

基于直觉模糊相似关系的三支决策模型

吕明明^{1,2}, 薛占熬^{1,2}, 杨梦丽^{1,2}, 辛现伟^{1,2}, 孙林^{1,2}

(1. 河南师范大学计算机与信息工程学院, 新乡 453000; 2. 智慧商务与物联网技术河南省工程实验室, 新乡 453000)

摘要: 针对一些直觉模糊相似关系使直觉模糊集中对象间的相似度过于集中或者相异度过高, 导致不合理的分类结果的问题, 以及在构造直觉模糊相似关系时, 对象间的相似度和相异度容易受到不重要属性条件信息影响的问题, 本文在直觉模糊集和可能性理论基础上, 提出一种基于直觉模糊相似关系的三支决策模型。首先, 给出可能性测度和必要性测度的定义, 结合 Hausdorff 度量, 构造一种距离公式, 并证明其性质, 定义了直觉模糊集中对象间的相似度和相异度, 构造了新的直觉模糊相似关系; 然后定义了直觉模糊相似关系下的 (λ_1, λ_2) -截集及其直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类, 并进一步求出目标集的正域、负域和边界域; 最后通过 UCI 数据集和实例验证了该模型的合理性和有效性。

关键词: 直觉模糊相似关系; 可能性理论; 三支决策; 截集; 相似度; 相异度

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

Three-Way Decision Model Based on Intuitionistic Fuzzy Similarity Relation

LYU Mingming^{1,2}, XUE Zhan'ao^{1,2}, YANG Mengli^{1,2}, XIN Xianwei^{1,2}, SUN Lin^{1,2}

(1. College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453000, China; 2. Engineering Lab of Intelligence & Internet of Things of Henan Province, Xinxiang 453000, China)

Abstract: Intuitionistic fuzzy similarity relations cause the similarity degree between objects in the intuitionistic fuzzy set too concentrated or the dissimilarity degree too high, leading to unreasonable classification results, and when constructing intuitionistic fuzzy similarity relation, the similarity degree and dissimilarity degree between objects are vulnerable to unimportant attributes. Therefore, a three-way decision model based on intuitionistic fuzzy similarity relation is proposed according to the intuitionistic fuzzy sets and the possibility theory. Firstly, the definitions of possibility measure and necessity measure are given. Combining with the Hausdorff measure, a distance formula is constructed and its properties are proved. The similarity degree and dissimilarity degree between objects in intuitionistic fuzzy sets are defined, and a new intuitionistic fuzzy similarity relationship is constructed. Then, the (λ_1, λ_2) -cut set under intuitionistic fuzzy similarity relation and the similar class under intuitionistic fuzzy (λ_1, λ_2) -cut set are defined, and the positive, negative and boundary fields of target set are further obtained. Finally, the rationality and effectiveness of the proposed model are verified through UCI data sets and examples.

Key words: intuitionistic fuzzy similarity relation; possibility theory; three-way decision; cut set; similarity

基金项目: 国家自然科学基金(62076089, 61976082); 河南省科技攻关项目(182102210078, 232102210077); 中外语言交流合作中心国际中文教育研究课题(23YH26C)。

收稿日期: 2023-06-20; **修订日期:** 2023-09-18

degree; dissimilarity degree

引言

1986年 Atanassov^[1]提出的直觉模糊集具有隶属度和非隶属度的特点,弥补了模糊集的不足,成为不确定性理论研究的热点。20世纪80年代,Zadeh^[2]提出了可能性理论,建立模糊推理和模糊决策模型,能够较准确地表示模糊信息的不确定性。随后,众多学者对可能性理论展开研究,如Chen等^[3]讨论了可能性测度和必要性测度刻画泛积分的实用性;Garai等^[4]研究了可能性测度和必要性测度用于多目标线性分式库存问题;Gao等^[5]研究了必要性测度处理带模糊系数的集合包容约束,用扩展的必要性测度应用于带模糊系数的线性规问题,较好地表达了决策者对约束的鲁棒性和满足性之间的权衡要求。

用相似度来度量两个模糊集信息量是一个重要的研究内容,类似地,用直觉模糊相似度度量两个直觉模糊集,也是重要的研究方向之一。Pan等^[6]针对一些现有的直觉模糊相似度未考虑犹豫度对隶属度和非隶属度的影响,使测量结果出现了违反直觉的情况,提出了一种新的直觉模糊相似度,并利用其解决专家评估和数据集环境下的分类和聚类问题;Gohain等^[7]对于一些线性的距离,当犹豫度相同时,不能区分直觉模糊集,因此在距离中引入交叉评价因子,并利用距离生成新的相似度用来解决决策问题;Gupta等^[8]在处理决策问题时,不能得到一致和合理的分类结果,提出了一种新的直觉模糊相似度用来对比直觉模糊集,并把直觉模糊相似度与知识测度相结合,获得直觉模糊集更多的信息量,使分类结果更加准确。

模糊相似关系是模糊集推广中一个重要的研究方向,可以用模糊集之间的相似度进行构造,如Cha^[9]在高斯核相似度的基础上,提出了一种新的相似度,并构造了相似关系,解决了多媒体相似性排序的问题;Yang等^[10]对于不完备的单值中性信息表,基于 θ -弱相似度量,提出了一种新的相似关系,并通过贝叶斯决策理论和相似关系,构造了三支决策模型,利用该模型处理不确定和不一致的信息。直觉模糊相似关系的构造是直觉模糊集理论推广应用需要解决的一个重要问题,能够表示两个对象具有相似性关系的程度和差异性的程度。路艳丽等^[11]针对直觉模糊相似关系的构造问题,从直觉模糊集相异度和相似度的角度研究了相似关系的构造方法,此方法克服了主观构造的缺陷。

基于经典粗糙集模型和决策粗糙集模型,Yao^[12]在2010年提出了三支决策模型,为粗糙集理论中的决策规则提供了一种新的解释。三支决策的主要思想是根据一组准则将一个论域划分为3个不相交的部分,即正域、负域和边界域,分别对应于接受、拒绝和延迟决策。三支决策是一种符合人类认知的决策模式,已经得到了广泛而深入的研究,如Guo等^[13]提出一种三支决策结果评价模型,讨论结果对不同决策行动的反馈和指导作用;Qian等^[14]针对模糊决策信息系统,提出了基于密度邻域的粒化方法,构建了代价敏感的三支决策模型,该模型能够以更低的测试代价获得更好的分类性能;Mondal等^[15]将三支决策与不完备信息系统中的多属性决策相结合,提出了一种新的三支多属性决策模型,该模型不仅降低了风险损失函数的主观性,而且考虑了决策者的心理和风险态度,使决策结果更加合理;Wang等^[16]为了描述决策者不同类型的风险偏好,结合前景理论和后悔理论,提出了基于复合风险偏好和概率语言项集的三支决策模型,该模型考虑了决策者的心理因素和风险态度,适合分析决策者的态度问题。

文献[17]解释了可能性测度和相似度之间的关系,在可区分的模糊集中,可能性测度和相似度是单调相关的,可能性测度可以解释两个集合重叠的程度,相似度可以描述两个模糊集之间的关系。可能性相似度目的是降低模糊集之间的相似性,突出差异性来提高可区分能力,并且克服了使用相似度

所造成的计算不精确和效率低下的问题。以上文献关于可能性相似度的研究,对于可能性相似度与直觉模糊集相结合的文章研究比较少,本文把可能性相似度与直觉模糊集相结合,定义直觉模糊可能性相似度,用隶属度和非隶属度来描述两个集合的相关性,从而更好地区分两个模糊集合。

上述研究中,存在3个问题:(1)直觉模糊相似关系对于直觉模糊集中对象间的相似度过于集中或者相异度过高,分辨能力比较差;(2)在构造直觉模糊相似关系时,对象间的相似度和相异度容易受到不重要属性条件信息的影响;(3)一些三支决策的阈值 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 都是主观选取的,决策结果容易受到人为主观影响。针对这些问题,本文提出基于直觉模糊相似关系的三支决策模型,利用构造相似度和相异度引入到直觉模糊相似关系中,得到直觉模糊关系下的 (λ_1, λ_2) -截集及其直觉模糊集 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类。之后,在进行决策划分时,采用了文献[18]的截集相似类划分的方法,而文献[18]主要是体现直觉模糊相似度中,隶属度和非隶属度的实践语义,而本文把直接模糊相似度和可能性理论相结合,研究直觉模糊集合的相关程度,并通过基于直觉模糊相似关系的三支决策模型来确定阈值 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$,减少了主观影响,且对每个属性条件进行加权,提高了重要条件属性的比重,从而更好地体现模糊集合之间的可区分性。

1 基础知识

1.1 直觉模糊集

定义 1^[19] 设 U 为一个有限的论域,则 U 上的直觉模糊集定义为 $S = \{ \langle x, \mu_S(x), \nu_S(x) \rangle \mid x \in U \}$, 其中 $\mu_S(x): U \rightarrow [0, 1]$ 表示 S 的隶属度, $\nu_S(x): U \rightarrow [0, 1]$ 表示 S 的非隶属度。对于 $\forall x \in U$, 有 $0 \leq \mu_S(x) + \nu_S(x) \leq 1$, $\pi_S(x)$ 为 S 的犹豫度, $\pi_S(x) = 1 - \mu_S(x) - \nu_S(x)$, 且 $\pi_S(x) \in [0, 1]$ 。为方便起见, 当 $\langle x, \mu_S(x), \nu_S(x) \rangle$ 的隶属函数和非隶属函数是实数时用 (μ_S, ν_S) 表示, 且称 (μ_S, ν_S) 为直觉模糊数。

