

## $\alpha$ 噪声下基于随机共振的最大相关熵频谱感知

李如雪<sup>1</sup>, 鲁进<sup>1,2</sup>, 罗聪<sup>1</sup>

(1. 云南大学信息学院, 昆明 650500; 2. 云南省高校物联网技术及应用重点实验室, 昆明 650500)

**摘要:**  $\alpha$ 噪声下的频谱感知成为近年来的研究热点, 该噪声的统计模型具有明显的脉冲性和拖尾性, 并且在微弱信号条件下, 信号特征不够明显。为此提出了基于随机共振的最大相关熵频谱感知方法, 该方法通过随机共振模型中粒子在双势阱间的跃迁, 将 $\alpha$ 噪声的部分能量转移到信号中, 以提高信号的输出信噪比。采用最大相关熵方法构建高阶统计量, 检测随机共振后的输出信号, 并联合共轭梯度下降法获取最佳目标函数, 实现频谱感知。仿真结果表明, 该算法在低信噪比条件下能够有效提高检测性能。

**关键词:** 频谱感知; 随机共振;  $\alpha$ 噪声; 共轭梯度下降法; 最大相关熵

**中图分类号:** TN911.23      **文献标志码:** A

## Maximum Generalized Correntropy Spectrum Sensing Based on Stochastic Resonance Under $\alpha$ Noise

LI Ruxue<sup>1</sup>, LU Jin<sup>1,2</sup>, LUO Cong<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming 650500, China; 2. Yunnan Provincial Key Laboratory of Internet of Things Technology and Application in Universities, Kunming 650500, China)

**Abstract:** Spectrum sensing under  $\alpha$  noise has become a hot topic in recent years. The statistical model of this noise has obvious impulse and trailing characteristics. The signal characteristics are not obvious enough under weak signal conditions. To this end, the maximum generalized correntropy spectrum sensing method based on stochastic resonance is proposed. This method uses the transition of particles in the stochastic resonance model between the two potential wells to transfer part of the energy of alpha noise into the signal to improve the signal output signal-to-noise ratio. The maximum generalized correntropy method is utilized to construct high-order statistics for spectrum sensing, detect the output signal after stochastic resonance and combine conjugate gradient descent method to achieve the optimal objective function. The simulations results demonstrate that the proposed algorithm can effectively improve the detection performance under the condition of low signal-to-noise ratio.

**Key words:** spectrum sensing; stochastic resonance;  $\alpha$  noise; conjugate gradient descent algorithm; maximum generalized correntropy

## 引言

随着无线通信技术的飞速发展,频谱资源短缺日益严重。认知无线电(Cognitive radio, CR)作为解决该问题的有效途径之一,在不对主用户(Primary user, PU)造成明显干扰的前提下,允许次用户(Secondary user, SU)访问许可的频段<sup>[1]</sup>。频谱感知(Spectrum sensing, SS)是CR系统的重要组成部分,目前已提出的SS技术,如能量检测<sup>[2]</sup>、匹配滤波器检测和循环平稳特征检测等已被研究应用于无线系统。

在微弱信号条件下,随机共振(Stochastic resonance, SR)是提高SS性能的途径之一<sup>[3]</sup>。SR作为物理学中的一种非线性现象,当信号、噪声及非线性系统达成一定的最佳匹配时,噪声的部分能量将转移到信号上,提高输出信噪比(Signal-to-noise ratio, SNR)。文献[3-5]分别将SR应用到能量检测、多天线MIMO以及极化天线的场景中;文献[6]则采用萤火虫启发式算法优化信号的输出SNR。

