

# 基于稀疏约束的低复杂度可变分数时延滤波器

王静雯<sup>1</sup>, 周文静<sup>1</sup>, 沈明威<sup>1</sup>, 韩国栋<sup>2</sup>

(1. 河海大学计算机与信息学院, 南京 211106; 2. 中国电子科技集团公司第五十四研究所, 石家庄 050081)

**摘要:** 针对基于Farrow结构的可变分数时延(Variable fractional delay, VFD)滤波器需求解大量量子滤波器系数这一关键问题, 本文将稀疏约束理论引入滤波器的权系数优化中, 研究具有稀疏系数的Farrow结构滤波器。在极大极小(Minimax)准则下, 通过添加 $L_1$ 正则化约束项改进权系数优化模型, 在系数(反)对称性基础上进一步增加系数的稀疏度。然后, 采用交替方向乘法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)进行权系数迭代求解。仿真实验表明, 本文提出的基于稀疏约束的VFD滤波器在保证高延迟精度的同时, 乘法器和加法器分别减少了47.69%和58.60%, 极大地降低了系统运算量以及复杂度。

**关键词:** 稀疏约束; 可变分数时延滤波器; 极大极小; 交替方向乘法; Farrow结构

**中图分类号:** TN911.72 **文献标志码:** A

## Low-Complexity Design of Sparse-Constrained Variable Fractional Delay Filter

WANG Jingwen<sup>1</sup>, ZHOU Wenjing<sup>1</sup>, SHEN Mingwei<sup>1</sup>, HAN Guodong<sup>2</sup>

(1. College of Computer and Information Engineering, Hohai University, Nanjing 211106, China; 2. The 54th Research Institute of CETC, Shijiazhuang 050081, China)

**Abstract:** Since variable fractional delay (VFD) filter contains a large number of coefficients to be solved, this paper presents a study on sparse-constrained Farrow structure variable fractional delay filter. We add a  $L_1$  regularization constraint to further enhance the sparsity based on coefficient symmetry and optimize its frequency response to approximate a desired frequency response in the minimax error sense. In addition, the alternating direction method of multipliers (ADMM) algorithm is used to iteratively obtain the filter coefficients. Simulation experiments demonstrate that the proposed sparse-constrained VFD filter not only ensures high delay accuracy but also reduces the use of multipliers and adders by 47.69% and 58.60% respectively, thus lowering system computation and complexity greatly.

**Key words:** sparse-constrained; variable fractional delay (VFD) filter; minimax; alternating direction method of multipliers (ADMM); Farrow structure

## 引言

可变分数时延滤波器的频率响应可随延迟参数在线调整, 已广泛应用于宽带阵列的时延补偿、采样率转换和波束形成等领域<sup>[1-3]</sup>。Farrow结构<sup>[4]</sup>是一种高效的可变分数时延(Variable fractional delay, VFD)滤波器。

**基金项目:** 国家自然科学基金(62271190); 江苏省自然科学基金(BK20221499)。

**收稿日期:** 2023-05-12; **修订日期:** 2023-12-19

VFD)滤波器设计架构,其基本思想是利用 $M$ 阶多项式对数字时延滤波器的系数进行拟合,以实现灵活控制的目的。因此对VFD滤波器的设计可以转化为对Farrow结构子滤波器系数求解问题。

经典的VFD滤波器设计方法包括最小二乘法<sup>[5-9]</sup>、极大极小法<sup>[10-12]</sup>。最小二乘法通过最小化滤波器的实际频率响应与理想频率响应的加权平方误差得到一个解析解。文献[5]将系数设计表述为一个线性方程组,需要大量的计算量以及存储空间。文献[6-9]是基于矩阵的设计方法,计算效率更高。但在系数求解过程中,文献[6-9]算法均涉及到矩阵求逆操作,计算复杂度随着滤波器阶数的增加而增加,同时具有数值不稳定的问题<sup>[13]</sup>。与最小二乘法不同,极大极小法使实际频率响应与理想响应的峰值误差最小化,属于优化设计方法,文献[10-12]分别将其转化为半正定规划(Semidefinite program, SDP)、线性规划(Linear program, LP)、二阶锥规划(Second-order cone programming, SOCP)问题,保证了系数解的最优性。然而,为满足设计要求,需对误差函数进行多次迭代求解,运算复杂度高。由于极大极小法偏重于保留滤波器传递函数的幅度特性,对滤波器相位特性的影响较小,因此本文基于极大极小准则进行滤波器的设计。

