

## 多粒度三支决策研究进展

钱进<sup>1</sup>, 郑明晨<sup>1</sup>, 周川鹏<sup>1</sup>, 刘财辉<sup>2</sup>, 岳晓冬<sup>3</sup>

(1. 华东交通大学软件学院, 南昌 330013; 2. 赣南师范大学数学与计算机学院, 赣州 341000; 3. 上海大学未来技术学院, 上海 200444)

**摘要:** 多粒度三支决策利用三支决策理论, 从多视角、多层次对复杂问题进行数据分析与处理, 逐渐成为了一种高效、可靠的智能决策方法。本文对多粒度三支决策的研究工作进行综述, 主要介绍了多粒度融合策略、多视角三支决策和多层次三支决策, 以及从定性和定量两个角度探讨了多粒度三支决策, 讨论了不同多粒度三支决策模型之间的关系, 并指出了多粒度三支决策研究中存在的若干问题, 为该领域的深入研究提供参考。

**关键词:** 多粒度计算; 三支决策; 粒计算; 知识获取; 信息融合

**中图分类号:** TP18 **文献标志码:** A

### Recent Advancement in Multi-granulation Three-Way Decisions

QIAN Jin<sup>1</sup>, ZHENG Mingchen<sup>1</sup>, ZHOU Chuanpeng<sup>1</sup>, LIU Caihui<sup>2</sup>, YUE Xiaodong<sup>3</sup>

(1. School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China; 3. School of Future Technology, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** Multi-granulation three-way decisions utilizes three-way decision theory to analyze and process complex problems from multiple of views and levels, gradually becoming an efficient and reliable intelligent decision-making method. This paper reviews the research work on multi-granulation three-way decisions, mainly introduces multi-granulation fusion strategy, multiview three-way decisions, and multilevel three-way decisions, discusses multi-granulation three-way decisions from both qualitative and quantitative perspectives, illustrates the relationships between different multi-granulation three-way decisions models, and points out several problems for the existing multi-granulation three-way decisions. The obtained results can provide some references for the deep research in this field.

**Key words:** multi-granulation computing; three-way decisions; granular computing; knowledge acquisition; information fusion

### 引言

随着互联网和数据存储技术的快速发展, 各行各业中大规模复杂数据的产生和收集速度正在急剧

提升,复杂决策问题不断涌现<sup>[1-3]</sup>。决策数据呈现出的多模态和层次结构、决策过程中面临的不确定性以及决策结果的时效性,已经成为大数据决策与知识发现所面临的主要挑战<sup>[4-5]</sup>。考虑这些数据往往具有海量性、异构性、不确定性、多模态和层次结构等特征,单纯利用传统决策理论和分析方法进行问题求解将变得更加困难。事实上,决策数据内部隐藏着大量有效的决策信息,从现有的决策数据出发,运用数据挖掘技术对决策数据进行客观的分析与评估,并将其转化为有效的决策指标与知识,可为决策者提供可靠、合理的决策支持,这种数据驱动决策已经成为现代决策理论与方法的新趋势,成为近年来学术界的研究热点。

粒计算<sup>[6-9]</sup>是当前计算智能研究领域模拟人类思维和解决复杂问题的新方法,强调从多视角、多层次来理解和描述现实世界,通过对复杂数据进行信息粒化,用信息粒代替样本作为计算的基本单元,选择与复杂决策任务最相关的粒度空间,在不同粗细粒层下进行问题求解,将极大地降低决策任务复杂性,更能够提高决策结果精准性。粒计算逐渐成为不确定性问题求解的重要理论,尤其多粒度计算已成为了人类认知与实践的重要特征<sup>[10]</sup>。基于多粒度的数据建模就是通过获得的信息粒集和多个粒结构进行复杂数据分析,从不同视角挖掘出可用的知识并形成有效的局部决策,通过融合多视角多层次局部决策,形成一个多粒度全局精准决策。与此同时,在粒计算深入研究中,又一种新的处理不确定性决策的理论——三支决策<sup>[11]</sup>应运而生。它主要将整体分为概率正区域、概率负区域和概率边界域3个相对独立部分,并针对每一个区域制定相应的处理策略,分别做出接受、拒绝和延迟三类决策。2023年,Yao<sup>[12]</sup>进一步提出了一种新的三支决策“分治优”(Triading-acting-optimizing,TAO)模型来描述和解释三支决策中的3个主要任务,即如何划分3个区域、三分之后的区域分别采取什么样的“治略”以及如何评价和优化“三分”及“治略”的效果。这些都是三支决策研究的重点问题。实际上,它主要将复杂问题求解视为动态序贯决策过程,通过不断缩小延迟决策的区域,以最小代价获得问题的最终解,每一次三支划分的过程都是对上一个粒度层次信息的细化,而整体决策过程所经过的决策路径就是一个分层递阶的多层次决策求解过程,这更符合人类多粒度认知机理和精准决策能力。

多粒度三支决策利用三支决策理论,从多视角、多层次对复杂问题进行数据分析与处理,逐渐成为一种高效、可靠的智能决策方法。研究者从多视角、多层次构建不同粒结构和粗细粒层,提出了多粒度粗糙集、层次粗糙集和多尺度数据分析等粒计算模型。Qian等<sup>[10]</sup>利用信息系统中多个属性子集构成多个粒度空间,在属性子集间进行“且”“或”逻辑运算,提出了多粒度粗糙集,并在此基础上提出了乐观多粒度和悲观多粒度粗糙集模型。Feng等<sup>[13]</sup>通过构建概念层次树将一维数据转化为多维数据,提出了层次粗糙集模型。Wu等<sup>[14]</sup>从数学的角度,通过函数映射的方法将数据映射为多个尺度,提出了一种不同粒度水平的多尺度数据的粒度计算形式方法,并依此提出多尺度信息系统的粗糙集数据分析模型。Yao等<sup>[15]</sup>提出了序贯三支决策模型,通过粒度粗细变化对目标概念的边界域持续进行分析处理来解决三分类问题。其次,为了处理决策过程和决策结果不确定性和成本问题,引入了序贯三支决策和粒计算的统一模型。Hao等<sup>[16]</sup>将多尺度决策表引入序贯三支决策,研究动态序贯更新信息的最优尺度选择问题。Qian等<sup>[17]</sup>将多粒度与三支决策结合起来,以典型的聚合策略实现了5个多粒度序贯三支决策模型,并通过选择具有嵌套关系的属性集,在多个粒度层次上进行序贯三支决策,从单一角度获得更精细的规则,提出了层次的序贯三支决策模型<sup>[18]</sup>。

目前,多粒度三支决策已经广泛应用于人们生活中,例如职称评审时,专家们从多视角来考察候选人的能力,注重科研的专家主要考察候选人的科研水平,而注重教学的专家着重考察候选人的教学工作等,这其实就是多视角三支决策;再例如人才招聘时,专家们都认为优秀的应聘者直接录用,一般的应聘者直接拒绝,而对于大部分良好的应聘者需要进一步研究决定,直到招录到满足要求的应聘者人数,这其实就是多层次(序贯)三支决策。更一般地,多粒度三支决策实际上同时从多视角、多层次进行

智能决策,已经成功应用于社交网络、三支决策推荐、人脸识别、图像处理以及垃圾邮件分类等领域。Chen等<sup>[19]</sup>设计了构造型的多粒度三支决策模型,对边界域中样本进行处理;Yu等<sup>[20]</sup>利用三支决策对社交网络中重叠区域进行检测与限定;Zhang等<sup>[21]</sup>集成三支决策和随机森林算法构建了三支推荐系统;Li等<sup>[22]</sup>通过构建同一图像的一系列粒结构将代价敏感序贯三支决策应用于人脸识别;Savchenko<sup>[23]</sup>研究了序贯三支决策在多类目标识别中的应用;Jiang等<sup>[24]</sup>提出了基于对象运动的三支决策有效性度量;Yue等<sup>[25]</sup>将三支决策理论与深度卷积神经网络相结合有效降低了图像分类任务中的决策风险;Yang等<sup>[26]</sup>将多粒度三支决策用于处理动态文本的情感分类问题减少了误分类代价。本文以多粒度三支决策为研究对象,系统归纳总结当前粒计算领域中已开展的多粒度三支决策研究进展,指出当前可能进一步需要研究的方向,为促进该领域的深入研究与发展提供理论参考。