定义 2^[19] 设 S, T 为论域 U 上任意 2 个直觉模糊集合, 则 S, T 的包含关系和运算如下:(1) $S \subseteq T$ 当且仅当 $\forall x \in U, \mu_S(x) \leq \mu_T(x)$ 且 $\nu_S(x) \geq \nu_T(x)$;(2) $S \cup T = \{ \langle x, \mu_S(x) \vee \mu_T(x), \nu_S(x) \wedge \nu_T(x) \rangle \mid \forall x \in U \}$;(3) $S \cap T = \{ \langle x, \mu_S(x) \wedge \mu_T(x), \nu_S(x) \vee \nu_T(x) \rangle \mid \forall x \in U \}$;(4) $S^c = \{ \langle x, \nu(x), \mu(x) \rangle \mid x \in R \}$ 。

定义 3^[20] 直觉模糊相似度 $\text{sim}(S, T)$ 满足以下性质:

(1) $0 \leq \text{sim}(S, T) \leq 1, 0 \leq S \leq 1, 0 \leq T \leq 1, S + T \leq 1$;(2) $\text{sim}(S, T) = (1, 0)$ 且 $S = T$;(3) $\text{sim}(S, T) = \text{sim}(T, S)$;(4) 若 $S \subseteq T \subseteq W$, 则 $\text{sim}(S, W) \leq \min(\text{sim}(S, T), \text{sim}(T, W))$ 。

定义 4^[20] 令四元组 $\text{IIS} = (U, AT, V, f)$ 为直觉模糊信息系统, U 为非空有限的论域表示所有对象的集合, AT 为属性 a 非空有限集合, V 为属性的值域范围, $V = \{ \langle x, \mu_a(x), \nu_a(x) \rangle \mid \forall x \in U, 0 \leq \mu_a(x) + \nu_a(x) \leq 1, \mu_a(x) \in [0, 1], \nu_a(x) \in [0, 1] \}$, V_a 为属性 a 的隶属度和非隶属值域集合 ($V_a \in V$), $f: U \times AT \rightarrow V$ 为信息函数, 对于 $\forall a \in AT, x \in U$ 有 $f(x, a) \in V_a$ 。

定义 5^[11] 设 U 和 V 为有限论域, 定义在直积空间 $U \times V$ 上的直觉模糊子集 I 称为从 U 到 V 之间的二元直觉模糊关系, 记为

$$I(x, y) = \{ \mu_I(x, y), \nu_I(x, y) \mid x \in U, y \in V \}, \forall x \in U, y \in V, \text{IFR}(U \times V)$$

其中: $\mu_I: U \times V \rightarrow [0, 1], \nu_I: U \times V \rightarrow [0, 1]$ 满足 $0 \leq \mu_I(x, y) + \nu_I(x, y) \leq 1$, $\text{IFR}(U \times V)$ 表示 $U \times V$ 上的直觉模糊关系的全体。

1.2 三支决策理论

定义 6^[12,21] 基于贝叶斯决策过程, Yao 提出了三支决策模型, 假设有两个状态, 属于 X 和不属于 X^c , 由 $\Omega = \{X, X^c\}$ 表示, 定义行动集合 $K = \{a_P, a_B, a_N\}$, a_P, a_B, a_N 分别表示 $x \in \text{POS}(X)$ 、 $x \in \text{BND}(X)$ 、 $x \in \text{NEG}(X)$, $\text{POS}(X)$ 、 $\text{BND}(X)$ 和 $\text{NEG}(X)$ 分别表示接受决策, 延迟决策和拒绝决策。假设 $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ 分别表示 $x \in X$ 时选择的行动 a_P, a_B, a_N 的损失函数。类似地, 假设 $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 分别表示 $x \in X^c$ 时选择 3 种行动的损失函数。不同的行动对应损失函数如表 1 所示。预期损失的计算公式为 $R(a_P|[x]_R) = \lambda_{PP}P(X|[x]_R) + \lambda_{PN}P(X^c|[x]_R)$; $R(a_B|[x]_R) = \lambda_{BP}P(X|[x]_R) + \lambda_{BN}P(X^c|[x]_R)$; $R(a_N|[x]_R) = \lambda_{NP}P(X|[x]_R) + \lambda_{NN}P(X^c|[x]_R)$ 。

从贝叶斯决策过程获得的最小风险规则如下:

接受规则(P1): 若 $R(a_P|[x]_R) \leq R(a_B|[x]_R)$ 且 $R(a_P|[x]_R) \leq R(a_N|[x]_R)$, 则 $x \in \text{POS}(X)$;

拒绝规则(N1): 若 $R(a_B|[x]_R) \leq R(a_P|[x]_R)$ 且 $R(a_B|[x]_R) \leq R(a_N|[x]_R)$, 则 $x \in \text{NEG}(X)$;

延迟规则(B1): 若 $R(a_N|[x]_R) \leq R(a_P|[x]_R)$ 且 $R(a_N|[x]_R) \leq R(a_B|[x]_R)$, 则 $x \in \text{BND}(X)$ 。

接受规则(P2): 如果 $P(X|[x]_R) \geq \bar{\alpha}$, 则 $x \in \text{POS}(X)$;

延迟规则(B2): 如果 $\bar{\beta} < P(X|[x]_R) < \bar{\alpha}$, 则 $x \in \text{BND}(X)$;

拒绝规则(N2): 如果 $P(X|[x]_R) \leq \bar{\beta}$, 决策为 $x \in \text{NEG}(X)$ 。

其中, $\bar{\alpha} = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$, $\bar{\beta} = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}$ 。

1.3 可能性理论

定义 7^[22] 设 Nec 表示必要性测度, Plt 表示可能性测度, $\forall S \in U$, 则 Nec 和 Plt 满足

(1) $\text{Nec}(S) = 1 - \text{Plt}(S^c)$, 其中 S^c 表示 S 的补集;

(2) $\text{Plt}(\bigcup_i S_i) = \sup_i (\text{Plt}(S_i))$ ($i = 1, 2, \dots$), $\text{Nec}(\bigcap_i S_i) = \inf_i (\text{Nec}(S_i))$ ($i = 1, 2, \dots$);

(3) $0 \leq \text{Nec}(S) \leq 1, 0 \leq \text{Plt}(S) \leq 1$;

(4) $\text{Plt}(S) \geq \text{Nec}(S)$ 。

2 基于可能性测度的直觉模糊相似度

本节将可能性理论和直觉模糊相似度相结合, 定义直觉模糊可能性相似度。

定义 8 设 U 为非空有限论域, S 为 U 上的直觉模糊集, $\forall x \in U$, S 中的元素 x 的必要性和可能性测度分别为: $\text{Nec}_S(x) = \inf \mu_S(x)$, $\text{Plt}_S(x) = \sup(1 - \nu_S(x))$

定理 1 在直觉模糊集上, 必要性测度 Nec 和可能性测度 Plt 具有以下性质

(1) 有界性: $\forall S \in U, 0 \leq \text{Nec}_S(x) \leq \text{Plt}_S(x) \leq 1$ 。

(2) 单调性: $\forall S, T \in U, S \subseteq T$, 有: $\text{Nec}_S(x) \leq \text{Nec}_T(x), \inf \mu_S(x) \leq \inf \mu_T(x), \text{Plt}_S(x) \leq \text{Plt}_T(x), \sup(1 - \nu_S(x)) \leq \sup(1 - \nu_T(x))$ 。

(3) 可加性: $\forall S, T \in U$, 有: $\text{Plt}_S(x) \cup \text{Plt}_T(x) = \sup(1 - \nu_S(x)) \vee \sup(1 - \nu_T(x))$, $\text{Nec}_S(x) \cap \text{Nec}_T(x) = \inf(\mu_S(x)) \wedge \inf(\mu_T(x))$ 。

表 1 不同行动对应的损失函数

Table 1 Loss functions corresponding to different actions

类别	X	X^c
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

(4) $Nec_S(x) = 1 - Plt_{S^c}(x), Plt_S(x) = 1 - Nec_{S^c}(x)$ 。

证明:(1),(2)和(3)根据定义容易证明,略。这里仅给出(4)的证明过程,证明如下:

$$Plt_{S^c}(x) = 1 - Nec_S(x) = 1 - \inf \mu_S(x) = \sup(1 - \mu_S(x)), \quad Nec_S(x) = \inf \mu_S(x) = 1 - \sup(1 - \mu_S(x)) = 1 - Plt_{S^c}(x)$$

同理, $Plt_S(x) = 1 - Nec_{S^c}(x)$,故 $Nec_S(x), Plt_S(x)$ 是对偶测度。

用所提出的必要性测度和可能性测度构造直觉模糊集上的可能性区间(Possibility necessity interval, PNI),使用Hausdorff度量定义直觉模糊集上两个PNI之间的距离,然后导出PNI之间的相似度。