近年来,对SR的改进研究在不断推进。文献[7]将小波变换和多稳态SR结合,应用于多频率的弱信号检测。文献[8]提出了一种改进的分段混合势函数,并利用粒子群获得SR的系统参数。文献[9]探究有色互相关噪声条件下两种不对称势函数的SR效应。目前,SR在高斯噪声中的研究已相对成熟,但非高斯噪声却是普遍存在的,比如闪电噪声、海洋杂波噪声和无线设备间的同频干扰等,它们的概率密度函数具有明显的脉冲性和拖尾性,因此研究 $\alpha$ 噪声下的SR更具有现实意义。文献[10]讨论了在 $\alpha$ 噪声下,非对称时滞单稳SR和双稳SR参数,以及噪声的调整对输出SNR的影响。文献[11]针对非对称的条件,进一步分析了 $\alpha$ 噪声下三稳态系统的SR特性。而在 $\alpha$ 噪声下的SS,可以通过构建高阶统计量检测信号,因此文献[12]提出了一种加权的广义熵谱密度方法,可以有效地减轻非高斯噪声环境下核函数参数对感知性能的影响。文献[13]在此基础上利用核函数将最大相关熵的二阶统计扩展到高阶统计上,进一步提高系统性能。文献[14]进一步将最大相关熵和共轭梯度算法相结合实现协同SS,同时采用多天线技术提高鲁棒性。

综上所述, $\alpha$ 噪声的脉冲性和拖尾性使得信号的特征难以获取,很难达到理想的SS效果。因此,针对 $\alpha$ 噪声下的SS,本文采用双稳态势函数诱导SR,以降低较大的噪声样本值,提高输出信号的SNR;并利用归一化尺度变换将高频信号转化为满足SR理论要求的低频信号;最后通过共轭梯度下降法获得相关熵的最大值,并以此作为检测统计量,减小 $\alpha$ 噪声在低信噪比条件下对感知性能的负面影响,提高检测性能。

## 1 系统模型

在CR的SS中,针对某一时刻,PU是否存在可以将统计假设表述为

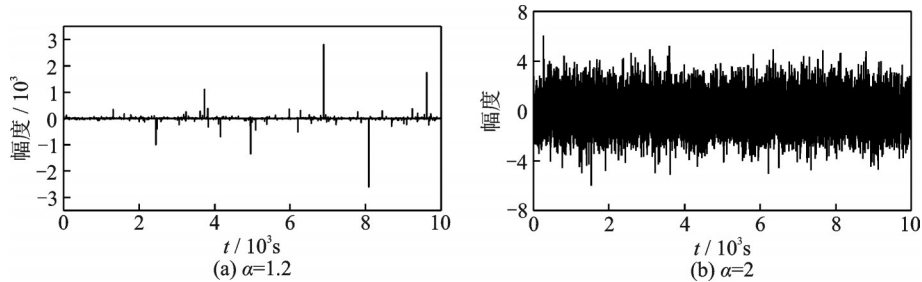
$$r_{i,m}(t) = \begin{cases} w_{i,m}(t) & H_0 \\ h_{i,m}s_{i,m}(t) + w_{i,m}(t) & H_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $H_0$ 和 $H_1$ 分别表示两种假设, $H_0$ 表示PU信号不存在,即此时SU可以接入, $H_1$ 表示PU信号存在,即SU不可以接入; $r_{i,m}(t)$ 为SU接收到的实际信号, $m(m \in [1, M])$ 为第 $m$ 根天线, $i(i \in [1, N])$ 为第 $i$ 个时隙; $s_{i,m}(t)$ 为PU发射信号; $h_{i,m}$ 为PU和SU间的信道增益; $w_{i,m}(t)$ 为 $\alpha$ 噪声,其概率分布是由它的特征函数表示<sup>[11]</sup>。

$$\begin{cases} \phi(t) = \exp\left[-\sigma|t|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\text{sign}(t)\ln|t|\right) + i\mu t\right] & \alpha = 1 \\ \phi(t) = \exp\left[-\sigma^\alpha|t|^\alpha\left(1 - i\beta\text{sign}(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right] & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$\alpha$ 噪声主要由3个特征参数表示:特征指数 $\alpha \in (0, 2]$ ,对称参数 $\beta \in [-1, 1]$ ,尺度参数