## 1 多粒度三支决策理论

### 1.1 三支决策

假设信息系统  $S=(U, R)$ , 论域  $U=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是对象的非空有限集合;  $R$  是定义在论域  $U$  上的一种二元关系, 三支决策通过映射  $f$  将论域  $U$  划分为 3 个两两不相交的区域  $R_1, R_2$  和  $R_3$ , 即  $f: U \rightarrow \{R_1, R_2, R_3\}$  对 3 个区域分别制定相应的决策  $S_1, S_2$  和  $S_3$ , 其中,  $R_1, R_2, R_3 \subseteq U, U = R_1 \cup R_2 \cup R_3, R_1 \cap R_2 = \emptyset, R_1 \cap R_3 = \emptyset, R_2 \cap R_3 = \emptyset$ 。如果 3 个区域中有且仅有 1 个区域为空集, 则三支决策转化为二支决策问题。

三支决策理论框架可由 Yao<sup>[12]</sup> 提出的 TAO 模型来表示。TAO 模型进一步阐释了三支粒计算思想的作用和意义, 图 1 为该模型的基本框架。

第一阶段“三分”, 把整个论域  $U$  划分成 3 个互不相交的区域。第二阶段“治略”是对上一个阶段划分出的不同区域采取不同的决策, 使得整体效用最大化或者成本代价最小化。第三阶段“优化”是通过评价函数来对两个阶段的结果进行效果评估, 以便改进三支决策。上述 3 个阶段相互作用、相互影响: “三分”是“治略”的前提, “治略”是“三分”的目的<sup>[27]</sup>, “优化”是“三分”和“治略”的监督保障。如何构造论域的三分区域, 如何设计“三分”策略, 如何衡量“三分”和“治略”的成效, 是三支决策 TAO 模型的核心任务。

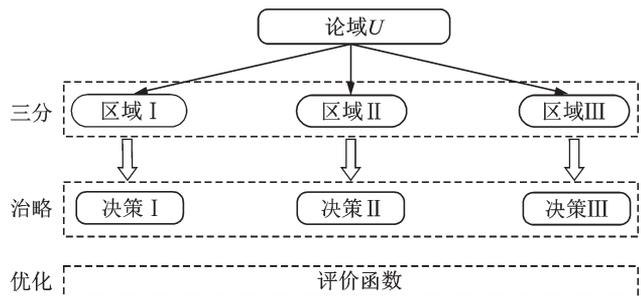


图1 三支决策 TAO 模型框架

Fig.1 TAO model of three-way decisions

### 1.2 多粒度融合策略

多粒度思想是以多视角、多层次为出发点, 对数据进行不同的粒化, 从而构造多种粒度空间, 从多个维度观察和分析问题的思维范式。在复杂问题的分析和求解过程中, 人们往往会从多个角度来审视和理解问题, 并且每个角度都是分层次、循序渐进的。多粒度建模可以在不同的粒度下描述和解决同一个问题。在经典 Pawlak 粗糙集模型中, 通常在单一的粒度下描述目标概念, 但是在现实决策中, 单一粒度下进行分析往往不能满足用户需求, 因此通常需要通过论域上多个二元关系来同时刻画一个目标概念进行决策。为了更广泛地将粗糙集理论运用于实际, Qian 等<sup>[10]</sup>通过多重等价关系定义了目标概念的上下近似, 提出了多粒度粗糙集模型, 并给出“求同存异”的乐观融合策略和“求同排异”的悲观融合策略两种融合策略, 在乐观多粒度粗糙集模型中, 每个上下近似都采用“求同存异”的聚合策略, 当存在

多个独立的粒度结构时,只需要一个粒度结构就可以满足等价类和目标概念之间的包含关系。与乐观多粒度粗糙集不同的是,悲观多粒度粗糙集上下近似则都采用“求同排异”的策略,必须取所有的独立粒度结构的交集,即所有的粒度结构必须满足等价类和目标概念之间的包含关系。下面给出经典粗糙集模型下乐观多粒度粗糙集和悲观多粒度粗糙集的上下近似定义。

**定义 1** 在决策信息系统  $DT=(U, At=CUD, \{V_a|a \in At\}, \{I_a|a \in At\})$  中,给定  $m$  个粒结构  $GS=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}, \forall X \subseteq U$ , 乐观下近似和上近似分别为

$$\sum_{i=1}^m A_i^O(X) = \{x \in U | [x]_{A_1} \subseteq X \vee [x]_{A_2} \subseteq X \vee \dots \vee [x]_{A_m} \subseteq X\}, \overline{\sum_{i=1}^m A_i^O(X)} = \sim \sum_{i=1}^m A_i^O(\sim X) \quad (1)$$

**定义 2** 在决策信息系统  $DT=(U, At=CUD, \{V_a|a \in At\}, \{I_a|a \in At\})$  中,给定  $m$  个粒结构  $GS=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}, \forall X \subseteq U$ , 悲观下近似和上近似分别为

$$\sum_{i=1}^m A_i^P(X) = \{x \in U | [x]_{A_1} \subseteq X \wedge [x]_{A_2} \subseteq X \wedge \dots \wedge [x]_{A_m} \subseteq X\}, \overline{\sum_{i=1}^m A_i^P(X)} = \sim \sum_{i=1}^m A_i^P(\sim X) \quad (2)$$

式中:  $U/[x]_{A_i}$  表示  $A_i$  粒结构下对论域  $U$  的划分;  $O$  表示采取乐观融合策略;  $P$  表示采取悲观融合策略;  $\sim X$  表示  $X$  的补集。

传统乐观和悲观融合策略下的上下近似要么都采用乐观策略,要么都采用悲观策略,是多约束问题的两种极端的情况。然而,现实情况下往往需要采取折中融合策略。钱进<sup>[28]</sup>研究了多粒度融合策略,给出了乐观-悲观和悲观-乐观两种较为折中的融合策略,在乐观-悲观多粒度决策理论粗糙集中,下近似采用“求同存异”策略,上近似采用“求同排异”策略;悲观-乐观多粒度决策理论粗糙集与之相反:下近似采用“求同排异”策略,上近似采用“求同存异”策略,如图 2 所示,为求解多粒度复杂问题提供了新的思路。

一般来说,不同的多粒度融合策略可以得到不同的决策结果,有效地处理基于单粒度无法解决的 3

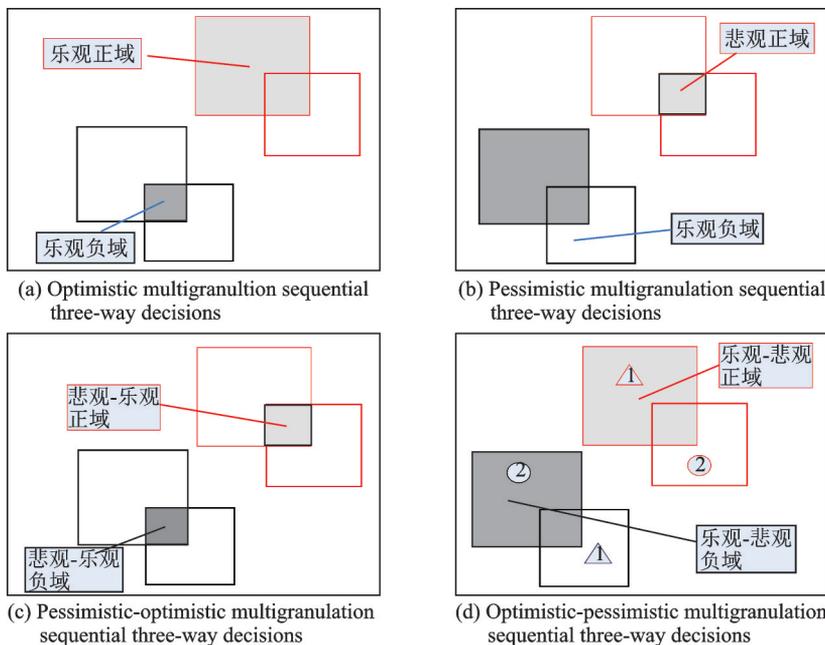


图 2 乐观和/或悲观策略下两个粒度空间融合结果示例图

Fig.2 Example graph of fusion results of two granular spaces under optimistic and/or pessimistic strategies