Hausdorff度量定义为

$$H(E, F) = \max(d(E, F), d(F, E)) \tag{1}$$

对于任意两个区间 $E = [e_1, e_2]$ 和 $F = [f_1, f_2]$, Hausdorff度量为

$$H(E, F) = \max\{|e_1 - f_1|, |e_2 - f_2|\} \tag{2}$$

定义 9 设 S 和 T 是直觉模糊集 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的两个直觉模糊集,对于 $x_i \in U$, 定义 x_i 的 PNI 为

$$PNI_S(x_i) = [Nec_S(x_i), Plt_S(x_i)] = [\inf \mu_S(x_i), \sup(1 - \nu_S(x_i))] \tag{3}$$

$$PNI_T(x_i) = [Nec_T(x_i), Plt_T(x_i)] = [\inf \mu_T(x_i), \sup(1 - \nu_T(x_i))] \tag{4}$$

$PNI_S \in [0, 1], PNI_T \in [0, 1], PNI_S = \{PNI_S(x_i) : x_i \in U\}, PNI_T = \{PNI_T(x_i) : x_i \in U\}$, PNI_S 和 PNI_T 之间的 Hausdorff 距离为

$$d_{PNH}(PNI_S, PNI_T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(PNI_S(x_i), PNI_T(x_i)) \tag{5}$$

定理 2 设 PNI_S, PNI_T, PNI_W 为可能性区间, S, T, W 为直觉模糊集 U 上 3 个子集, d 为任意两个可能性区间的距离,且满足以下性质

- (1) 有界性: $0 \leq d(PNI_S, PNI_T) \leq 1$;
- (2) $d(PNI_S, PNI_T) = 0$, 则 $PNI_S = PNI_T$;
- (3) 对称性: $d(PNI_S, PNI_T) = d(PNI_T, PNI_S)$;
- (4) $PNI_S \leq PNI_T \leq PNI_W$, 则 $d(PNI_S, PNI_T) \leq d(PNI_S, PNI_W), d(PNI_T, PNI_W) \leq d(PNI_S, PNI_W)$;
- (5) 三角不等式:任意的 PNI_S, PNI_T, PNI_W , 有 $d(PNI_S, PNI_W) \leq d(PNI_S, PNI_T) + d(PNI_T, PNI_W)$ 。

证明:(1),(2)和(3)根据定义容易证明,而(5)可由(4)证明,所以,(1),(2),(3)和(5)证明略。这里仅给出(4)的证明过程,证明如下:

(4) 设 $PNI_S \leq PNI_T \leq PNI_W$, 那么 $H(PNI_S(x_i), PNI_W(x_i)) = \max\{|Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)|, |Nec_S(x_i) - Nec_W(x_i)|\}$; $H(PNI_T(x_i), PNI_W(x_i)) = \max\{|Plt_T(x_i) - Plt_W(x_i)|, |Nec_T(x_i) - Nec_W(x_i)|\}$; $H(PNI_S(x_i), PNI_T(x_i)) = \max\{|Plt_S(x_i) - Plt_T(x_i)|, |Nec_S(x_i) - Nec_T(x_i)|\}$ 。

则 $Plt_S(x_i) \leq Plt_T(x_i) \leq Plt_W(x_i), Nec_S(x_i) \geq Nec_T(x_i) \geq Nec_W(x_i)$, 有以下 4 种情况:

(a) 若 $|Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)| \geq |Nec_S(x_i) - Nec_W(x_i)|$, 则 $H(PNI_S(x_i), PNI_W(x_i)) = |Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)|$, $|Nec_S(x_i) - Nec_T(x_i)| \leq |Nec_S(x_i) - Nec_W(x_i)| \leq |Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)|$, $|Plt_S(x_i) - Plt_T(x_i)| \leq \max\{|Plt_S(x_i) - Plt_T(x_i)|, |Plt_T(x_i) - Plt_W(x_i)|\} \leq |Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)|$, 得: $H(PNI_S(x_i), PNI_T(x_i)) \leq H(PNI_S(x_i), PNI_W(x_i)), H(PNI_T(x_i), PNI_W(x_i)) \leq H(PNI_S(x_i), PNI_W(x_i))$, 故 $d_{PNH}(PNI_S, PNI_T) \leq d_{PNH}(PNI_S, PNI_W), d_{PNH}(PNI_T, PNI_W) \leq d_{PNH}(PNI_S, PNI_W)$ 。

(b) 若 $|Plt_S(x_i) - Plt_W(x_i)| \leq |Nec_S(x_i) - Nec_W(x_i)|$, 由 (a) 同理可证, $d_{PNH}(PNI_S, PNI_T) \leq$

$d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_W), d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_T, \text{PNI}_W) \leq d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_W)$

(c) 若 $|\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)| \geq |\text{Nec}_S(x_i) - \text{Nec}_W(x_i)|$, 则 $H(\text{PNI}_S(x_i), \text{PNI}_W(x_i)) = |\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)| = |\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_T(x_i) + \text{Plt}_T(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)| \leq |\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_T(x_i)| + |\text{Plt}_T(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)| = \max\{|\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_T(x_i)|, |\text{Nec}_S(x_i) - \text{Nec}_T(x_i)|\} + \max\{|\text{Plt}_T(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)|, |\text{Nec}_T(x_i) - \text{Nec}_W(x_i)|\} = H(\text{PNI}_S(x_i), \text{PNI}_T(x_i)) + H(\text{PNI}_T(x_i), \text{PNI}_W(x_i)) = d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) + d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_T, \text{PNI}_W)$ 。

(d) 若 $|\text{Plt}_S(x_i) - \text{Plt}_W(x_i)| \leq |\text{Nec}_S(x_i) - \text{Nec}_W(x_i)|$, 由 (c) 同理可证, $H(\text{PNI}_S(x_i), \text{PNI}_W(x_i)) \leq H(\text{PNI}_S(x_i), \text{PNI}_T(x_i)) + H(\text{PNI}_T(x_i), \text{PNI}_W(x_i)) = d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) + d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_T, \text{PNI}_W)$, 故 $d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_W) \leq d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) + d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_T, \text{PNI}_W)$ 。

综上, $\text{PNI}_S \leq \text{PNI}_T \leq \text{PNI}_W$, 得 $d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_W) \geq \max\{d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T), d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_T, \text{PNI}_W)\}$ 。

定义 10 设 $\text{PNI}_S, \text{PNI}_T$ 为两个可能性区间, S 和 T 为直觉模糊集 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的两个直觉模糊集, 对于每个 $x_i \in U$, 权重为 $w_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 并且 $0 \leq w_i \leq 1$, PNI_S 和 PNI_T 之间的加权 Hausdorff 距离为

$$d_{w\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) = \sum_{i=1}^n w_i H(\text{PNI}_S(x_i), \text{PNI}_T(x_i)) \quad (6)$$

且 $\text{PNI}_S, \text{PNI}_T$ 两个可能性区间的相似性度量为

$$s_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) = 1 - d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T) \quad (7)$$

定义 11 设 $C_p: x \rightarrow [0, 1]$ 和 $C_n: x \rightarrow [0, 1]$ 为两个集函数, $\forall S \in U$, 若满足

$$(1) C_p(S) = 1 \text{ 和 } C_n(S) = 0 \quad (8)$$

$$(2) \begin{cases} C_p(S) = \frac{1}{2} (0.5 + \text{Plt}_S(x) - \text{Plt}_{S^c}(x)) \\ C_n(S) = \frac{1}{2} (0.5 - \text{Nec}_S(x) + \text{Nec}_{S^c}(x)) \end{cases} \quad (9)$$

称序偶对 (C_p, C_n) 为直觉模糊可信度。

3 直觉模糊可能性相似关系

第 2 节中利用可能性测度和必要性测度, 运用 Hausdorff 度量, 定义了直觉模糊集 S 和 T 距离公式 $d_{\text{PNH}}(\text{PNI}_S, \text{PNI}_T)$, 并证明了其性质。本节根据距离概念定义论域 U 中对象 x 和 y 在条件属性集下的相似度 $SI_a(x, y)$ 和相异度 $DI_a(x, y)$, 并且构造了 x 和 y 的直觉模糊相似关系。

定义 12 令 $\text{IIS} = (U, AT, V, f)$ 为直觉模糊信息系统, U 为有限的论域, AT 为属性 a 非空有限集合, V 为属性的值域范围, $f: U \times AT \rightarrow V$ 为信息函数, V_a 为属性 a 的隶属度和非隶属值域集合 ($V_a \in V$), 设 $x = \{f(x, a) \mid a \in AT\}$ 和 $y = \{f(y, a) \mid a \in AT\}$ 为对象 x, y 在条件属性集 AT 下的直觉模糊集, $f(x, a)$ 和 $f(y, a)$ 为对象 x, y 在条件属性 a 下的直觉模糊值, 则 x 和 y 关于条件属性集 AT 的直觉模糊相似度 $SI_a(x, y)$ 和相异度 $DI_a(x, y)$ 分别为

$$SI_a(x, y) = \begin{cases} 1 & f(x, a) = f(y, a) \\ \min\{1 - |\text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a)|, 1 - |\text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a)|\} & f(x, a) \neq f(y, a) \end{cases} \quad (10)$$

$$DI_a(x, y) = \begin{cases} 0 & f(x, a) = f(y, a) \\ \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} & f(x, a) \neq f(y, a) \end{cases} \quad (11)$$

定理 3 直觉模糊相似度 $SI_a(x, y)$ 满足如下性质

(1) $0 \leq SI_a(x, y) \leq 1$; (2) 若 $SI_a(x, y) = 1$, 则 $x = y$; (3) $SI_a(x, y) = SI_a(y, x)$; (4) 若 x, y, z 为论域 U 的 3 个对象, 且 $x \subseteq y \subseteq z$, 则 $SI_a(x, z) \leq \min\{SI_a(x, y), SI_a(y, z)\}$ 。