基于Farrow结构的VFD滤波器实现过程是多个子滤波器的并行计算,抽头数目多,运算量远高于固定分数时延滤波器。目前已有设计算法在实际应用中都具有较多的非零抽头系数,且阶数越高,运算量越大,因此,有必要设计一种实现复杂度较低的VFD滤波器。文献[7-8]已经利用VFD滤波器的系数(反)对称性,将系数个数减少了50%。然而,他们只是降低了计算复杂度,需要的加法器和减法器并没有减少。为进一步降低滤波器的复杂度,提高执行效率,本文将在系数(反)对称性基础上引入稀疏约束理论,改进系数优化模型。在满足理想频率响应的条件下,添加 $L_1$ 正则化约束项<sup>[14]</sup>,增加系数的稀疏度,从而忽略零系数所对应的运算操作和硬件损耗,降低系统复杂度。

## 1 基于Minimax的VFD滤波器

本文推导均以偶数阶滤波器为例,首先考虑VFD滤波器基于Minimax准则的误差函数建立问题,给出理想分数时延滤波器的频率响应形式

$$H_d(\omega, p) = e^{-j\omega p} \quad (1)$$

式中: $\omega \in [0, \alpha\pi]$ 代表通频带范围,且 $0 < \alpha < 1$ ;  $p \in [-0.5, 0.5]$ 代表可变时延参数范围。

而在Farrow结构下,VFD滤波器实际频率响应表达式为

$$H(\omega, p) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a(n, m) p^m e^{-j\omega n} \quad (2)$$

式中: $N$ 为滤波器的阶数; $M$ 为子滤波器个数,不失一般性, $M$ 为奇数值,可得 $I = (M-1)/2$ ,即偶数子滤波器个数为 $I$ ,奇数子滤波器个数为 $(I+1)$ ;  $a(n, m)$ 代表子滤波器系数。基于Farrow结构的VFD滤波器结构如图1所示。

可以证明,Farrow结构滤波器具有系数对称性<sup>[6-7]</sup>,即

$$\begin{cases} a(-n, m) = (-1)^m a(n, m) \\ a(0, m) = 0 \quad \text{odd} \end{cases} \quad (3)$$

利用上述系数约束,滤波器系数总个数减少了50%,极大地降低了计算复杂度。

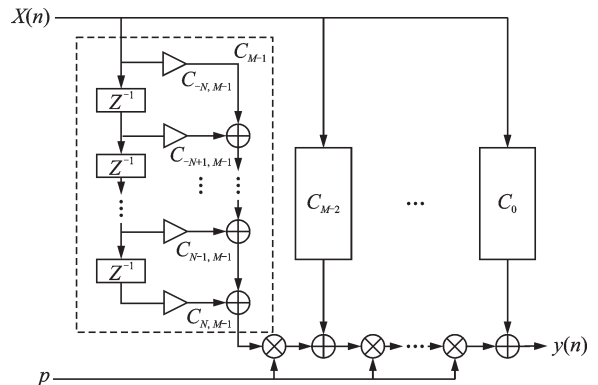


图1 Farrow结构框图

Fig.1 Diagram block of Farrow structure

将式(3)代入式(2),得到滤波器频率响应的实数矩阵表示形式

$$H(\omega, p) = \sum_{m=0}^I c_m^T b_{em} p^{2m} - j \sum_{m=1}^{I+1} s_m^T b_{om} p^{2m-1} = 1 + \sum_{m=1}^I f_m^T b_{em} - j \sum_{m=1}^{I+1} g_m^T b_{om} = 1 + f^T b_e - j g^T b_o \quad (4)$$

式中:  $b_{em}, b_{om}$  为滤波器的系数向量,下标“em”和“om”表示数值  $m$  的奇偶性,且

$$c_m^T = [1 \quad \cos \omega \quad \cos(2\omega) \quad \cdots \quad \cos(N\omega)], \quad s_m^T = [\sin \omega \quad \sin(2\omega) \quad \cdots \quad \sin(N\omega)] \quad (5)$$

$$f_m^T = c_m^T p^{2m}, \quad g_m^T = s_m^T p^{2m-1} \quad (6)$$

$$f^T = [f_1^T \quad f_2^T \quad \cdots \quad f_I^T], \quad g^T = [g_1^T \quad g_2^T \quad \cdots \quad g_{I+1}^T] \quad (7)$$