$\sigma \in [0, +\infty)$ 。其中,  $\alpha$  决定了分布曲线的形状;  $\beta$  表明了分布曲线的对称性;  $\sigma$  是度量样本值相对于均值的分散程度;  $\mu$  决定了分布的中心。如图 1 所示, 分别表示特征指数  $\alpha = 1.2$  和  $\alpha = 2$  下的  $\alpha$  噪声, 其他特征参数:  $\beta = 0, \sigma = 1, \mu = 0$ 。当  $\alpha = 2$  时,  $\alpha$  噪声又称为高斯噪声, 并且  $\alpha$  越小, 噪声的脉冲特性越强。

图 1 不同特征指数下的  $\alpha$  噪声Fig.1  $\alpha$  noise with different characteristic indices

## 2 双稳态随机共振系统

### 2.1 朗之万方程

对于任意一个天线, 将 SR 系统对应的朗之万方程表示为<sup>[3]</sup>

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{\partial U(x_i)}{\partial x_i} + s_i(t) + w_i(t) \quad (3)$$

该方程是一个随机微分方程, 主要描述了一个粒子沿着变化的双稳势函数做无规则运动的情况。其中,  $x_i$  为粒子轨迹;  $x_i(t)$  为 SR 后的输出信号; 双稳态 SR 势函数  $U(x_i) = -1/2 ax_i^2 + 1/4 bx_i^4$ 。通过对系统参数  $a \in (-\infty, +\infty)$  和  $b \in (-\infty, +\infty)$  的调节, 可以得到不同的势形状。  $s_i(t)$  表示外部周期力, 假设  $s_i(t) = A_i \sin(2\pi f_c t)$ ,  $A_i$  为信号幅值,  $f_c$  为信号频率。因此, 该微分方程具体可以表示为

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = ax_i - bx_i^3 + A_i \sin(2\pi f_c t) + w_i(t) \quad (4)$$

由于式(4)是微分方程没有精确解, 因此采用四阶 Runge-Kutta 算法近似求解。

$$\begin{cases} k_1 = \Delta h [-ax_i(n) + bx_i^3(n) + s_i(n)] \\ k_2 = \Delta h [-a(x_i(n) + k_1/2) + b(x_i(n) + k_1/2)^3 + s_i(n)] \\ k_3 = \Delta h [-a(x_i(n) + k_2/2) + b(x_i(n) + k_2/2)^3 + s_i(n+1)] \\ k_4 = \Delta h [-a(x_i(n) + k_3) + b(x_i(n) + k_3)^3 + s_i(n+1)] \\ x_i(n+1) = x_i(n) + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $s_i(n)$  和  $x_i(n)$  分别为输入和输出信号的第  $n$  次采样值,  $\Delta h$  为时间步长。

### 2.2 归一化尺度变换

在无线通信工程领域中, 信号的特征信息通常以高频形式存在, 而绝热近似和线性响应理论要求信号频率需远小于 1 Hz。针对此类问题, 本节采用归一化尺度变换处理高频信号<sup>[15]</sup>, 该方法适用于任意频率的周期信号。

首先, 设置新的变量  $z$ , 令  $z_i = x_i \sqrt{b/a}$ ,  $\tau = at$ , 式(4)可以改写为

$$\frac{dz_i(\tau)}{d\tau} = z_i - z_i^3 + A_0 \sin(2\pi f_0 \tau) + w_0(\tau) \tag{6}$$

式中:  $A_0$  和  $f_0$  为归一化幅度和频率,  $w_0(\tau)$  表示归一化噪声。式(4,6)中的参数对应关系为

$$A_0 = A_i \sqrt{\frac{b}{a^3}}, f_0 = \frac{f_c}{a}, w_0(\tau) = w_i(t) \sqrt{\frac{b}{a^3}} \tag{7}$$

确定了归一化变换的参数后,采用四阶 Runge-Kutta 算法近似求解式(4),同时为了减小  $\alpha$  噪声的脉冲特性影响,为了保证输出信号  $x_i(t)$  在数值仿真时能达到更好的共振效果,采用了人为限幅措施<sup>[11]</sup>: 当  $|x_i(t)| > 4$ , 令  $x_i(t) = \text{sign}(x_i(t)) \times 4$ 。