证明: 根据定义 8、9, 容易证明 (1)、(2) 和 (3)。这里仅给出 (4) 的证明过程。

(4) 由定义 8、9 可知, $d_{xyH}(\text{PNI}_x, \text{PNI}_y) \leq d_{xzH}(\text{PNI}_x, \text{PNI}_z), d_{yzH}(\text{PNI}_y, \text{PNI}_z) \leq d_{xzH}(\text{PNI}_x, \text{PNI}_z)$, 得

$$\begin{aligned} \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} &\leq \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_z(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_z(a) \right| \right\}, \\ \max\left\{\left| \text{Plt}_y(a) - \text{Plt}_z(a) \right|, \left| \text{Nec}_y(a) - \text{Nec}_z(a) \right| \right\} &\leq \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_z(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_z(a) \right| \right\}, \end{aligned}$$

所以, $DI_a(x, z) \geq \max\{DI_a(x, y), DI_a(y, z)\}, SI_a(x, z) \leq \min\{SI_a(x, y), SI_a(y, z)\}$ 。

定理 4 令 $IIS = (U, AT, V, f)$ 为直觉模糊信息系统 x 和 y 为论域 U 中的任意两个对象, $\forall a \in AT$, $SI_a(x, y)$ 和 $DI_a(x, y)$ 分别为对象 x 和 y 关于属性 a 的相似度和相异度。 $SD_a(x, y) = (SI_a(x, y), DI_a(x, y))$, 则为对象 x 和 y 关于属性 a 的直觉模糊相似关系。

证明: 根据定义 4 和定义 5, 证明对象 x 和 y 是关于属性 a 的直觉模糊相似关系, 证明过程如下。

(1) $\forall x, y \in U, SI_a(x, y) = SI_a(y, x), DI_a(x, y) = DI_a(y, x)$ 且 $SI_a(x, x) = 1, DI_a(x, x) = 0$, 则 $x = y$ 。

(2) $\forall x, y \in U, SD_a(x, y) = (SI_a(x, y), DI_a(x, y))$, 由定理 3 知, $SI_a(x, y) = SI_a(y, x), DI_a(x, y) = DI_a(y, x)$, 得 $SD_a(x, y) = SD_a(y, x)$ 。

(3) $0 \leq SI_a(x, y) \leq 1, 0 \leq DI_a(x, y) \leq 1$, 若 $x = y$, 得 $SI_a(x, y) + DI_a(x, y) = 1 + 0 = 1$, 若 $x \neq y$, 得 $SI_a(x, y) + DI_a(x, y) = \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} + \min\left\{1 - \left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, 1 - \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} = \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} + 1 - \max\left\{\left| \text{Plt}_x(a) - \text{Plt}_y(a) \right|, \left| \text{Nec}_x(a) - \text{Nec}_y(a) \right| \right\} \leq 1$ 。所以, $SI_a(x, y), DI_a(x, y), SD_a(x, y)$ 为直觉模糊数。

(4) 由 x, y, z 为论域 U 的 3 个对象, 且 $x \subseteq y \subseteq z, SI_a(x, z) \leq \min\{SI_a(x, y), SI_a(y, z)\}$ 可知, $SI_a(x, z) \leq SI_a(x, y), SI_a(x, z) \leq SI_a(y, z), DI_a(x, z) \geq DI_a(x, y), DI_a(x, z) \geq DI_a(y, z)$, 得 $SD_a(x, z) \subseteq SD_a(x, y), SD_a(x, z) \subseteq SD_a(y, z)$ 。

综上, $SD_a(x, y) = (SI_a(x, y), DI_a(x, y))$ 为对象 x 和 y 关于属性 a 的直觉模糊相似关系。

定义 13 令 $IIS = (U, AT, V, f)$ 为直觉模糊信息系统, x 和 y 为论域 U 中的任意两个对象, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, AT = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \forall (x, y) \in U, \forall a \in AT, w_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 a 的权重, 直觉模糊相似关系为

$$SR(x, y) = \left(\sum_{a \in AT} w_i SI_a(x, y), \sum_{a \in AT} w_i DI_a(x, y) \right)$$

定义 14 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, AT = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, SR(x, y)$ 为 U 上的直觉模糊相似关系, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ 且满足 $0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 = \mu_{(\lambda_1)} = \sup C_p(\mu(x_i), \nu(x_i)), \lambda_2 = \nu_{(\lambda_2)} = \inf C_n(\mu(x_i), \nu(x_i))$ 则直觉模糊相似关系 SR 下的 (λ_1, λ_2) -截集 $SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ 定义为

$$SR_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \left\{ (x, y) = U \times U \mid \sum_{a \in AT} w_i SI_a(x, y) \geq \lambda_1, \sum_{a \in AT} w_i DI_a(x, y) \leq \lambda_2 \right\} \quad (12)$$

x 在直觉模糊集 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类为

$$[x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}} = \left\{ y \in U \mid (x, y) \in SR_{(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} \quad (13)$$

定义 15 令 $IIS = (U, AT, V, f)$ 为直觉模糊信息系统, 设 $C_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}$ 为满足评价指标元素的直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类, $C_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}} \subseteq U$, 则评价指标用 η 表示为

$$\eta(x) = \frac{|[x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}} \cap [C]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}|}{|[x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}|} \quad (14)$$

4 基于直觉模糊相似关系的三支决策模型

根据三支决策模型的决策原则, 决策过程由属于、不属于两种状态 (X, X^c) 和接受决策、延迟决策、拒绝决策 3 种行动 (a_P, a_B, a_N) 组成。根据文献[23], 假设不同状态采取不同决策行动所带来的损失以直觉模糊值形式给出, 则 3 种决策行动下的风险损失由表 2 给出。

表 2 直觉模糊风险损失矩阵

Table 2 Intuitive fuzzy risk loss matrix

类别	X	X^c
a_P	$\lambda_{PP} = (\mu(\lambda_{PP}), \nu(\lambda_{PP}))$	$\lambda_{PN} = (\mu(\lambda_{PN}), \nu(\lambda_{PN}))$
a_B	$\lambda_{BP} = (\mu(\lambda_{BP}), \nu(\lambda_{BP}))$	$\lambda_{BN} = (\mu(\lambda_{BN}), \nu(\lambda_{BN}))$
a_N	$\lambda_{NP} = (\mu(\lambda_{NP}), \nu(\lambda_{NP}))$	$\lambda_{NN} = (\mu(\lambda_{NN}), \nu(\lambda_{NN}))$

由于决策者的风险偏好不同, 本文从悲观、乐观的角度分析直觉模糊相似关系的三支决策模型。

定义 16 设 $\lambda_{kl} = (\mu(\lambda_{kl}), \nu(\lambda_{kl})) (k = P, B, N; l = P, N)$ 为决策者在两种状态下采取不同行动的直觉模糊损失值, $1 - \nu(\lambda_{kl})$ 表示乐观态度决策者的损失值, $\mu(\lambda_{kl})$ 表示悲观态度决策者的损失值, h 用来描述决策者的态度风险系数, 则不同风险态度的决策者在每种状态下采取不同行动的风险损失 $G_h(\lambda_{kl})$ 定义为

$$G_h(\lambda_{kl}) = (1 - h)\mu(\lambda_{kl}) + h(1 - \nu(\lambda_{kl})) \quad (15)$$

当 $h = 0$ 时其为悲观态度决策者; 当 $h = 1$ 其为乐观态度决策者。

根据直觉模糊风险损失函数的合理情况, 故有 $\mu(\lambda_{PP}) < \mu(\lambda_{BP}) < \mu(\lambda_{NP})$, $\nu(\lambda_{NP}) < \nu(\lambda_{BP}) < \nu(\lambda_{PP})$, $\mu(\lambda_{NN}) < \mu(\lambda_{BN}) < \mu(\lambda_{PN})$, $\nu(\lambda_{PN}) < \nu(\lambda_{BN}) < \nu(\lambda_{NN})$ 。

因此 a_N 、 a_B 和 a_P 的期望损失值可表示为

$$R(a_k | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) = G_h(\lambda_{kP})P(X | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) + G_h(\lambda_{kN})P(X^c | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}), k = P, B, N \quad (16)$$

依据三支决策规则, 可以获得如下决策规则

接受规则(P1): 若 $R(a_P | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) \leq R(a_B | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}})$ 且 $R(a_P | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) \leq R(a_N | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}})$,

则 $x \in \text{POS}(X)$;

拒绝规则(N1): 若 $R(a_N | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) \leq R(a_P | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}})$ 且 $R(a_N | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}}) \leq R(a_B | [x]_{SR_{(\lambda_1, \lambda_2)}})$,

则 $x \in \text{NEG}(X)$;

延迟规则(B1): 若 $x \in U - \text{POS}(X) - \text{NEG}(X)$, 则 $x \in \text{BND}(X)$ 。

那么由 P1、N1、B1 可以获得如下决策规则

接受规则(P2):若 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \geq \bar{\alpha}$ 且 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \geq \bar{\gamma}$, 则 $x \in POS(X)$;

拒绝规则(N2):若 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \leq \bar{\beta}$ 且 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \leq \bar{\gamma}$, 则 $x \in NEG(X)$;