VFD 滤波器的 Minimax 设计指的是在满足频率响应峰值误差最小的条件下,求得最优滤波器权系数

$$\text{Minimize Max} |H(\omega, p) - H_d(\omega, p)| \quad (8)$$

假设  $N=10, M=7$ ,通过 Minimax 准则求解滤波器系数,得到系数矩阵如图 2 所示。

0	0.018 255 7	-0.001 188	-0.029 63	0.001 918 4	0.014 141 7	-0.000 844	-0.882 977
0	-0.030 912	0.002 581 8	0.050 087 6	-0.004 16	-0.023 806	0.001 813 1	0.004 973 7
0	0.047 963 6	-0.004 905	-0.077 547	0.007 881 8	0.036 665 3	-0.003 41	-0.007 595
0	-0.070 661	0.008 773 3	0.113 894 7	-0.014 053	-0.053 459	0.006 029 2	0.010 951 7
0	0.100 983	-0.015 273	-0.162 014	0.024 348 8	0.075 209	-0.010 332	-0.015 158
0	-0.142 428	0.026 717 3	0.226 756 4	-0.042 27	-0.103 351	0.017 634 1	0.020 290 6
0	0.201 998	-0.048 531	-0.317 042	0.075 714 8	0.139 647 8	-0.030 623	-0.026 151
0	-0.296 155	0.096 590 1	0.450 420 2	-0.146 115	-0.183 822	0.055 128 2	0.031 266 7
0	0.474 637 8	-0.235 056	-0.655 952	0.323 435 5	0.211 009 9	-0.096 922	-0.031 265
0	-0.987 143	0.984 801 8	0.623 887 6	-0.618 936	0.156 396	0.145 514 8	0.020 625 7
1	0	-1.629 642	0	0.785 469 1	0	-0.168 422	0
0	9.87E-01	0.984 801 8	-0.623 888	-0.618 936	0.156 395 8	0.145 514 8	-0.020 626
0	-4.75E-01	-0.235 056	6.56E-01	0.323 435 5	-2.11E-01	-0.096 922	0.031 265 3
0	0.296 154 5	0.096 590 1	-0.450 42	-0.146 115	0.183 822 4	0.055 128 2	-0.031 267
0	-0.201 998	-0.048 531	0.317 041 6	0.075 714 8	-0.139 648	-0.030 623	0.026 151 3
0	0.142 428 2	0.026 717 3	-0.226 756	-0.042 27	0.103 351 1	0.017 634 1	-0.020 291
0	-0.100 983	-0.015 273	0.162 014 3	0.024 348 8	-0.075 209	-0.010 332	0.015 158 4
0	0.070 660 8	0.008 773 3	-0.113 895	-0.014 053	0.053 459 4	0.006 029 2	-0.010 952
0	-0.047 964	-0.004 905	0.077 547 2	0.007 881 8	-0.036 665	-0.003 41	0.007 595 4
0	0.030 912 2	0.002 581 8	-0.050 088	-0.004 16	0.023 806 1	0.001 813 1	-0.004 974
0	-0.018 256	-0.001 188	0.029 630 4	0.001 918 4	-0.014 142	-0.000 844	0.002 977 1

图 2 系数矩阵图

Fig.2 Coefficient matrix diagram

观察发现:偶数子滤波器具有对称性,奇数子滤波器具有反对称性,验证了式(3);其次,当子滤波器的数量和阶数足够大时,系数矩阵包含相当数量的零或趋于零的元素,在低数阶置零可以省去乘法器的使用,而在高数阶置零可以同时省去加法器和乘法器。

## 2 基于 Minimax 的稀疏 VFD 滤波器

### 2.1 基于稀疏约束的代价函数建立

基于第1节分析:最优VFD滤波器往往具有较多的近零系数。若将这些近零系数设为0,即将稀疏约束理论引入滤波器系数优化中,可以在系数对称性的基础上,进一步降低滤波器的复杂度。求解稀疏设计问题实质是一个 $L_0$ 范数问题,这是一个非确定性多项式时间(Non-deterministic polynomial-time, NP)-Hard问题,且高度非凸优化,很难直接求得最优解。文献[15-16]指出,在一些松弛条件下,可以将其转换成 $L_1$ 范数进行求解。此外,滤波器的稀疏性与它的阶数有一定关系,使用更高阶的滤波器可以获得更稀疏的解<sup>[17]</sup>。然而,这并不代表可以通过增加滤波器阶数获得低复杂度的VFD滤波器。因此,本文兼顾滤波器的稀疏度与阶数,将系数稀疏的极大极小设计表述为

$$\text{Minimize } \|e_H(\omega, p)\|_{\infty} + \lambda \sum_{n=0}^{N(I+1)+(N+1)I-1} \left\| \sum_{k=0}^n b_{N(I+1)+(N+1)I-k} \right\|_1 \quad (9)$$

$$e_H(\omega, p) = H(\omega, p) - H_d(\omega, p) = e_R(\omega, p) - je_1(\omega, p) \quad (10)$$

$$e_R(\omega, p) = 1 + f^T b_e - \cos(\omega p) \quad (11)$$

$$e_1(\omega, p) = g^T b_o - \sin(\omega p) \quad (12)$$

式中: $b = [b_e, b_o]^T$ 代表滤波器的系数向量,与文献[18]不同,本文将 $b_e$ 和 $b_o$ 组合求解,更具一般性; $0 \leq \lambda \leq 1$ 为惩罚因子, $\lambda$ 的值越大,稀疏项的权重越大; $\|\cdot\|_{\infty}$ 表示 $L_{\infty}$ 范数, $\|\cdot\|_1$ 表示 $L_1$ 范数。