种情形:(1)对于同一个对象,在不同的属性集下的取值不同,这样就导致了商集之间无法进行交运算,而目标概念也难以通过交运算来近似;(2)在某些决策过程中,不同决策者都会独立地做出决策,任意两个商集之间的交运算会存在决策冗余的情况;(3)使用粗糙集方法从分布式信息系统中提取决策规则时,没有必要在所有站点上进行交运算。

### 1.3 多视角三支决策

在开放的动态环境下,决策数据并不总是一成不变的,由于社会经验存在着个体差异性,决策对象、对象的属性和对象的属性值在决策过程中可能发生变化,看待同一问题容易产生不同的见解,使决策问题更加复杂。如果仅从单一角度来理解现实问题,往往容易断章取义。多视角是从多个不同的粒度空间去观察和描述问题,强调对问题的看待是多角度立体化的,有助于对复杂问题获得更全面的理解和表示。在实际决策过程中,可以通过不同的视角将复杂问题分解成若干个子问题,对于每个子问题可以通过引入三支决策的思想得到属于正域的有效解,最后通过对有效解的集成求得整个复杂问题的解。多视角三支决策的核心思想如图3所示。

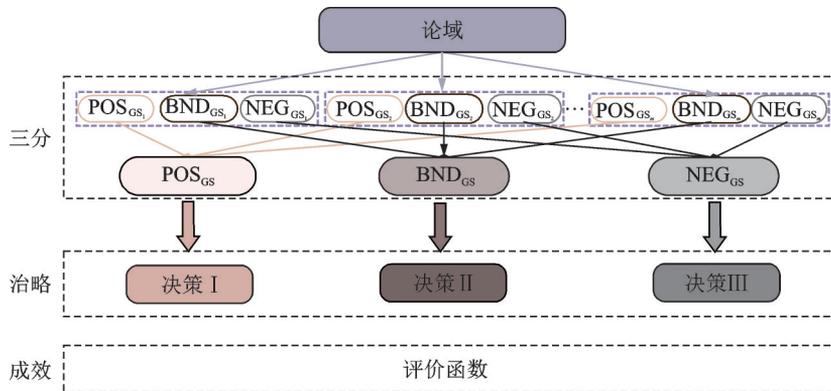


图3 多视角三支决策

Fig.3 Multiview three-way decisions

多视角三支决策模型首先从不同的视角出发将论域中的属性集分解成若干个属性子集,在每个属性子集中引入三支决策思想,将其分为正域 $POS_{GS}$ 、负域 $NEG_{GS}$ 和边界域 $BND_{GS}$ ,并采取不同的融合策略来融合上下近似并导出对应的决策规则,不同的融合策略会导致不同的概率正区域 $POS_{GS}$ 、边界区域 $BND_{GS}$ 和负区域 $NEG_{GS}$ 。因此,如何对多视角粒度结构下的概率正负区域进行融合是一个重要的研究课题。在某些情况下,解决复杂问题的更合理决策是在多视角粒度结构下做出的。在多视角三支决策模型方面,Liu等<sup>[29]</sup>研究了不完备信息系统下三支决策模型;Liang等<sup>[30]</sup>研究了从直觉模糊决策粗糙集模型中提取三支决策的方法;Qi等<sup>[31]</sup>提出了三支概念和三支概念格模型;Qian等<sup>[32]</sup>提出了平均、乐观和悲观三类多粒度决策粗糙集模型;Hu等<sup>[33]</sup>研究了三支决策空间和多粒度三支决策;Feng等<sup>[34]</sup>研究了三支决策下变精度多粒度模糊粗糙集模型的不确定性和属性约简方法;Xu等<sup>[35-36]</sup>提出了泛化的多粒度双量化决策粗糙集模型以及在序信息系统下的多粒度决策粗糙集模型;Yang等<sup>[37]</sup>提出了测试代价敏感的多粒度粗糙集模型;Yang等<sup>[38]</sup>提出了不完备信息系统下多粒度决策粗糙集模型;Lin等<sup>[39]</sup>提出了多源模糊信息系统下模糊多粒度决策粗糙集模型;Sun等<sup>[40]</sup>构建了双论域下多粒度模糊决策粗糙集模型的三支群决策模型;Chakhar等<sup>[41]</sup>提出了面向群决策的基于支配关系的粗糙集方法。此外,Yang等<sup>[42]</sup>提出了决策粗糙集下的多代理三支决策模型。目前多视角三支决策主要从3个方面进行扩展<sup>[43]</sup>:第一种是将等价关系集替换成其他二元关系<sup>[44-45]</sup>从而定义广义多视角三支决策;第二种是从

单论域扩展到双论域<sup>[46-47]</sup>,即各种类型的双论域多粒度粗糙集及其在多属性决策中的应用;第3种是将多粒度建模与其他理论(如决策粗糙集<sup>[48-49]</sup>、证据理论<sup>[50]</sup>)相结合,得到表达能力更强的多视角三支决策模型。

### 1.4 多层次三支决策

多层次三支决策主要通过使用一组属性来描述对象,并基于该属性集构造了序贯的层次来进行递增式的决策,即多层次、多步骤的三支决策模型。Yao<sup>[51]</sup>提出了粒度结构由粒、层次和层次结构组成的概念,认为粒是描述整体事物中的核心元素,层次由一类粒填充,它以特定级别的粒来描述整个粒度,层次从上到下按照粒度从小到大的顺序排列形成层次结构。多层次思想认为每个层次下的信息呈现出从粗粒度到细粒度或从细粒度到粗粒度的规律,强调对问题的理解是层次化的。其核心思想如图4所示。在决策信息系统  $DT=(U, At=C \cup D, \{V_a|a \in At\}, \{I_a|a \in At\})$  中,给定  $GS=(GS_1, GS_2, \dots, GS_m)$  是一个多层次的粒度结构,给定两个阈值参数  $\alpha, \beta (0 \leq \beta < \alpha \leq 1)$ ,通过借助阈值参数  $\alpha, \beta$  反复对论域  $U$  进行三分粒化。以层次1为例,即在  $GS_1$  粒度结构下,约束条件大于等于  $\alpha$  的对象划分到正域  $POS_{GS_1}(D_j)$ ,小于等于  $\beta$  的对象划分到负域  $NEG_{GS_1}(D_j)$ ,介于  $\alpha, \beta$  之间的对象划分到边界域  $BND_{GS_1}(D_j)$ ,以此讨论三分类问题,实现层次决策过程。