延迟规则(B2):若 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \leq \bar{\alpha}$ 且 $P(X|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}) \geq \bar{\beta}$, 则 $x \in BND(X)$ 。

其中

$$\bar{\alpha} = \frac{(1-h)(\mu(\lambda_{PN}) - \mu(\lambda_{BN})) + h(\nu(\lambda_{BN}) - \nu(\lambda_{PN}))}{(1-h)(\mu(\lambda_{PN}) - \mu(\lambda_{BN}) + \mu(\lambda_{BP}) - \mu(\lambda_{PP})) + h(\nu(\lambda_{BN}) - \nu(\lambda_{PN}) + \nu(\lambda_{PP}) - \nu(\lambda_{BP}))} \quad (17)$$

$$\bar{\beta} = \frac{(1-h)(\mu(\lambda_{BN}) - \mu(\lambda_{NN})) + h(\nu(\lambda_{NN}) - \nu(\lambda_{BN}))}{(1-h)(\mu(\lambda_{BN}) - \mu(\lambda_{NN}) + \mu(\lambda_{NP}) - \mu(\lambda_{BP})) + h(\nu(\lambda_{NN}) - \nu(\lambda_{BN}) + \nu(\lambda_{BP}) - \nu(\lambda_{NP}))} \quad (18)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{(1-h)(\mu(\lambda_{PN}) - \mu(\lambda_{NN})) + h(\nu(\lambda_{NN}) - \nu(\lambda_{PN}))}{(1-h)(\mu(\lambda_{PN}) - \mu(\lambda_{NN}) + \mu(\lambda_{NP}) - \mu(\lambda_{PP})) + h(\nu(\lambda_{NN}) - \nu(\lambda_{PN}) + \nu(\lambda_{PP}) - \nu(\lambda_{NP}))} \quad (19)$$

根据直觉模糊相似关系及必要性测度和可能性测度相关定义和性质,给出直觉模糊可能性相似度的三支决策算法,具体算法如下所示。

算法 1 基于直觉模糊相似关系的三支决策算法

输入:直觉模糊信息系统 $IIS = (U, AT, V, f)$, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 参数 λ_1, λ_2, h 值, $X \subseteq U$

输出:输出集合 $POS(X), BND(X), NEG(X)$

(1) 计算参数 λ_1, λ_2 , 必要性测度 $Nec_x(a)$, 可能性测度 $Plt_x(a)$, 相似度 $SI_a(x, y)$, 相异度 $DI_a(x, y)$

(2) 计算直觉模糊相似关系 $SR(x, y) = \left(\sum_{a \in AT} w_j SI_a(x, y), \sum_{a \in AT} w_j DI_a(x, y) \right)$

(3) 计算 x 在直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类 $[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} = \{y \in U | (x, y) \in SR(\lambda_1, \lambda_2)\}$ 且

$$\sum_{a \in AT} w_j SI_a(x, y) \geq \lambda_1, \sum_{a \in AT} w_j DI_a(x, y) \leq \lambda_2$$

(4) 计算评价指标 $\eta(x) = \frac{|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} \cap [C]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}|}{|[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}|}$

(5) 输入 $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}, \lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$, 计算 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$

(6) if $\bar{\gamma} < \bar{\beta} < \bar{\alpha}$ then

(7) if $\eta \geq \bar{\alpha}$ then $x_i \in POS(X)$

(8) if $\eta \leq \bar{\beta}$ and $\eta \leq \bar{\gamma}$ then $x_i \in NEG(X)$

(9) else $x_i \in BND(X)$

(10) if $\bar{\alpha} < \bar{\beta} < \bar{\gamma}$ then

(11) if $\eta \geq \bar{\gamma}$ then $x_i \in POS(X)$

(12) if $\eta \leq \bar{\alpha}$ then $x_i \in NEG(X)$

(13) else $x_i \in BND(X)$

(14) if $\eta \geq \max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ then $x_i \in POS(X)$

(15) if $\eta \leq \min\{\bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ then $x_i \in NEG(X)$

(16) else $x_i \in BND(X)$

(17)输出 $POS(X), BND(X), NEG(X)$

(18)end

通过算法1知相似度 $SI_a(x, y)$ 和相异度 $DI_a(x, y)$ 的时间复杂度为 $O(mn)$, x 在直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类 $[x]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}$ 时间复杂度为 $O(n^2)$, $Nec_x(a)$ 和 $Plt_x(a)$ 时间复杂度为 $O(n)$, $POS(X)$ 、 $NEG(X)$ 、 $BND(X)$ 的时间复杂度为 $O(n)$, 本算法的时间复杂度为 $O(2n^2 + 2mn + 5n)$, 即为 $O(n^2)$ 。

5 实例分析

本节用一系列实验来验证所提出的三支决策模型的可行性和有效性。第1部分从UCI机器学习数据库中选择了6个数据集,并用本文方法和其他方法进行对比分析来验证所提模型行的可行性和有效性;第2部分利用案例来说明本文的计算步骤,并对结果进行讨论和分析。

5.1 数据集对比与分析

选取6个模糊决策数据集,对算法的分类性能进行比较和分析。数据集的具体描述(对象个数、属性个数、对象类型)见表3。此外,对所选6个数据集进行预处理,针对数据集的每个条件属性,当数据类型为整数,求得最大值、最小值;当数据类型为实数,对其进行归一化;当数据类型为字符,先按照相似程度将属性值转化为数值,再对其进行归一化。当需要把字符转化为数值时,如评价类数据|优秀,好,中等,差|可以转化为数值 $\{1, 0.75, 0.5, 0.25\}$;当结果利用模糊词语来描述特征时,常用加权布尔值法进行转化,如|健康,比较健康,不太健康|,可以定义为 $\{1True, 0.6True, 0.2True\}$ 。所有实验在具有Windows 10、Intel(R) Core(TM) i5-6500 CPU@3.2 GHz和8 GB内存的平台上实现,编程语言是Python。

实验时,将阈值 (λ_1, λ_2) 的取值分为11组,从 $(1.0, 0.0)$ 开始按照步长为0.05的顺序依次递减。将 λ_1 作为 x 轴,确定度 $\frac{|POS \cup NEG|}{|U|}$,即正域和负域中对象个数与集合 U 中对象个数的比值作为 y 轴,其中,确定度的取值范围为 $[0, 1]$ 。将本文与文献[11、18、21、24、25、26]的决策方法在所选取的6个数据集上进行实验,实验结果如图1和图2所示,其中,图1和图2分别为悲观和乐观的决策条件下得到的实验结果图。

对图1和图2进行分析,确定度和参数 λ_1 整体上呈现线性相关性,确定度随着 λ_1 的增大而增大。在同一个数据集上,用7种方法进行分类时,乐观决策条件下的确定度整体上大于悲观决策条件下的确定度。此外,悲观决策条件下,本文方法在Maternal health、Surveillance和Hcv三种数据集上进行决策分类时,相较于其他6种方法,确定度比较高,边界域的对象较少,分类效果较好;乐观决策条件下,本文方法在Diabetes和Mines相较于其他6种方法分类效果较好。不同的数据集用同一种方法进行决策分类时,由于数据量不同,数据类型不同,在不同的决策条件下,分类结果也不一样。

通过多次实验发现,当 λ_1 的值越小时,边界域的对象越多,则确定度越低, λ_1 的取值在 $[0, 0.5)$ 时,7种方法在6个数据集上的确定度趋近于0或者等于0。当 λ_1 的取值逐渐趋近于1, λ_2 的取值逐渐趋近于0时,相似类的划分条件比较严格,划分

表3 实验数据集描述

Table 3 Description of experimental data sets

数据集	属性类型	对象个数	属性个数
Maternal health	实数,整数	1 013	6
Surveillance	混合	67	7
Diabetes	混合	520	17
Raisin	实数,整数	900	8
Hcv	整数	615	12
Mines	实数,整数	338	4