观察式(9),第1项表示VFD滤波器的误差函数。第2项将所有系数组合为一个向量 $[b_1, b_2, \dots, b_{N(I+1)+(N+1)I}]$ 。为获得最优子滤波器数量,依次将向量中的元素 $b_{N(I+1)+(N+1)I}, b_{N(I+1)+(N+1)I-1}, b_{N(I+1)+(N+1)I-2}, \dots$ 设为0。

$$\rho(b) = \left\| \begin{array}{c} |b_{N(I+1)+(N+1)I}| \\ |b_{N(I+1)+(N+1)I-1}| + |b_{N(I+1)+(N+1)I-1}| \\ \vdots \\ |b_{N(I+1)+(N+1)I-1}| + |b_{N(I+1)+(N+1)I-1}| + \dots + |b_2| + |b_1| \end{array} \right\|_1 = \sum_{n=0}^{N(I+1)+(N+1)I-1} \left\| \sum_{k=0}^n b_{N(I+1)+(N+1)I-k} \right\|_1 \quad (13)$$

当 $\rho(b_i)$ 减小时,具有较大下标的系数项更易趋于零,降低了滤波器阶数。

利用基本线性代数运算,式(9)的稀疏设计可以进一步转化为

$$\text{Minimize } \|Ab - c\|_{\infty} + \lambda \sum_{n=0}^{N(I+1)+(N+1)I-1} \left\| \sum_{k=0}^n b_{N(I+1)+(N+1)I-k} \right\|_1 \quad (14)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} f^T & 0 \\ 0 & g^T \end{bmatrix}, \quad c = - \begin{bmatrix} 1 - \cos(\omega p) \\ -\sin(\omega p) \end{bmatrix} \quad (15)$$

由于 $L_1$ 范数满足范数三角不等式 $\left\| \sum_i b_i \right\| \leq \sum_i \|b_i\|$ 的性质<sup>[19]</sup>,本文使用该不等式减少嵌套求和项,使其更易计算。因此,式(14)近似于

$$\text{Minimize } \|Ab - c\|_{\infty} + \lambda \sum_{n=0}^{N(I+1)+(N+1)I-1} \sum_{k=0}^n \|b_{N(I+1)+(N+1)I-k}\|_1 \quad (16)$$

化简得到

$$\text{Minimize } \| \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{c} \|_{\infty} + \lambda \sum_{n=0}^{N(I+1)+(N+1)I-1} (N(I+1)+(N+1)I-n) \| b_{N(I+1)+(N+1)I-n} \|_1 \quad (17)$$

式(17)可以进一步转化为

$$\text{Minimize } \| \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{c} \|_{\infty} + \lambda \| \mathbf{G} \mathbf{b} \|_1 \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{G} = \text{diag}(1, 2, \dots, N(I+1)+(N+1)I) \quad (19)$$

## 2.2 稀疏权系数求解

针对基于 $L_1$ 范数的稀疏表示模型,本文采用交替方向乘子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)<sup>[20]</sup>进行系数求解。其基本思想是将代价函数分解为多个小型子问题,并交替求解这些子问题。ADMM将对偶上升法的可分解性与乘数法的优越收敛性相结合,适用于解决大规模分布式凸优化问题。根据上述代价函数式(18),引入辅助变量

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{d}_n^c \mathbf{b}_n \quad n = 1, 2, \dots, N(I+1)+(N+1)I \quad (20)$$

并将第1项重新表示为<sup>[21]</sup>

$$f(\mathbf{z}) = \left\| \sum_{n=1}^{N(I+1)+(N+1)I} \mathbf{z}_n - \mathbf{c} \right\|_{\infty} = \| \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{c} \|_{\infty} \quad (21)$$