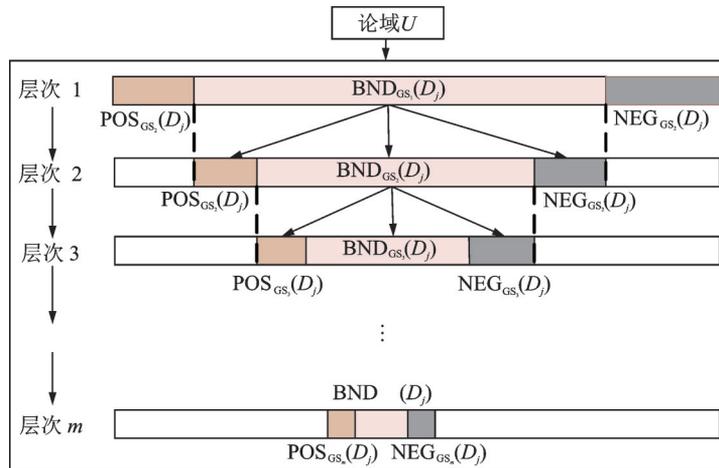


图4 多层次三支决策

Fig.4 Multilevel three-way decisions

在解决实际问题的过程中,对论域  $U$  进行多次更新是一个边界域逐渐减少的过程,因为序贯三支决策的目的是通过暂时延缓决策的方式以减少错误决策的代价,如果不断地补充有效信息,那么边界域最终有可能变成空集,三分类问题也就退化为二分类问题,从而做出误分类代价较少的决策。在多层次三支决策模型方面,Yao<sup>[52]</sup>给出了序贯三支决策模型;Yang等<sup>[53]</sup>探讨了多层次增量式学习下的序贯三支决策统一模型;Sang等<sup>[54]</sup>给出了一种基于动态粒度下的决策粗糙集模型;Gao等<sup>[55]</sup>提出了一种考虑行动策略的序贯三支决策模型;Zhang等<sup>[56]</sup>提出了基于惩罚函数的一种新型序贯三支决策模型;Fang等<sup>[57]</sup>提出了粒度驱动的序贯三支决策模型。之后,一些学者又相继提出了各种各样的扩展模型。为了解决序贯三支决策模型中论域中的一个对象可能属于多个决策类继而产生决策冲突的问题,Xu等<sup>[58]</sup>将序贯三支决策与三种处理多类决策的方法相结合,提出了在决策过程中解决决策冲突的方法。

在序贯三支决策模型中,分类精确性是一个很重要的问题,钱进等<sup>[59]</sup>通过概念层次树将概念分层次,构建层次决策表,提出了一种基于动态阈值的层次序贯三支决策模型及相应的算法,在保证决策精确度的情况下,获取泛化的规则。然而,在序贯三支决策模型中,由于每一层的边界域都作为下一层论域进行考虑,而边界域中可能存在一部分的对象具有较大的不确定性,在下一层仍然无法处理,只有添加了更多的信息之后才能做出更精准的决策,造成了延迟代价的增加和决策精度的下降,因此,张清华等<sup>[60]</sup>从提高分类精度与减少不确定性的动机两个方面综合考虑并结合博弈论的思想构建了基于错误分类率与边界域不确定性博弈的序贯三支决策模型,得到了具有更小的错误分类率以及更合理的阈值结构的决策阈值;陈文彬等<sup>[61]</sup>提出了基于不确定性的跳阶序贯三支决策模型,在提升分类精度的同时减少了延迟代价。

1.5 多粒度三支决策

在很多实际的决策问题中,多视角和多层次在整体中相互作用,在划分多层次空间的过程中会采用多视角的思想;运用多视角思想处理决策问题时自然会形成多层次的粒度结构。在决策过程中,对象认识的粒度由粗逐渐变细,能够让边界域里的对象逐渐做出准确决策。文献[17]指出,将多视角和多层次结合起来,有利于解决复杂问题、做出更加合理的决策,并给出了相应的理由和实例证明。钱进等<sup>[59]</sup>从粒计算的多层次多视角两个角度同时出发,融合了多粒度决策理论粗糙集模型和层次粗糙集模型,并运用序贯多步骤三支决策循序渐进地做出合理决策,提出了多粒度层次序贯三支决策并设计了相应的规则提取算法。图5描述了多粒度层次决策过程,给定多层次决策表  $MT = \{U, A_t = \{c_t^h \mid t=1, 2, \dots, m; h=1, 2, \dots, k\} \cup D, V, I\}$ , 其中,  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_F\}$  是  $A_t$  的  $F$  个属性子集簇,  $A_f = \{A_f^k, A_f^{k-1}, \dots, A_f^1\}$  ( $f=1, 2, \dots, F$ ) 表示  $k \sim 1$  层下的粒度空间,  $D_i^k$  是一个决策类,  $(\alpha, \beta)^l$  ( $l=1, 2, \dots, k$ ) 为动态阈值对,在  $k$  层级(最高层级)进行初步决策,用  $k$  层所对应的阈值对  $(\alpha, \beta)^k$  将对象划分为 3 个概率区域:正域  $POS_{A_i^k}^{(\alpha^k, \beta^k)}$  表示约束条件大于等于  $\alpha^k$  的对象,负域  $NEG_{A_i^k}^{(\alpha^k, \beta^k)}$  表示约束条件小于等于  $\beta^k$  的对象,边界域  $BND_{A_i^k}^{(\alpha^k, \beta^k)}$  表示介于  $\alpha, \beta$  之间的对象,边界域作为下一次序贯决策的论域,不同颜色的线条表示不同的聚合策略,  $k-1$  层级上的正域为  $k$  层获得的正域与当前序贯过程中获得的正域的并集。当  $h+1$  层级和  $h$

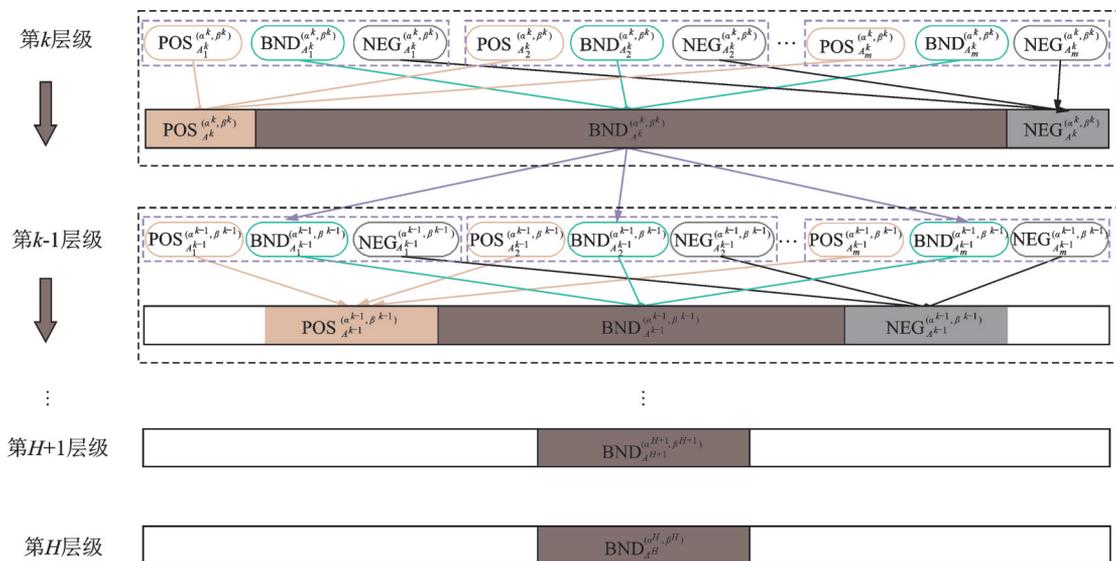


图5 决策类  $D_i$  下多粒度三支决策

Fig.5 Multi-granulation three-way decisions in decision class  $D_i$

层级的边界域相等时,序贯终止,得出最终决策。多粒度三支决策下的规则获取算法能够从复杂数据中获取简单泛化的决策规则有助于决策者做出更加合理的决策。

### 1.5.1 定性角度下的多粒度三支决策模型

Qian等<sup>[17]</sup>通过研究不同聚合策略,从定性角度(集合论)构造了乐观多粒度三支决策(Optimistic multigranulation sequential three-way decisions, OMS3WD)、悲观多粒度三支决策(Pessimistic multigranulation sequential three-way decisions, PMS3WD)、悲观-乐观多粒度三支决策(Pessimistic-optimistic multigranulation sequential three-way decisions, POMS3WD)和乐观悲观多粒度三支决策(Optimistic-pessimistic multigranulation sequential three-way decisions, OPMS3WD)。乐观和悲观的三支决策使用相同的策略来聚合上下近似。在现实情形下,还有可能存在两种折中的情况<sup>[62]</sup>:对下近似采用保守策略,对上近似采用激进策略可以得到悲观-乐观多粒度三支决策;对下近似采用激进策略,对上近似采用保守策略可以得到乐观-悲观多粒度三支决策。对于目前研究的模型主要有两种情形:一种是假设 $m$ 个粒度结构的 $\alpha$ 、 $\beta$ 值相等;另一种是假设它们不相等,即每个粒度结构都有独立的损失和代价函数。