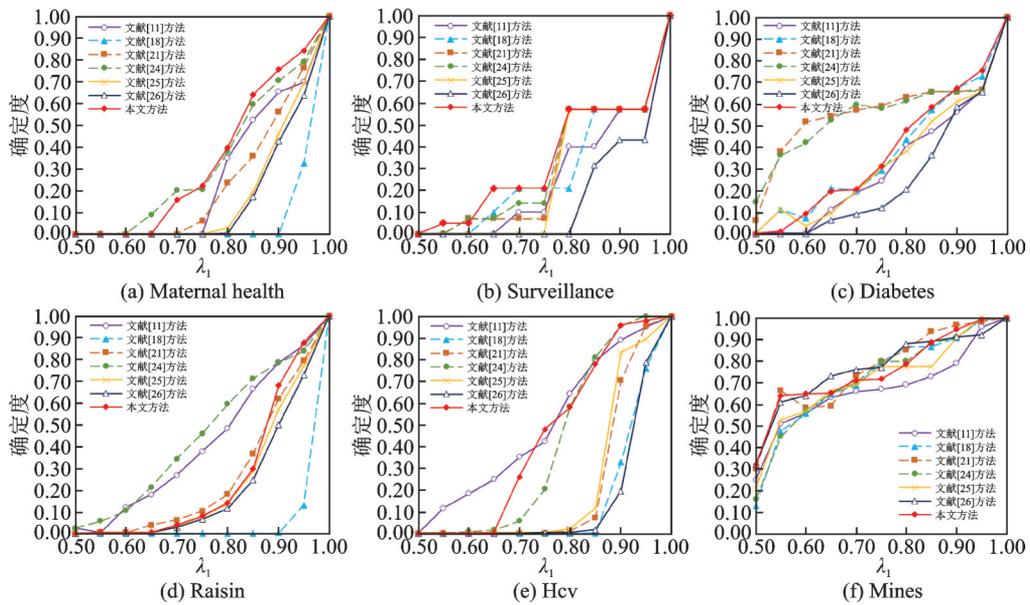


图1 悲观决策条件下数据集分类结果图

Fig.1 Dataset classification results under pessimistic decision-making condition

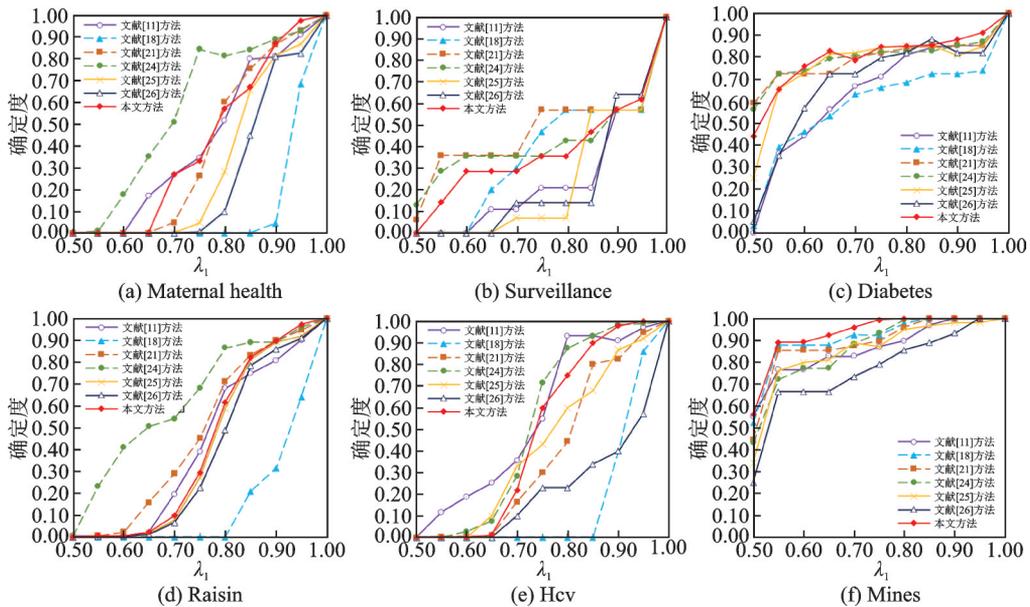


图2 乐观决策条件下数据集分类结果图

Fig.2 Dataset classification results under optimistic decision-making condition

的粒度逐渐变细,相似类的对象增多,边界域减小,正域和负域的对象变多,确定度变大。当 $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ 时,犹豫度变为0,隶属度与非隶属度之和为1,边界域变为0,不同对象属于同一相似类时,当且仅当对象的每个属性值完全相等,但是,在真实数据集中,存在误差和噪声的影响,使不同对象存在偏差,这样导致了平均每一个相似类只存在一个对象,即相似类数量等于对象数量。因此, (λ_1, λ_2) 不同的取值导致不同的决策划分,对分类结果有较大的影响。

对实验结果进行分析,当 λ_1 的取值在 $[0.7, 1.0)$, λ_2 的取值在 $(0.0, 0.3]$ 时,本文提出的模型对数据有较好的分类能力。在选取的6个数据集上,当 λ_1 的取值在 $[0.9, 1.0)$, λ_2 的取值在 $(0, 0.1]$ 时,本文方法相较于其他6种方法,确定度比较高,划分到边界域的对象较少,则分类效果较好。本文提出的模型在参数取值发生变化时, (λ_1, λ_2) -截集下的相似类中的对象发生改变,会产生不同的决策结果,可以在一定程度上减少误差。

5.2 基于直觉模糊相似关系的三支决策模型的分类能力比较和分析

随着生产技术的不断提高和人们对产品质量要求的不断提高,好的供应商在企业的生产中变得越来越重要。为了验证本文提出的三支决策模型的可行性,使用了文献[22]中的产品组件供应商数据。数据中包括10个产品组件供应商,将其看做可选择的方案 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, X 表示接受, X^c 表示不接受,决策属性集 $\Omega = \{X, X^c\}$ 。对于每个供应商,有4个标准,即技术水平、服务水平、业务能力和企业环境,将其作为一组入选标准 $AT = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,4个准则的权重分别为0.22、0.22、0.36和0.2,由权重集合 $W = \{0.22, 0.22, 0.36, 0.2\}$ 表示,风险系数 $h = \{0, 0.37, 1\}$,根据市场评估 $C = \{x_2, x_4, x_5, x_8, x_9\}$ 更容易入选,使用本文方法处理数据。首先,用表4表示10个供应商的数据,其中每个评价是一个直觉模糊数,分别包括隶属度和非隶属度。

表4 10个供应商的多标准信息表

Table 4 Multi standard information table for ten suppliers

U	a_1	a_2	a_3	a_4	U	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	(0.6, 0.3)	(0.2, 0.4)	(0.3, 0.3)	(0.1, 0.5)	x_6	(0.1, 0.8)	(0.3, 0.5)	(0.2, 0.4)	(0.5, 0.1)
x_2	(0.4, 0.5)	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.4)	(0.5, 0.3)	x_7	(0.4, 0.5)	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.2)	(0.3, 0.5)
x_3	(0.5, 0.3)	(0.1, 0.6)	(0.4, 0.2)	(0.3, 0.4)	x_8	(0.2, 0.6)	(0.6, 0.3)	(0.8, 0.1)	(0.4, 0.2)
x_4	(0.7, 0.2)	(0.9, 0.1)	(0.3, 0.5)	(0.8, 0.2)	x_9	(0.3, 0.4)	(0.8, 0.1)	(0.5, 0.4)	(0.6, 0.3)
x_5	(0.6, 0.1)	(0.6, 0.2)	(0.3, 0.3)	(0.5, 0.2)	x_{10}	(0.4, 0.1)	(0.1, 0.3)	(0.3, 0.4)	(0.5, 0.5)

步骤1 计算可能性区间决策矩阵: $Z = ([Nec_{ij}, Plt_{ij}])_{m \times n}$,其中, Z^T 为 Z 的转置矩阵, $Nec_{ij} = \inf \mu_{ij}$, $Plt_{ij} = \sup(1 - \nu_{ij})$ 。

$Z^T =$

$$\begin{bmatrix} [0.6, 0.7] & [0.4, 0.5] & [0.5, 0.7] & [0.7, 0.8] & [0.6, 0.9] & [0.1, 0.2] & [0.4, 0.5] & [0.2, 0.4] & [0.3, 0.6] & [0.4, 0.9] \\ [0.2, 0.6] & [0.7, 0.8] & [0.1, 0.4] & [0.9, 0.9] & [0.6, 0.8] & [0.3, 0.5] & [0.3, 0.4] & [0.6, 0.7] & [0.8, 0.9] & [0.1, 0.7] \\ [0.3, 0.7] & [0.6, 0.6] & [0.4, 0.8] & [0.3, 0.5] & [0.3, 0.7] & [0.2, 0.6] & [0.4, 0.8] & [0.8, 0.9] & [0.5, 0.6] & [0.3, 0.6] \\ [0.1, 0.5] & [0.5, 0.7] & [0.3, 0.6] & [0.8, 0.8] & [0.5, 0.8] & [0.5, 0.9] & [0.3, 0.5] & [0.4, 0.8] & [0.6, 0.7] & [0.5, 0.5] \end{bmatrix}$$

步骤2 计算直觉模糊相似关系: $SR(x_m, x_n) = \left(\sum_{a \in AT} w_j S_a(x_m, x_n), \sum_{a \in AT} w_j D_a(x_m, x_n) \right)$,

$x_m, x_n \in U, a_j \in AT$, 相似度矩阵: $SI(x_m, x_n) = \left(\sum_{a \in AT} w_j SI_a(x_m, x_n) \right)_{m \times n}$, 相异度矩阵: $DI(x_m, x_n) =$

$\left(\sum_{a \in AT} w_j DI_a(x_m, x_n) \right)_{m \times n}$ 。任意两个供应商 x_m, x_n 的直觉模糊相似关系为: $SR(x_m, x_n) = (1, 0)$, ($m =$

$1, 2, \dots, 10$)。 $SR(x_m, x_n)$ 为供应商 x_m, x_n 的直觉模糊相似关系,下面计算其相似度矩阵 $SI(x_m, x_n)$ 和相

异度矩阵 $DI(x_m, x_n) (m=(1, 2, \dots, 10), n=(1, 2, \dots, 10))$:

$$SI(x_m, x_n) = \left(\sum_{a \in AT} w_j SI_a(x_m, x_n) \right)_{m \times n} =$$