式中: $\mathbf{d}_n^c$ 为矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{d}_1^c, \mathbf{d}_2^c, \dots, \mathbf{d}_{N(I+1)+(N+1)I}^c]$ 的第 $n$ 列向量,上标“c”代表列向量。因而,式(18)可以转化为

$$\begin{cases} \text{Minimize } f(\mathbf{z}) + \lambda \| \mathbf{G} \mathbf{b} \|_1 \\ \text{subject to } \mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\mathbf{Q} = \text{blkdiag}(\mathbf{d}_1^c, \mathbf{d}_2^c, \dots, \mathbf{d}_{N(I+1)+(N+1)I}^c)$ 。

将上述约束问题转化为如下的增广拉格朗日函数

$$L_{\rho}(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{z}) + \lambda \| \mathbf{G} \mathbf{b} \|_1 + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \| \mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{z} \|^2 \quad (23)$$

式中: $\rho > 0$ 为给定的惩罚参数, $\boldsymbol{\mu}$ 为拉格朗日乘子。利用对偶梯度下降法,得到如下的迭代求解公式

$$\mathbf{b}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{b}} L_{\rho}(\mathbf{b}, \mathbf{z}^k, \boldsymbol{\mu}^k) = f(\mathbf{z}^k) + \lambda \| \mathbf{G} \mathbf{b} \|_1 + (\boldsymbol{\mu}^k)^T (\mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{z}^k) + \frac{\rho}{2} \| \mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{z}^k \|^2 \quad (24)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}} L_{\rho}(\mathbf{b}^{k+1}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}^k) = f(\mathbf{z}) + \lambda \| \mathbf{G} \mathbf{b}^{k+1} \|_1 + (\boldsymbol{\mu}^k)^T (\mathbf{Q} \mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \| \mathbf{Q} \mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{z} \|^2 \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \rho (\mathbf{Q} \mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}) \quad (26)$$

根据实际情况设置迭代停止条件和系数置零门限值,以达到滤波器系数的优化设计目的。ADMM求解系数步骤如下:

- (1) 初始化变量, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{z}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{b}_0, \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}, k = 0$ ,并设置最大迭代次数以及系数置零门限值 $\gamma$ ;
- (2) 固定 $\mathbf{z}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ ,利用式(24)对 $\mathbf{b}$ 进行更新;
- (3) 固定 $\mathbf{b}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ ,利用式(25)对 $\mathbf{z}$ 进行更新;
- (4) 利用式(26)对 $\boldsymbol{\mu}$ 进行更新。

重复上述步骤,直至满足最大迭代次数,并判断 $\mathbf{b}$ 中每个元素是否小于门限值 $\gamma$ ,小于则置零,否则保留原值。

通过ADMM迭代算法对代价函数求解,得到 $\mathbf{b}_e$ 和 $\mathbf{b}_o$ 构成系数 $b(n, m)$ ,然后利用系数对称性和式(27)求得 $a(n, m)$ 。

$$\begin{cases} b(0, 2i) = a(0, 2i) & i = 1, 2, \dots, I \\ b(n, m) = 2a(n, m) & m = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (27)$$

### 3 实验分析

本节给出偶数阶滤波器的仿真实例,验证本文提出的稀疏VFD滤波器的有效性。首先选择相应的代价函数,利用ADMM进行系数求解,随后将其与极大极小(未稀疏)法<sup>[12]</sup>、最小二乘稀疏算法<sup>[14]</sup>设计的VFD滤波器进行性能对比。

#### 3.1 滤波器性能对比

设置滤波器的阶数 $N$ 为25,子滤波器的个数 $M$ 分别设为3、5、7、9,截止频率 $\omega_p$ 设为 $\pi$ ,惩罚因子 $\lambda = 0.1$ , $\rho = 0.9$ ,置零阈值 $\gamma = 10^{-6}$ 。分别利用最大幅度误差、归一化均方根误差(Normalized root mean square error, NRMSE)以及最大群延迟误差来评估滤波器的误差精度<sup>[17]</sup>,即

$$\epsilon_{\max} = \max \{20\lg|e_H(\omega, p)|\} \quad (28)$$

$$e_2 = \left[ \frac{\int_0^{\alpha\pi} \int_{-0.5}^{0.5} |e_H(\omega, p)|^2 dp d\omega}{\int_0^{\alpha\pi} \int_{-0.5}^{0.5} |H_d(\omega, p)|^2 dp d\omega} \right]^{1/2} \times 100\% \quad (29)$$

$$\epsilon_{p\max} = \max \{|\tau(\omega, p) - p|\} \quad (30)$$

3种误差 $\epsilon_{\max}$ 、 $e_2$ 、 $\epsilon_{p\max}$ 对比结果如表1所示。图3~5分别为 $N=25$ 、 $M=7$ 时,3种算法设计的VFD滤波器的幅频响应误差图,最大幅度误差分别为 $-20.10$ 、 $-20.78$ 、 $-16.41$  dB。结合表1可以发现,本文设计的稀疏滤波器能保持与未稀疏滤波器相当的误差,从而验证了本文算法的精确度。并且相较于