**定义3** 给定 $m$ 个粒度结构 $GS=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,一个决策类 $D_q^l$ 和动态阈值参数序列 $(\alpha, \beta)^l = \{(\alpha^1, \beta^1), (\alpha^2, \beta^2), \dots, (\alpha^l, \beta^l)\}$ ,多粒度三支决策的下近似和上近似分别为

$$\underbrace{\sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha, \beta)^l}(D_q)} = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \underbrace{\sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)}, \quad \overline{\sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha, \beta)^l}(D_q)} = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \overline{\sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)} \quad (3)$$

式中: $U^1=U; U^{l+1}=\sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i) - \sum_{i=1}^m A_i^{\Delta, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)$ 是逐渐缩小的论域。

通过上下近似值,可以导出对应的正域、边界域和负域, $\Delta$ 表示动态阈值参数序列下的广义融合策略。下面以悲观-乐观融合策略下的多粒度三支决策为例。

**定义4** 给定 $m$ 个粒度结构 $GS=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,一个决策类 $D_q^l$ 和动态阈值参数序列 $(\alpha, \beta)^l = \{(\alpha^1, \beta^1), (\alpha^2, \beta^2), \dots, (\alpha^l, \beta^l)\}$ ,悲观-乐观多粒度三支决策模型的下近似和上近似分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^m A_i^{\text{PO}, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)} = \left\{ x | P(D_q^l[x]_{A_1}) \geq \alpha^l \wedge P(D_q^l[x]_{A_2}) \geq \alpha^l \wedge \dots \wedge P(D_q^l[x]_{A_m}) \geq \alpha^l, x \in U^l \right\} \\ \overline{\sum_{i=1}^m A_i^{\text{PO}, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)} = \left\{ x | P(D_q^l[x]_{A_1}) > \beta^l \vee P(D_q^l[x]_{A_2}) > \beta^l \vee \dots \vee P(D_q^l[x]_{A_m}) > \beta^l, x \in U^l \right\} \end{array} \right. \quad (4)$$

式中: $U^1=U; U^{l+1}=\sum_{i=1}^m A_i^{\text{PO}, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i) - \sum_{i=1}^m A_i^{\text{PO}, (\alpha^i, \beta^i)}(D_q^i)$ 是逐渐缩小的论域;PO表示采取悲观-乐观

的融合策略; $[x]_{A_i} (1 \leq i \leq m)$ 表示 $U^l/A_i$ 包含 $x$ 的等价类; $P(D_q^l[x]_{A_i}) (i=1, 2, \dots, m)$ 表示等价类 $[x]_{A_i}$ 关于决策类 $D_q^l$ 的条件概率。

### 1.5.2 定量角度下的多粒度三支决策模型

Qian等<sup>[63]</sup>讨论了具有多个不同阈值的多粒度结构的情况,提出了基于多阈值的多粒度三支决策模型,并从定量角度分析了可变多粒度序贯三支决策(Variable multigranulation sequential three-way decisions, VMS3WD)、加权多粒度序贯三支决策(Weighted multigranulation sequential three-way decisions, WMS3WD)和加权算术平均多粒度序贯三支决策(Weighted arithmetic mean multigranulation sequential three-way decisions, WAMMS3WD)3种多粒度序贯三支决策。可变多粒度序贯三支决策模型主要考虑满足用户要求的粒度结构数量,这样可以解决乐观的多粒度序贯三支决策过于松散,而悲观的则过

于严格的问题。加权多粒度序贯三支决策模型通过考虑不同粒度结构在决策中的重要性为其分配不同的权重来构造满足用户要求的粒度结构质量。为了同时满足用户要求的粒度结构数量和质量要求,采用决策分析中经常使用的“平均思想”设计了加权算术平均多粒度序贯三支决策模型。在该模型中,联合概率由同一对象在  $m$  粒度结构下的条件概率的均值估计。通过研究 OMS3WD、PMS3WD、VMS3WD、WMS3WD 和 WAMMS3WD 之间的关系,可以很容易得出其他 3 个模型的上下近似都在 OMS3WD 和 PMS3WD 之间。通过文献[63]中给出的定理,可以得出基于多阈值下不同的多粒度序贯三支决策之间的关系如图 6 所示。图中  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  为权重向量,满足  $w_i \in [0, 1]$  和  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ ;

$P(D_q^i | [x]_A)$  表示等价类  $[x]_A$  关于决策类  $D_q$  的条件概率。当可变阈值  $\delta = \frac{1}{m}$  时, VMS3WD 模型将变为 OMS3WD 模型;当可变阈值  $\delta = 1$  时, VMS3WD 模型将变为 PMS3WD 模型。由图可得 VMS3WD、WMS3WD 和 WAMMS3WD 模型为 PMS3WD 的变型。

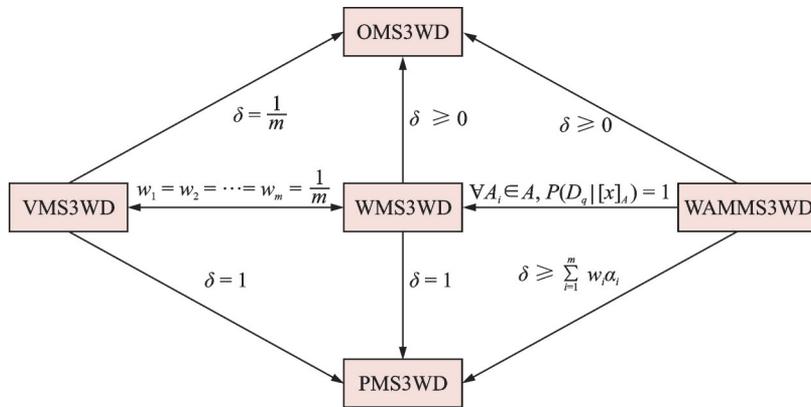


图 6 基于多阈值的 5 种多粒度三支决策的关系

Fig.6 Relationships of five kinds of multigranulation three-way decisions based on multiple thresholds

### 1.5.3 泛化多粒度三支决策

现有的多粒度三支决策通常假设类标签是平面的,很少关注具有层次性类标签数据的分类问题,但在许多实际分类问题中,如网络分类、图像识别和基因分类等,存在复杂的分类结构,需要预测的类标签是层次的<sup>[64-66]</sup>。在实际问题中,用于平面分类的知识表示和数据分析方法远远不能满足用户对层次的实际应用需求。例如,给定一个包含 Root→Sciences→Biology 层次结构的文章分类路径,一篇讨论 Sciences 的文章一般只应归入 Root→Sciences 而不是 Biology。又如,在评估公司的考核中,董事会只需了解整体业绩,而项目经理必须对项目的细节有深刻的见解。因此,如何从多层次、多视角的数据中获得一定的层次决策是一个重要课题。文献[67]表明,在树状结构的层次上,层次分类技术能比平面分类技术产生更好的性能。图 7 说明了引入概念层次树的广义层次三支决策的优势,引入概念层次树的广义层次三支决策有助于获得层次分类的广义决策规则。为此,Qian 等<sup>[67]</sup>基于不可分辨关系构建了不同层次下的信息粒,通过构建条件属性和决策属性的概念层次树设计了广义层次决策表,对不同粒度下的条件粒和决策粒采取不同的融合策略(乐观和悲观信息融合)进行融合,并结合多粒度三支决策提出了用于层次分类的乐观和悲观多粒度三支决策模型,用以更新层次分类的 3 个概率区域,解决了具有层次性类标签数据的分类问题。