1.000	0.658	0.858	0.612	0.788	0.752	0.836	0.584	0.630	0.818
0.658	1.000	0.712	0.722	0.762	0.662	0.800	0.806	0.900	0.632
0.858	0.712	1.000	0.572	0.770	0.714	0.892	0.640	0.670	0.778
0.612	0.722	0.572	1.000	0.780	0.640	0.594	0.564	0.778	0.662
0.788	0.762	0.770	0.780	1.000	0.724	0.728	0.668	0.798	0.750
0.752	0.662	0.714	0.640	0.724	1.000	0.760	0.654	0.654	0.686
0.836	0.800	0.892	0.594	0.728	0.760	1.000	0.686	0.736	0.734
0.584	0.806	0.640	0.564	0.668	0.654	0.686	1.000	0.764	0.540
0.630	0.900	0.670	0.778	0.798	0.654	0.736	0.764	1.000	0.668
0.818	0.632	0.778	0.662	0.750	0.686	0.734	0.540	0.668	1.000

$$DI(x_m, x_n) = \left(\sum_{a \in AT} w_j DI_a(x_m, x_n) \right)_{m \times n} =$$

0.000	0.342	0.142	0.388	0.212	0.248	0.164	0.416	0.370	0.182
0.342	0.000	0.288	0.278	0.238	0.338	0.200	0.194	0.100	0.368
0.142	0.288	0.000	0.428	0.230	0.286	0.108	0.360	0.330	0.222
0.388	0.278	0.428	0.000	0.220	0.360	0.406	0.436	0.222	0.338
0.212	0.238	0.230	0.220	0.000	0.276	0.272	0.332	0.202	0.250
0.248	0.338	0.286	0.360	0.276	0.000	0.240	0.346	0.346	0.314
0.164	0.200	0.108	0.406	0.272	0.240	0.000	0.314	0.264	0.266
0.416	0.194	0.360	0.436	0.332	0.346	0.314	0.000	0.236	0.460
0.370	0.100	0.330	0.222	0.202	0.346	0.264	0.236	0.000	0.332
0.182	0.368	0.222	0.338	0.250	0.314	0.266	0.460	0.332	0.000

步骤 3 计算 $\lambda_1 = \mu_{(\lambda_1)} = \sup C_p(\inf \mu(x_m), \sup(1 - \nu(x_m))) = 0.60, \lambda_2 = \nu_{(\lambda_2)} = \inf C_n(\inf \mu(x_m), \sup(1 - \nu(x_m))) = 0.30$

步骤 4 计算 x_m 在直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集下的相似类 $[x_m]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)}, m = 1, 2, \dots, 10$ 。

$$\begin{aligned}
 [x_1]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\} & [x_2]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\} \\
 [x_3]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\} & [x_4]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_2, x_4, x_5, x_9\} \\
 [x_5]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\} & [x_6]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\} \\
 [x_7]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\} & [x_8]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_2, x_8, x_9\} \\
 [x_9]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_2, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9\} & [x_{10}]_{SR(\lambda_1, \lambda_2)} &= \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}
 \end{aligned}$$

步骤 5 计算 x_m 的评价指标 $\eta(x_m): \eta(x_1) = 0.17, \eta(x_2) = 0.71, \eta(x_3) = 0.286, \eta(x_4) = 1, \eta(x_5) = 0.333, \eta(x_6) = 0.2, \eta(x_7) = 0.375, \eta(x_8) = 1, \eta(x_9) = 0.833, \eta(x_{10}) = 0.2$ 。

步骤 6 根据表 5 给出的直觉模糊损失代价矩阵, 以及式(17~19), 计算出在风险损失值 $h=0, 0.37, 1$ 时 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 的值, 并对对象 x_m 在悲观决策和乐观决策不同决策情形下进行分类。

当 $h=0$ 时是悲观态度决策者决策, $\bar{\alpha} = 0.75, \bar{\beta} = 0.29, \bar{\gamma} = 0.53$ 得: $POS(X) = \{x_4, x_8, x_9\}, NEG(X) = \{x_1, x_3, x_6, x_{10}\}, BND(X) = \{x_2, x_5, x_7\}$ 。

当 $h=0.37$ 时 $\bar{\alpha}=0.673, \bar{\beta}=0.32, \bar{\gamma}=0.52$ 得 :

$$\text{POS}(X)=\{x_2, x_4, x_8, x_9\}, \quad \text{NEG}(X)=\{x_1, x_3, x_6, x_{10}\},$$

$$\text{BND}(X)=\{x_5, x_7\}.$$

当 $h=1$ 时是乐观决策者决策, $\bar{\alpha}=0.56, \bar{\beta}=0.40, \bar{\gamma}=0.50$ 得 : $\text{POS}(X)=\{x_2, x_4, x_8, x_9\}, \text{NEG}(X)=\{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}, \text{BND}=\{\emptyset\}.$

基于上述结果和三支决策模型可以得出以下结论:(1)

当决策者的态度很悲观,不愿意承担风险时,则阈值 $\bar{\alpha}$ 越大, $\bar{\beta}$ 越小,只有 x_4, x_8, x_9 符合要求,而 x_2, x_5, x_7 需要进一步审查,以确定其是否可以成为该公司的供应商,其余供应商不会被该公司选择。(2)当决策者态度比较悲观时,可选择的供应商有4个 x_2, x_4, x_8, x_9 ,而 x_5, x_7 两个供应商需要进一步审查,以确定其是否可以成为该公司的供应商。(3)当决策者的态度很乐观时,愿意承受更高的风险,阈值 $\bar{\alpha}$ 越小, $\bar{\beta}$ 越大,可选择的供应商有4个 x_2, x_4, x_8, x_9 ,其他供应商不会被该公司选择。决策者的态度越悲观,可接受的对象越少,对象间的不可区分性越强,对供应商的选择有更严格的标准;决策者的态度越乐观,可选择的对象越多,对象间的可区分性越高,乐观决策者可以接受一定的风险损失,能够接受错误的决策来降低选择成本,与悲观决策者所选择的供应商相比,乐观决策者选择供应商的标准不太严格。

为了说明本文提出的直觉模糊相似度和相异度的合理性,针对本实例将其与文献[11, 18, 21, 24-26]的直觉模糊相似度和相异度分别进行比较,根据直觉模糊相似关系所获得的相似度和相异度可通过散点图表示,如图3((a),(b),(c),(d),(e)和(f)分别表示本文与文献[11, 18, 21, 24, 25, 26]对比分析图),其中横坐标和纵坐标分别表示相似关系矩阵的直觉模糊数和相异关系矩阵的直觉模糊数。从散点图可以看出对象间的相似情况,相似度过于集中导致对对象区分困难,相异度比较大的散点如果比较多,说明对象间的差异性较大,不太适合相似类的划分。图3(g),(h),(i)分别是本文方法和其他6种方法在风险系数 $h=0, h=0.37$ 和 $h=1$ 时正域、负域和边界域的对象数量。

通过图3(b)、图3(e)和图3(f)可知,文献[18]、文献[25]和文献[26]的方法,相似度比较高,相异度比较低,直觉模糊相似关系的散点图过于集中,对象之间的区分度比较弱。由图3(d)可知,文献[24]的方法,对本文实例的任意两个对象区分时,相似度比较低,相异度比较高,说明两个对象的差异性较大,相比之下,本文方法对上述实例进行分类时效果比较好。由图3(g)、图3(h)和图3(i)可以看出,在文献[18]和文献[24]的方法中,当风险系数 $h=0, 0.37, 1$ 决策分类时,正域、负域和边界域的对象数量都相同,并且边界域的对象数量较多,因此,本文方法比较合理。文献[11]和文献[24]的方法,悲观决策者和乐观决策者分类时,边界域中的对象数量比本文的多。文献[25]在风险系数 $h=0, 0.37, 1$ 决策分类时,正域、负域和边界域的对象数量相同,并且边界域的对象数量都是3个,不确定的对象数量比本文提出的方法较多,体现出本文构造的直觉模糊相似关系区分度比较好。文献[21]的方法和本文对比,从图3(c)可以看出,两个方法在处理本实例时,散点图分布相比较相似,由图3(g)和图3(h)可以看出两个方法在分类时,正域、负域和边界域的对象数量一样,由图3(i)可以看出,乐观决策分类时,文献[21]边界域的对象数量有2个,本文在边界域的对象数量为0,可知本文方法在本实例对对象的区分度更强。综上,通过对比分析可知本文方法具有合理性和有效性。

表5 直觉模糊损失代价矩阵

Table 5 Intuitionistic fuzzy loss cost matrix

类别	X	X ^c
a_P	(0.1, 0.9)	(0.9, 0.1)
a_B	(0.3, 0.5)	(0.3, 0.6)
a_N	(0.8, 0.2)	(0.1, 0.8)