表1 3种滤波器的性能对比

Table 1 Performance comparison of three kinds of filters

$M$	本文算法			极大极小(未稀疏)算法			最小二乘稀疏算法		
	$\epsilon_{\max}$	$e_2$	$\epsilon_{p\max}$	$\epsilon_{\max}$	$e_2$	$\epsilon_{p\max}$	$\epsilon_{\max}$	$e_2$	$\epsilon_{p\max}$
3	-17.87	0.006 9	0.003 5	-18.83	0.005 7	0.002 8	-14.51	0.008 2	0.004 1
5	-19.15	0.006 2	0.003 0	-20.01	0.004 9	0.002 5	-15.68	0.007 7	0.003 7
7	-20.10	0.005 8	0.002 7	-20.78	0.004 7	0.002 4	-16.41	0.007 5	0.003 5
9	-20.41	0.005 8	0.002 7	-20.97	0.004 7	0.002 3	-16.32	0.007 4	0.003 4

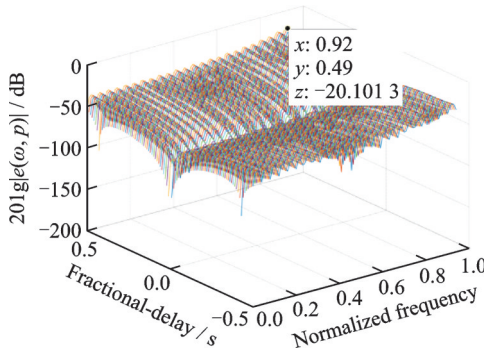


图3 稀疏极大极小VFD滤波器的幅频误差图

Fig.3 Magnitude error of the sparse minimax VFD filter

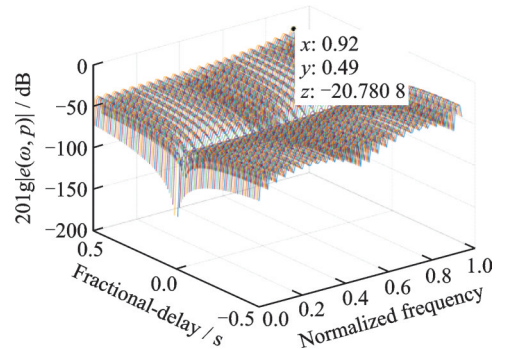


图4 稀疏前VFD滤波器的幅频误差图

Fig.4 Magnitude error of the non-sparse VFD filter



最小二乘稀疏法设计的VFD滤波器,本文算法的幅度误差降低了3.69 dB,时延误差减少了0.000 8,因此本文提出的稀疏算法在误差精度上优于最小二乘稀疏算法。

接下来,对算法的幅频、相频响应进行对比分析。令输入参数  $N=25, M=7, \omega_p=\pi, p \in [-0.5, 0.5]$ , 图6、7分别为两种稀疏算法设计的VFD滤波器的幅频曲线图。可以看出,本文设计的滤波器具有较平坦的幅频特性,归一化后的幅值接近于1,最大波动分别只有0.03,最小二乘稀疏算法的最大波动有0.03。图8给出了在时延  $p=0.3$  时,3种VFD滤波器的相频曲线图。相较于未稀疏滤波器,两种稀疏滤波器的波动分别为0.01、0.03。因此,本文设计的稀疏VFD滤波器具有更平坦的幅相特性。

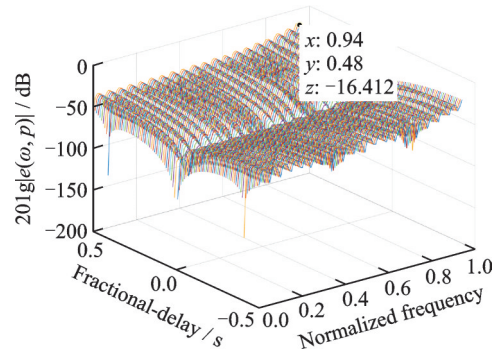


图5 最小二乘稀疏VFD滤波器的幅频误差图  
Fig.5 Magnitude error of the sparse weighted least squares (WLS) VFD filter