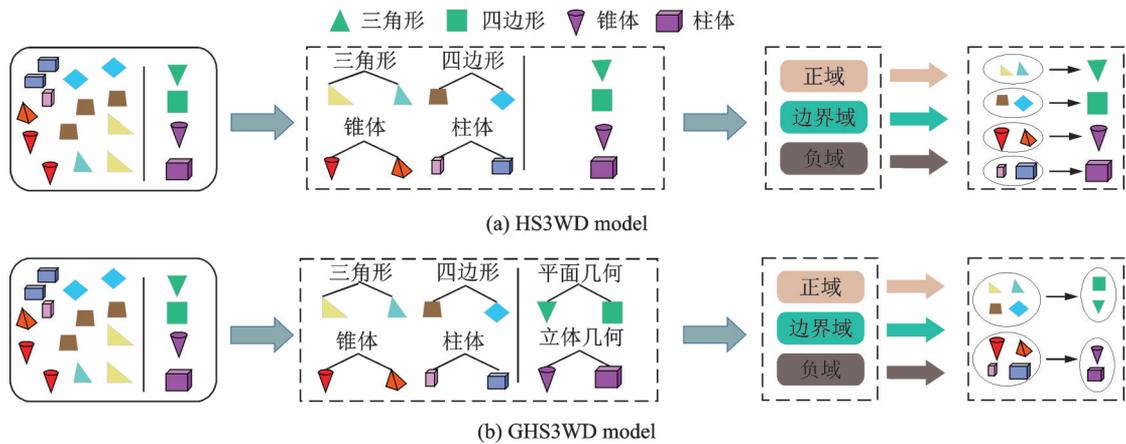


图7 广义层次三支决策模型的优势

Fig.7 Advantage of the generalized hierarchical three-way decisions models

## 2 多粒度三支决策的若干问题

本节主要从多粒度融合策略、多视角三支决策、多层次三支决策以及多粒度三支决策等研究中存在的问题和未来的研究方向进行归纳总结,便于今后对它们做进一步的讨论。

(1)多粒度融合策略。多粒度融合策略是一种将多个视角所获得的结果实现信息融合的策略,其主要是通过多粒度粗糙集模型将多源信息系统从多个角度(多个二元关系)划分成多个粒度,并采用不同的融合策略将其转化成一致的信息表示,得到满意的目标对象近似结果。在融合策略设计方面,目前大多数多粒度三支决策模型的研究都是采用乐观策略、悲观策略和悲观乐观策略,然而不同的融合策略将会导致不同的决策结果。事实上,还有许多融合方法可以进一步探讨,例如折中融合策略等。

(2)多视角三支决策。多视角三支决策是先将一个条件属性集从多个视角划分为若干个粒度空间,然后采取不同的信息融合策略(乐观和悲观信息融合)对每个粒度空间导出的概率正区域和概率负区域进行融合,从而将一个论域划分为概率正区域、概率边界域和概率负区域3个部分。该模型的优势是从不同的粒度空间观察和描述问题,能够对复杂问题获得更加全面的理解和表示。根据上述描述,采取不同的融合策略聚合上下近似、设置不同的 $\alpha$ 值,可能会导致不同的划分结果。当采用乐观策略进行信息融合时,如果粒度空间过多,而 $\alpha$ 设置过小,则所有对象都进入到正域中,其他两部分可能为空集。同样地,当采用悲观策略进行信息融合时,如果粒度空间过多而 $\alpha$ 设置过大,则几乎没有一个对象进入到正域中,造成正域为空。因此,在多视角三支决策的研究中可以从采取何种融合策略、如何设置合适的 $\alpha$ 值等方面展开讨论。

(3)多层次三支决策。多层次三支决策主要通过使用属性集描述对象,并基于该属性集构造层次决策过程。该模型的优势是通过对边界域中的对象进行延迟决策以减少错误分类的代价。信息粒是粒计算和三支决策的研究基础,粗层次下信息粒为细层次的粒提供概要描述,细层次下信息粒为粗层次的粒提供更详细的信息,但相较于粗层次会付出更多的代价。在解决实际问题过程中,粒层越细所能够获取的有效信息越多,所做出的决策越正确,但需要付出更多的代价。然而如何构建信息粒至今没有一种有效的方法。在构造层次信息粒的研究中,可以继续深入研究粒计算理论和大数据技术<sup>[68-69]</sup>,并结合模糊数学、云模型和聚类等相关技术,构造一种新的面向复杂数据的层次粗糙集计算模型。此外,如果每个粒层的 $\alpha$ 和 $\beta$ 设置得不合适,将导致所选粒层过少或过多。因此,多层次三支决策研究的核心问题是如何构建合适的粒层和粒度以寻求决策代价与决策精度之间的平衡。

(4)多粒度三支决策。多粒度三支决策是从多视角和多层次两个角度同时出发,融合多粒度决策理论粗糙集模型和层次粗糙集模型,并运用序贯三支决策循序渐进地做出合理决策。一般来说,多粒度三支决策通常与粒度约简和粒层选择等问题一起进行研究。从粒度空间上看,多粒度三支决策通常采用多个粒度空间进行局部三支决策融合,那么如何选择最优粒度空间是值得深入研究的主题;从粒度层次上看,多粒度三支决策通常采用从粗粒度逐渐地切换到细粒度进行序贯三支决策聚合,如何自适应获取最佳粒度层次同样值得进一步研究。在今后的研究中,可以结合 MapReduce 技术对大规模数据进行粒度约简、粒内属性约简以及对当前粒度层次、上一个粒度层次和下一个粒度层次进行不确定性分析,从而获取更加有效的多个粒度空间和最佳粒度层次。

