103: 95-100.
- [19] JIANG Shouyong, YANG Shengxiang. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multi-objective and many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(3): 329-346.
- [20] LI Li, YEN G G, SAHOO A, et al. On the estimation of Pareto front and dimensional similarity in many-objective evolutionary algorithm[J]. Information Sciences, 2021, 563: 375-400.
- [21] De FARIAS L R C, ARAÚJO A F, R. A decomposition-based many-objective evolutionary algorithm updating weights when required[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2022, 68: 100980.
- [22] 王改革,李奎超,李贵.基于部分支配关系的双准则超多目标优化算法[J].南昌工程学院学报, 2022, 41(6): 1-11.  
WANG Gaige, LI Kuichao, LI Gui. A bi-criteria many-objective optimization algorithm based on partial dominance relations [J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2022, 41(6): 1-11.
- [23] ZITZLER E, KÜNZLI S. Indicator-based selection in multi-objective search[C]//Proceedings of International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004: 832-842.
- [24] LIU Y, ISHIBUCHI H, MASUYAMA N, et al. Adapting reference vectors and scalarizing functions by growing neural gas to handle irregular Pareto fronts[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 24(3): 439-453.
- [25] WANG Rui, ZHANG Qingfu, ZHANG Tao. Decomposition-based algorithms using Pareto adaptive scalarizing methods[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(6): 821-837.

- [26] XIANG Yi, ZHOU Yuren, LI Miqing, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 21(1): 131-152.
- [27] DEB K, JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(4): 577-601.
- [28] DEB K, THIELE L, LAUMANN S M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization[C]// *Proceedings of Evolutionary multi-objective optimization: Theoretical advances and applications*. London: Springer, 2005: 105-145.
- [29] JAIN H, DEB K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, Part II : Handling constraints and extending to an adaptive approach[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(4): 602-622.
- [30] YING Weiqin, HUANG Junjie, WU Yu, et al. Multi-dimensional tree guided efficient global association for decomposition-based evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 531: 97-118.
- [31] HUBAND S, HINGSTON P, BARONE L, et al. A review of multi-objective test problems and a scalable test problem toolkit [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [32] ISHIBUCHI H, MASUDA H, TANIGAKI Y, et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance[C]// *Proceedings of Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 8th International Conference*. Guimarães, Portugal: Springer International Publishing, 2015: 110-125.
- [33] SUN Y, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(2): 173-187.
- [34] 王学武, 魏建斌, 周昕, 等. 一种基于超体积指标的多目标进化算法[J]. *华东理工大学学报(自然科学版)*, 2020, 46(6): 780-791.  
WANG Xuewu, WEI Jianbin, ZHOU Xin, et al. A multi-objective evolution algorithm based on hypervolume index[J]. *Journal of East China University of Science and Technology*, 2020, 46(6): 780-791.
- [35] TIAN Ye, CHENG Ran, ZHANG Xingyi, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization [J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.

#### 作者简介:



薛明(1997-),男,硕士研究生,研究方向:进化算法、群体智能算法,E-mail:xm-fqzy@126.com。



王鹏(1987-),通信作者,男,博士,讲师,研究方向:进化计算、服务计算和群体智能算法,E-mail: to-wangpeng@163.com。



童向荣(1975-),男,博士,教授,研究方向:计算机科学、智能信息处理和社交网络。

(编辑:刘彦东)