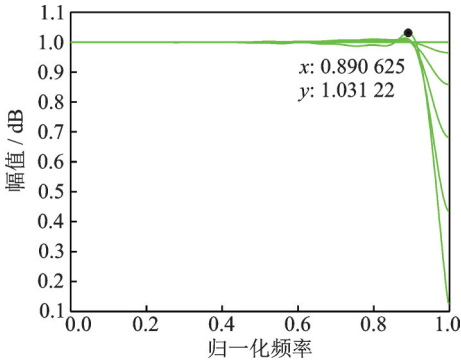


图6 极大极小稀疏VFD滤波器的幅频曲线图

Fig.6 Magnitude response of the minimax sparse VFD filter

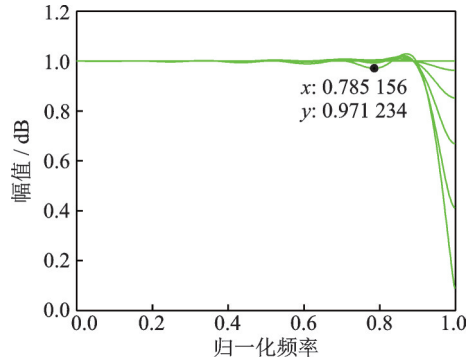


图7 最小二乘稀疏VFD滤波器的幅频曲线图

Fig.7 Magnitude response of the WLS sparse VFD filter

### 3.2 系统复杂度分析

为验证算法复杂度,定义  $\eta$  为评估零值系数的百分比,表达式为

$$\eta = \frac{\text{Num}_0}{\text{Num}} \times 100\% \quad (31)$$

式中:  $\text{Num}_0$  为零值系数的数量,  $\text{Num} = (2N + 1)(M + 1)$  为滤波器系数的总数量。

表2给出了  $N=25, M=3, 5, 7, 9, \omega_p=\pi$  时,3种算法设计的VFD滤波器的零系数个数  $\text{Num}_0$  (括号内数据)、CPU运行时间  $t_c$ 、迭代次数  $T_{it}$  的对比。观察发现,  $M=7$  时,本文算法的稀疏度为71.42%,最小二乘稀疏算法的稀疏度为57.14%,相较于未稀疏的滤波器,零系数个数分别增加了40.05%、25.77%。随着子滤波器个数  $M$  的增加,这种增加趋势越来越明显,CPU运行时间也大大缩短。这表明,在满足频率响应要求的同时,本文算法有效降低了滤波器的实现复杂度,具有较高的稀疏度。

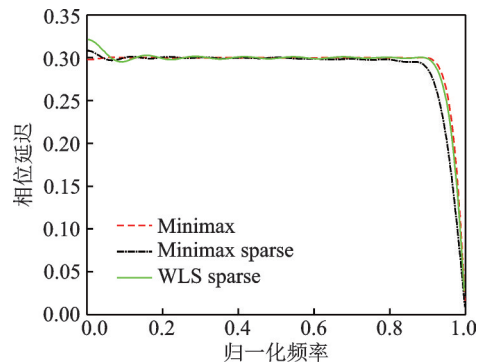


图8  $p=0.3$  时3种滤波器的相频曲线图

Fig.8 Phase frequency response of three kinds of filters with  $p=0.3$

表2 3种滤波器的零系数个数、运行时间和迭代次数对比

Table 2 Comparison of the number of the zero coefficients, CPU execution time and iterations for three kinds of filters

$M$	本文算法			极大极小(未稀疏)算法			最小二乘稀疏算法		
	$\eta/\%$	$t_c/s$	$T_{it}$	$\eta/\%$	$t_c/s$	$T_{it}$	$\eta/\%$	$t_c/s$	$T_{it}$
3	42.64(87)	0.35	39	38.23(78)	0.42	18	44.11(90)	0.41	42
5	59.21(151)	0.52	40	36.07(92)	0.64	18	47.84(122)	0.91	43
7	71.42(255)	1.00	40	31.37(112)	1.38	19	57.14(204)	2.18	43
9	79.52(365)	2.29	40	32.89(151)	2.91	19	71.78(262)	3.40	43

接下来对所提稀疏VFD滤波器的系统复杂度进行分析,详细说明系统所需的乘法器和加法器的数量。偶数阶条件下,未稀疏VFD滤波器需要个390个乘法器和244个加法器,最小二乘稀疏需要306个乘法器和152个加法器,而本文提出的稀疏VFD滤波器只需204个乘法器和101个加法器,分别减少了47.69%、58.60%。由此得出结论,本文提出的稀疏VFD滤波器的设计方法大大减少了乘法器和加法器的数量,从而降低了系统的复杂度,并且相较于最小二乘稀疏滤波器,具有更低的系统复杂度。