目前,多粒度三支决策研究还处于初步研究阶段,许多问题还有待进一步深入探讨。图8列举了多粒度三支决策研究中还未研究的主题,为今后深入研究提供了一些参考。

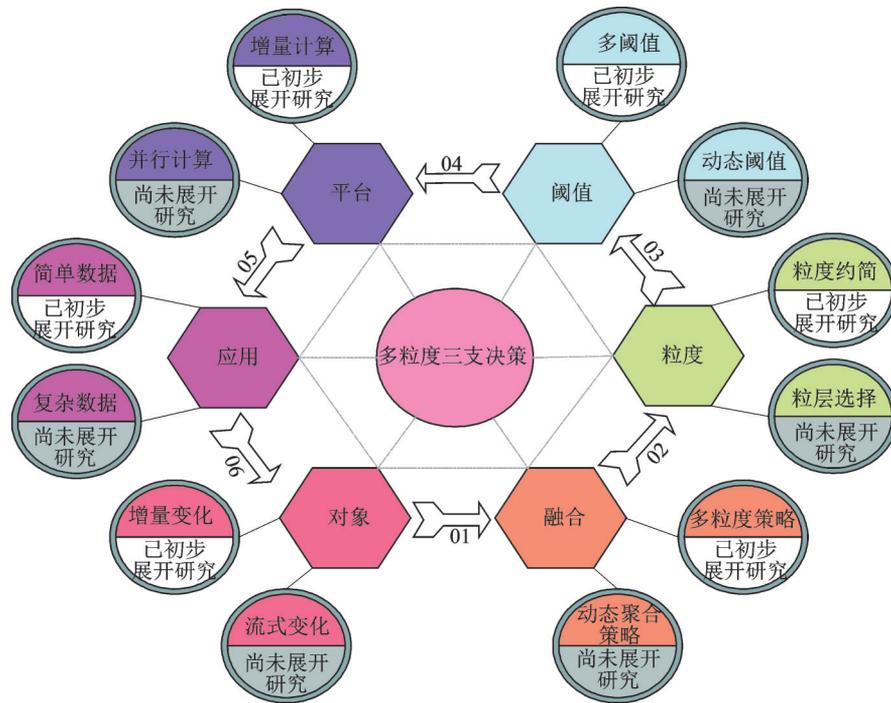


图8 多粒度三支决策研究进展

Fig.8 Research advancement of multi-granulation three-way decisions

### 3 结束语

本文从融合策略、多视角三支决策和多层次三支决策等方面研究工作进行了综述,从定性和定量两个角度描述不同融合策略下多粒度序贯三支决策的定义和关系,并简单介绍了面向层次数据的泛化多粒度三支决策模型,最后总结了多粒度三支决策研究中的一些问题,并归纳了多粒度三支决策研究中各个方面的研究进展,为今后多粒度三支决策的研究提供了理论参考。通过梳理归纳,发现多粒度三支决策的研究可以从多个方面展开。在粒度层面,多粒度三支决策通常与粒度约简问题一同研究并且这方面的相关研究已初步展开,但是如何选择合适的粒层才能平衡决策代价与决策精度的相关研究尚待展开。再比如说,在多粒度三支决策应用方面,目前的研究大多面向简单数据,但是随着大数据时代的到来,将多粒度三支决策应用于复杂数据的处理也是一种研究趋势。这就需要研究者进一步深入

研究多粒度三支决策内涵,使用最小决策代价来提升决策精度。本文仅对多粒度三支决策进行综述,并未窥其全貌,也没有将所有专家理论研究和应用成果工作都归纳总结到位,只希望起到抛砖引玉的作用,进一步促进该研究领域的快速发展。

#### 参考文献:

- [1] BALTRUŠAITIS T, AHUJA C, MORENCY L P. Multimodal machine learning: A survey and taxonomy[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, 41(2): 423-443.
- [2] 吴信东,何进,陆汝钊,等.从大数据到大知识:HACE+BigKE[J].*自动化学报*,2016,42(7):965-982.  
WU Xindong, HE Jin, LU Ruqian, et al. From big data to big knowledge: HACE+BigKE[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(7): 965-982.
- [3] 于洪,何德牛,王国胤,等.大数据智能决策[J].*自动化学报*,2020,46(5):878-896.  
YU Hong, HE Deniu, WANG Guoyin, et al. Big data for intelligent decision making[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(5): 878-896.
- [4] 苗夺谦,张清华,钱宇华,等.从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法[J].*智能系统学报*,2016,11(6):743-757.  
MIAO Duoqian, ZHANG Qinghua, QIAN Yuhua, et al. From human intelligence to machine implementation model: Theories and applications based on granular computing[J].*CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2016,11(6):743-757.
- [5] SIVARAJAH U, KAMAL M M, IRANI Z, et al. Critical analysis of big data challenges and analytical methods[J]. *Journal of Business Research*, 2017, 70: 263-286.
- [6] ZADEH L A. Fuzzy sets and information granularity[C]//*Proceedings of Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1979: 3-18.
- [7] PEDRYCZ W, SKOWRON A, KREINOVICH V. *Handbook of granular computing*[M]. New Jersey: Wiley, 2008.
- [8] 张铃,张钊.问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及应用[M].北京:清华大学出版社,2007.  
ZHANG Ling, ZHANG Bo. Theory and applications of problem solving: Theory and applications of granular computing on quotient space[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007.
- [9] 苗夺谦,李德毅,姚一豫,等.不确定性与粒计算[M].北京:科学出版社,2011.  
MIAO Duoqian, LI Deyi, YAO Yiyu, et al. Uncertainty and granular computing[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [10] QIAN Yuhua, LIANG Jiye, YAO Yiyu, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(6): 949-970.
- [11] YAO Yiyu. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory[C]//*Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: The 4th International Conference*. Berlin Heidelberg: Springer, 2009: 642-649.
- [12] YAO Yiyu. The Dao three-way decision and three-world thinking[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, 162: 109032.
- [13] FENG Qinrong, MIAO Duoqian, CHENG Yi. Hierarchical decision rules mining[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(3): 2081-2091.
- [14] WU Weizhi, LEUNG Yee. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(18): 3878-3897.
- [15] YAO Yiyu, DENG Xiaofei. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets[C]//*Proceedings of IEEE 10th International Conference on Cognitive Informatics and Cognitive Computing (ICCI-CC'11)*. [S.l.]: IEEE, 2011: 120-125.
- [16] HAO Chen, LI Jinhai, FAN Min, et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions[J]. *Information Sciences*, 2017, 415: 213-232.
- [17] QIAN Jin, LIU Caihui, MIAO Duoqian, et al. Sequential three-way decisions via multi-granularity[J]. *Information Sciences*, 2020, 507: 606-629.
- [18] QIAN Jin, TANG Dawei, YU Ying, et al. Hierarchical sequential three-way decision model[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2022, 140: 156-172.
- [19] CHEN Jie, ZHANG Yanping, ZHAO Shu. Multi-granular mining for boundary regions in three-way decision theory[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 287-292.

- [20] YU Hong, JIAO Peng, YAO Yiyu, et al. Detecting and refining overlapping regions in complex networks with three-way decisions[J]. *Information Sciences*, 2016, 373: 21-41.
- [21] ZHANG Hengru, MIN Fan. Three-way recommender systems based on random forests[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 275-286.
- [22] LI Huaxiong, ZHANG Libo, HUANG Bing, et al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 241-251.
- [23] SAVCHENKO A V. Fast multi-class recognition of piecewise regular objects based on sequential three-way decisions and granular computing[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 252-262.
- [24] JIANG Chunmao, YAO Yiyu. Effectiveness measures in movement-based three-way decisions[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 160: 136-143.
- [25] YUE Xiaodong, CHEN Yufei, YUAN Bin, et al. Three-way image classification with evidential deep convolutional neural networks[J]. *Cognitive Computation*, 2022, 14(6): 2074-2086.
- [26] YANG Xin, LI Yujie, LI Qiuke, et al. Temporal-spatial three-way granular computing for dynamic text sentiment classification [J]. *Information Sciences*, 2022, 596: 551-566.
- [27] 刘盾, 李天瑞, 杨新, 等. 三支决策-基于粗糙集与粒计算研究视角[J]. *智能系统学报*, 2019, 14(6): 1111-1120.  
LIU Dun, LI Tianrui, YANG Xin, et al. Three-way decisions-research perspectives for rough sets and granular computing[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2019, 14(6): 1111-1120.
- [28] 钱进. 多粒度决策粗糙集模型研究[J]. *郑州大学学报(理学版)*, 2018, 50(1): 33-38.  
QIAN Jin. Research on multigranulation decision-theoretic rough set models[J]. *Journal of Zhengzhou University(Natural Science)*, 2018, 50(1): 33-38.
- [29] LIU Dun, LIANG Decui, WANG Changchun. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 32-45.
- [30] LIANG Decui, XU Zeshui, LIU Dun, et al. Method for three-way decisions using ideal TOPSIS solutions at Pythagorean fuzzy information[J]. *Information Sciences*, 2018, 435: 282-295.
- [31] QI Jianjun, QIAN Ting, WEI Ling. The connections between three-way and classical concept lattices[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 143-151.
- [32] QIAN Yuhua, ZHANG Hu, SANG Yanli, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 225-237.
- [33] HU Baoqing. Three-way decisions space and three-way decisions[J]. *Information Sciences*, 2014, 281: 21-52.
- [34] FENG Tao, FAN Huitao, MI Jusheng. Uncertainty and reduction of variable precision multigranulation fuzzy rough sets based on three-way decisions[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 85: 36-58.
- [35] XU Weihua, GUO Yanting. Generalized multigranulation double-quantitative decision-theoretic rough set[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 105: 190-205.
- [36] LI Wentao, XU Weihua. Multigranulation decision-theoretic rough set in ordered information system[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2015, 139(1): 67-89.
- [37] YANG Xibei, QI Yunsong, SONG Xiaoning, et al. Test cost sensitive multigranulation rough set: Model and minimal cost selection[J]. *Information Sciences*, 2013, 250: 184-199.
- [38] YANG Hailong, GUO Zhilian. Multigranulation decision-theoretic rough sets in incomplete information systems[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2015, 6: 1005-1018.
- [39] LIN Guoping, LIANG Jiye, QIAN Yuhua, et al. A fuzzy multigranulation decision-theoretic approach to multi-source fuzzy information systems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 102-113.
- [40] SUN Bingzhen, MA Weimin, XIAO Xia. Three-way group decision making based on multigranulation fuzzy decision-theoretic rough set over two universes[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 81: 87-102.
- [41] CHAKHAR S, ISHIZAKA A, LABIB A, et al. Dominance-based rough set approach for group decisions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 251(1): 206-224.
- [42] YANG Xiaoping, YAO Jingtao. Modelling multi-agent three-way decisions with decision-theoretic rough sets[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2012, 115(2/3): 157-171.
- [43] 李金海, 王飞, 吴伟志, 等. 基于粒计算的多粒度数据分析方法综述[J]. *数据采集与处理*, 2021, 36(3): 418-435.