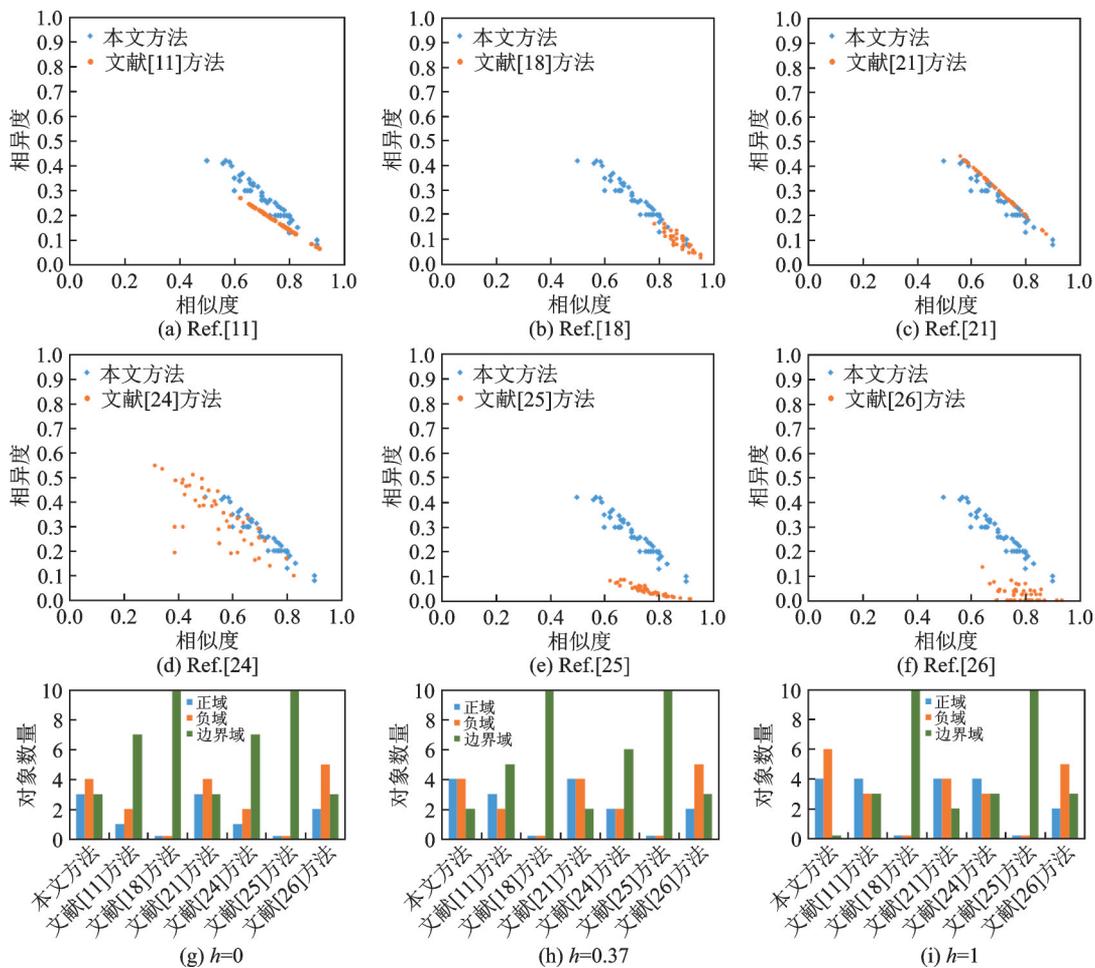


图3 本文的直觉模糊相似关系与文献[11,18,21,24-26]方法比较图

Fig.3 Comparison of intuitive fuzzy similarity relation between the proposed method and the existing methods in Refs. [11,18,21,24-26]

6 结束语

在直觉模糊集和可能性理论的基础上,通过定义新的直觉模糊相似度,利用直觉模糊相似度和相异度构造的直觉模糊相似关系,提出一种基于直觉模糊相似关系的三支决策模型,在模型中通过引入直觉模糊可信度来替代截集的参数,用风险系数 h 来确定阈值 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$,使得参数选取不受主观因素影响,并在进行决策分类时,利用直觉模糊相似关系和截集,给出直觉模糊 (λ_1, λ_2) -截集相似类的划分方法,结合三支决策模型,给出了所提方法的三支决策规则。该模型对直觉模糊集中对象间的相似度过于集中或者相异度过高的情况下,能解决分类结果错误的问题,并且在定义直觉模糊相似度时,加入了权重系数,减少了不重要属性条件信息的影响,提高了分类结果的准确性。下一步将研究如何降低代价损失,从而选择综合成本最低的方案。

参考文献:

[1] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

- [2] ZADEH L A. Possibility theory and its application to information analysis[C]//Proceedings of International Colloquium on Information Theory. Cachan: Juillet, 1978: 173-182.
- [3] CHEN T, MESIAR R, LI J, et al. Possibility and necessity measures and integral equivalence[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 86: 62-72.
- [4] GARAI T, GARG H. Multi-objective linear fractional inventory model with possibility and necessity constraints under generalised intuitionistic fuzzy set environment[J]. *CAAI Transactions on Intelligence Technology*, 2019, 4(3): 175-181.
- [5] GAO Z Z, MASAHIRO I. An extended necessity measure maximisation incorporating the trade-off between robustness and satisfaction in fuzzy LP problems[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2022, 30(2): 185-210.
- [6] PAN Lipeng, DENG Yong. A novel similarity measure in intuitionistic fuzzy sets and its applications[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2022, 107: 104512.
- [7] GOHAIN B, CHUTIA R, DUTTA P, et al. Two new similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and its various applications[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2022, 37(9): 5557-5596.
- [8] GUPTA R, KUMAR S. Intuitionistic fuzzy similarity-based information measure in the application of pattern recognition and clustering[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2022, 24(5): 2493-2510.
- [9] CHA G H. Similarity ranking technique exploiting the structure of similarity relationships[J]. *Computing*, 2023, 105(3): 559-576.
- [10] YANG Hailong, REN Huanhuan. A three-way decision model on incomplete single-valued neutrosophic information tables[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2023, 44: 5179-5193.
- [11] 路艳丽, 雷英杰, 李兆渊, 等. 直觉模糊相似关系的构造方法[J]. *计算机应用*, 2008, 28(2): 311-314.
LU Yanli, LEI Yingjie, LI Zhaoyuan, et al. Construction of intuitionistic fuzzy similarity relation[J]. *Computer Applications*, 2008, 28(2): 311-314.
- [12] YAO Yiyu. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(3): 341-353.
- [13] GUO Doudou, JIANG Chunmao, SHENG Ruxue, et al. A novel outcome evaluation model of three-way decision: A change viewpoint[J]. *Information Sciences*, 2022, 607: 1089-1110.
- [14] QIAN Wenbin, ZHOU Yangyang, QIAN Jin, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision for information system with fuzzy decision[J]. 2022, 149: 85-103.
- [15] MONDAL A, ROY S K, PAMUCAR D, et al. Regret-based three-way decision making with possibility dominance and SPA theory in incomplete information system[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 211: 118688.
- [16] WANG Tianxing, HUANG Bing, LI Huaxiong, et al. Three-way decision for probabilistic linguistic conflict analysis via compounded risk preference[J]. *Information Sciences*, 2023, 631: 65-90.
- [17] MENCAR C, CASTELLANO G, FANELLI A M. Distinguishability quantification of fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(1): 130-149.
- [18] 刘久兵, 周献中, 李华雄, 等. 基于直觉模糊相似度的直觉模糊三支决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(6): 1550-1564.
LIU Jiubing, ZHOU Xianzhong, LI Huaxiong, et al. An intuitionistic fuzzy three-way decision method based on intuitionistic fuzzy similarity degrees[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2019, 39(6): 1550-1564.
- [19] 薛占熬, 辛现伟, 袁艺林, 等. 基于直觉模糊可能性测度的三支决策模型的研究[J]. *南京大学学报(自然科学)*, 2016, 52(6): 1065-1074.
XUE Zhan'ao, XIN Xianwei, YUAN Yilin, et al. Research on the three-way decisions model based on intuitionistic fuzzy possibility measures[J]. *Journal of Nanjing University(Natural Science)*, 2016, 52(6): 1065-1074.
- [20] HUNG Wenliang, YANG Minshen. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25(14): 1603-1611.

- [21] DAI Jianhua, CHEN Tao, ZHANG Kai. The intuitionistic fuzzy concept-oriented three-way decision model[J]. Information Sciences, 2023, 619: 52-83.
- [22] PEYKANI P, MOHAMMADI E, PISHVAEE M S, et al. A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: Possibility, necessity and credibility-based approaches[J]. RAIRO-Operations Research, 2018, 52(4/5): 1445-1463.
- [23] LIU Peide, WANG Yumei, JIA Fan, et al. A multiple attribute decision making three-way model for intuitionistic fuzzy numbers[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 119: 177-203.
- [24] 李鹏, 吴君民, 朱建军, 等. 基于新直觉模糊距离的随机决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(6): 1517-1524.
LI Peng, WU Junmin, ZHU Jianjun, et al. Stochastic multi-criteria decision-making methods based on new intuitionistic fuzzy distance[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2014, 34(6): 1517-1524.
- [25] FENG Tao, MI Jusheng, ZHANG Shaopu, et al. Belief functions on general intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information Sciences, 2014, 271: 143-158.
- [26] WANG Zhong, XU Zeshui, LIU Shousheng, et al. Direct clustering analysis based on intuitionistic fuzzy implication[J]. Applied Soft Computing, 2014, 23:1-8.

作者简介:



吕明明(1998-),男,硕士研究生,研究方向:粗糙集理论、模糊集理论, E-mail: 2108283065@stu.htu.cn。



薛占熬(1963-),通信作者,男,博士,教授,CAAI高级会员,研究方向:人工智能基础、模糊集理论、粗糙集理论等, E-mail: xue-zhanao@163com。



杨梦丽(1993-),女,硕士研究生,研究方向:模糊集、粗糙集理论, E-mail: 2331523534@qq.com。



辛现伟(1991-),男,博士,讲师,研究方向:三支决策、粒计算、模糊集理论。



孙林(1979-),男,博士,教授,研究方向:粒计算、数据挖掘、机器学习、生物信息。

(编辑:刘彦东)