#### 4 结束语

本文提出了一种低复杂度的VFD滤波器设计方法,该方法在极大极小准则下,将稀疏约束理论引入到滤波器系数优化中,大大减少了乘法器和加法器的使用。实验结果表明,与未经稀疏处理的滤波器和最小二乘稀疏滤波器相比,本文设计的VFD滤波器系统复杂度更低,运算速度更快,在宽带阵列的时延补偿、采样率转换和波束形成等方面具有更广泛的应用前景。

#### 参考文献:

- [1] KOKILA R, CHITHRA K, DHILSHA R. Wideband beamforming using modified Farrow structure FIR filtering method for sonar applications[C]//Proceedings of 2019 International Symposium on Ocean Technology (SYMPOL). [S.l.]: IEEE, 2019: 21-28.
- [2] JUN W, DUO-DUO C, FAN Y. Aperture effect influence and analysis of wideband phased array radar[J]. Procedia Engineering, 2012, 29: 1298-1303.
- [3] FU W, JIANG D, SU Y, et al. Implementation of wideband digital transmitting beamformer based on LFM waveforms[J]. IET Signal Processing, 2017, 11(2): 205-212.
- [4] FARROW C W. A continuously variable digital delay element[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems. [S.l.]: IEEE, 1988: 2641-2645.
- [5] CHU C W K. Optimal design of farrow variable fractional delay filters[D]. Singapore: Curtin University, 2017.
- [6] TIANBO D. Symmetry-based low-complexity variable fractional-delay FIR filters[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Communication and Information Technologies. Sapporo, Japan: IEEE, 2004: 194-199.
- [7] DENG T B. Symmetric structures for odd-order maximally flat and weighted-least-squares variable fractional-delay filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54(12): 2718-2732.
- [8] DENG T B, YONG L. Weighted-least-squares design of variable fractional-delay fir filters using coefficient symmetry[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(8): 3023-3038.
- [9] ZHAO R, LAI X, LIN Z, et al. A matrix iterative algorithm for the WLS design of variable fractional delay FIR filters[C]//Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP). [S.l.]: IEEE, 2016: 632-636.
- [10] TSUI K M, YEUNG K S, CHAN S C, et al. On the minimax design of passband linear-phase variable digital filters using semidefinite programming[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(11): 867-870.



- [11] DENG T B. Decoupling minimax design of low-complexity variable fractional-delay FIR digital filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(10): 2398-2408.
- [12] DENG T B. Minimax design of low-complexity even-order variable fractional-delay filters using second-order cone programming [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2011, 58(10): 692-696.
- [13] 黄翔东, 徐婧文, 张博, 等. 低复杂度的可变分数时延滤波器设计[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(4): 985-991.  
HUANG Xiangdong, XU Jingwen, ZHANG Bo, et al. Low complexity design of variable fractional delay filters[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(4): 985-991.
- [14] LU W S, HINAMOTO T. Digital filters with sparse coefficients[C]//Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. [S.l.]: IEEE, 2010: 169-172.
- [15] JIANG A, KWAN H K, TANG Y, et al. Sparse FIR filter design via partial 1-norm optimization[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 67(8): 1482-1486.
- [16] 吴尘, 徐新洲, 王浩, 等. 基于模拟退火算法的稀疏系数抽取滤波器设计[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2015, 45(4): 631-634.  
WU Chen, XU Xinzhou, WANG Hao, et al. Design of sparse coefficient extraction filter based on simulated annealing algorithm[J]. Journal of Southeast University: Natural Science Edition, 2015, 45(4): 631-634.
- [17] JIANG A, KWAN H K, ZHU Y, et al. Design of sparse FIR filters with joint optimization of sparsity and filter order[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2014, 62(1): 195-204.
- [18] ZHAO R, HONG X. Matrix-based algorithms for the optimal design of variable fractional delay FIR filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2019, 66(12): 4740-4752.
- [19] MATSUOKA R, KYOCHI S, ONO S, et al. Joint sparsity and order optimization based on ADMM with non-uniform group hard thresholding[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2017, 65(5): 1602-1613.
- [20] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine learning, 2011, 3(1): 1-122.
- [21] SHENTU X, LAI X, WANG T, et al. Efficient ADMM-based algorithm for regularized minimax approximation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2023, 30: 210-214.

## 作者简介:



王静雯(1998-),女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理,E-mail:1796297279@qq.com。



周文静(1995-),女,博士研究生,研究方向:阵列信号处理,E-mail:15637357907@163.com。



沈明威(1981-),通信作者,男,教授,研究方向:空时自适应处理、SAR/GMTI等,E-mail:smwhhu1981@163.com。



韩国栋(1980-),男,研究员,研究方向:电子系统设计、相控阵天线等,E-mail:laorieshan@163.com。

(编辑:陈珺)