- LI Jinhai, WANG Fei, WU Weizhi, et al. Review of multi-granularity data analysis methods based on granular computing[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2021, 36(3): 418-435.
- [44] PAN Wei, SHE Kun, WEI Pengyuan. Multi-granulation fuzzy preference relation rough set for ordinal decision system[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017, 312: 87-108.
- [45] LIU Caihui, PEDRYCZ W, QIAN Jin, et al. Covering-based multigranulation decision-theoretic rough set approaches with new strategies[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2018, 35(1): 1179-1191.
- [46] SUN Bingzhen, MA Weimin, CHEN Xiangtang, et al. Multigranulation vague rough set over two universes and its application to group decision making[J]. *Soft Computing*, 2019, 23: 8927-8956.
- [47] SUN Bingzhen, ZHOU Xuemei, LIN Nannan. Diversified binary relation-based fuzzy multigranulation rough set over two universes and application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Fusion*, 2020, 55: 91-104.
- [48] HUANG Bing, WU Weizhi, YAN Jinjiang, et al. Inclusion measure-based multi-granulation decision-theoretic rough sets in multi-scale intuitionistic fuzzy information tables[J]. *Information Sciences*, 2020, 507: 421-448.
- [49] GUO Yanting, TSANG E C C, XU Weihua, et al. Adaptive weighted generalized multi-granulation interval-valued decision-theoretic rough sets[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 187: 104804.
- [50] TAN Anhui, WU Weizhi, LI Jinjin, et al. Evidence-theory-based numerical characterization of multigranulation rough sets in incomplete information systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2016, 294: 18-35.
- [51] YAO Yiyu. A triarchic theory of granular computing[J]. *Granular Computing*, 2016, 1: 145-157.
- [52] YAO Yiyu. Three-way decision and granular computing[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, 103: 107-123.
- [53] YANG Xin, LI Tianrui, FUJITA H, et al. A unified model of sequential three-way decisions and multilevel incremental processing[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 134: 172-188.
- [54] SANG Yanli, LIANG Jiye, QIAN Yuhua. Decision-theoretic rough sets under dynamic granulation[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 84-92.
- [55] GAO Cong, YAO Yiyu. Actionable strategies in three-way decisions[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 133: 141-155.
- [56] ZHANG Qinghua, PANG Guohong, WANG Guoyin. A novel sequential three-way decisions model based on penalty function [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 192: 105350.
- [57] FANG Yu, GAO Cong, YAO Yiyu. Granularity-driven sequential three-way decisions: A cost-sensitive approach to classification[J]. *Information Sciences*, 2020, 507: 644-664.
- [58] XU Yi, TANG Jingxin, WANG Xusheng. Three sequential multi-class three-way decision models[J]. *Information Sciences*, 2020, 537: 62-90.
- [59] 钱进, 汤大伟, 洪承鑫. 多粒度层次序贯三支决策模型研究[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(9): 33-45.  
QIAN Jin, TANG Dawei, HONG Chengxin. Research on multi-granularity hierarchical sequential three-way decision model [J]. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2022, 57(9): 33-45.
- [60] 张清华, 黄志康, 高满, 等. 基于不确定性与错误分类率博弈的序贯三支决策模型[J]. *电子学报*, 2022, 50(5): 1033-1041.  
ZHANG Qinghua, HUANG Zhikang, GAO Man, et al. Sequential three-way decision model based on the game between uncertainty and error classification rate[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(5): 1033-1041.
- [61] 陈文彬, 张清华, 代永杨, 等. 基于不确定性的跳阶序贯三支决策模型[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2023, 35(1): 90-100.  
CHEN Wenbin, ZHANG Qinghua, DAI Yongyang, et al. Skipped sequential three-way decision model with uncertainty[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science)*, 2023, 35(1): 90-100.
- [62] ZHANG Xiaohong, MIAO Duoqian, LIU Caihui, et al. Constructive methods of rough approximation operators and multigranulation rough sets[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 114-125.
- [63] QIAN Jin, LIU Caihui, YUE Xiaodong. Multigranulation sequential three-way decisions based on multiple thresholds[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2019, 105: 396-416.
- [64] SHEN Wen, WEI Zhihua, LI Qianwei, et al. Three-way decisions based blocking reduction models in hierarchical classification [J]. *Information Sciences*, 2020, 523: 63-76.
- [65] WANG Yu, HU Qinghua, CHEN Hao, et al. Uncertainty instructed multi-granularity decision for large-scale hierarchical classification[J]. *Information Sciences*, 2022, 586: 644-661.
- [66] LI Shuai, YANG Jie, WANG Guoyin, et al. Granularity selection for hierarchical classification based on uncertainty measure

- [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(11): 4841-4855.
- [67] QIAN Jin, HONG Chengxin, YU Ying, et al. Generalized multigranulation sequential three-way decision models for hierarchical classification[J]. Information Sciences, 2022, 616: 66-87.
- [68] 梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 等. 大数据挖掘的粒计算理论与方法[J]. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(11): 1355-1369.  
LIANG Jiye, QIAN Yuhua, LI Deyu, et al. Theory and method of granular computing for big data mining[J]. Science China: Information Sciences, 2015, 45(11): 1355-1369.
- [69] 徐计, 王国胤, 于洪. 基于粒计算的大数据处理[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1497-1517.  
XU Ji, WANG Guoyin, YU Hong. Review of big data processing based on granular computing[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1497-1517.

## 作者简介:



钱进(1975-), 通信作者, 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向: 粒计算、大数据挖掘和机器学习等, E-mail: qjqjlqyf@163.com。



郑明晨(1999-), 女, 硕士研究生, 研究方向: 粒计算、数据挖掘等, E-mail: zhengmc0797@163.com。



周川鹏(2000-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 粒计算、数据挖掘等, E-mail: chuanpeng0622@163.com。



刘财辉(1979-), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向: 粒计算、机器学习与人工智能, E-mail: liucaihui@gnnu.edu.cn。



岳晓冬(1980-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 机器学习, 数据挖掘等, E-mail: yswantfly@shu.edu.cn。

(编辑: 刘彦东)