其中 SR 的系统参数设置如表 1 所示。图 2 (a,b)分别为带噪信号的时域图和频谱图,图 2(c, d)分别为经过 SR 后信号的时域图和频谱图。图 2(a)的待测信号淹没在噪声中,无法提取有效信息;图 2(c)可以观察到经过 SR 后,输出信号的波形得以恢复;图 2(d)在归一化频率处显示频谱的尖峰值。

表 1 仿真参数

Table 1 Simulation parameters

参数	数值
高载波频率 $f_c$ /MHz	1
归一化载波频率 $f_0$ /Hz	0.05
采样频率 $f_s$ /MHz	100
采样点 $N$	400
归一化信号幅值 $A_0$	0.42
高频信号幅值 $A_i$	10
天线数 $M$	5
模拟次数 sim	3 000
双稳态随机共振(Bistable stochastic resonance, BSR)系统参数 $a$	$2 \times 10^9$
BSR 系统参数 $b$	$1.411 2 \times 10^{25}$

### 3 最大相关熵频谱感知算法

#### 3.1 相关熵

在信息论中,最大相关熵准则用于处理受到噪声干扰的信号分析,实际上相关熵与用于预估数据分布的二次熵有关。例如:对于任意两个随机变量  $X$  和  $Y(X, Y \in \mathbf{R})$  的相关熵可以表示为<sup>[14]</sup>

$$V_i(X, Y) = E[k_i(X - Y)] = \int k_i(x, y) dF_{XY}(x, y) \tag{8}$$

式中:  $E$  为求期望运算;  $F_{XY}(x, y)$  为  $X$  和  $Y$  的联合概率分布函数;  $k_i(x, y)$  为核函数,采用核函数的高斯形式进行相关计算:  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数,色散参数  $v = \sqrt{\Gamma(1/u)/\Gamma(3/u)}$  ( $u > 0$ ) 为形状参数,核参数  $\iota_G = 1/v^u$ ,  $\zeta_{u,v} = u/(2v\Gamma(1/u))$  为归一化常数。当  $u = 2$  时,式(8)对应于高斯分布,可表示为

$$k_i(X - Y) = k_i(e) = \frac{u}{2v\Gamma(1/u)} \exp\left(-\left|\frac{e}{v}\right|^u\right) = \zeta_{u,v} \exp(-\iota_G |e|^u) = \frac{\exp(-e^2/2t^2)}{\sqrt{2\pi} t} \tag{9}$$

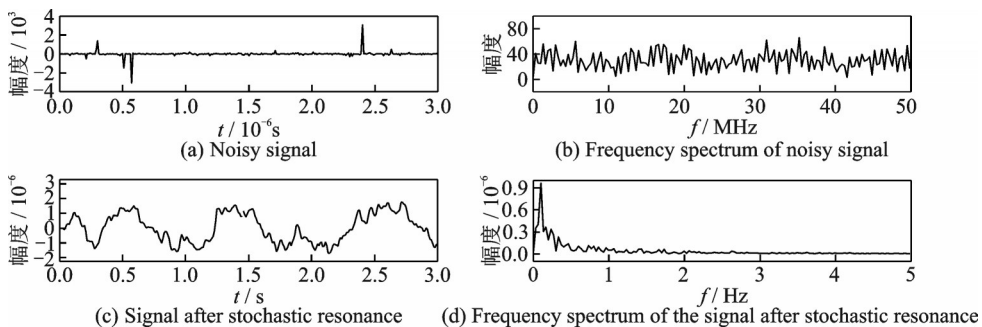


图 2 信号的时域和频域图

Fig.2 Time and frequency domain diagrams of the signal

式中:误差  $e = X - Y, t(t > 0)$  为核尺寸参数。图 3 为不同核尺寸下的核函数。在  $\alpha$  噪声的干扰下,误差信号会发生较大的突变,该突变会导致算法的稳定性下降,甚至发散。对于这种突变型的误差,可以利用核函数的鲁棒性:在最大相关熵算法中,将高斯核函数作为代价函数,从图 3 可以看出,当误差较大的时候,核尺寸越小,核函数对应的数值越小甚至趋近于 0,即使出现误差突变的情况,该算法也不受其影响依然有很好的稳定性。

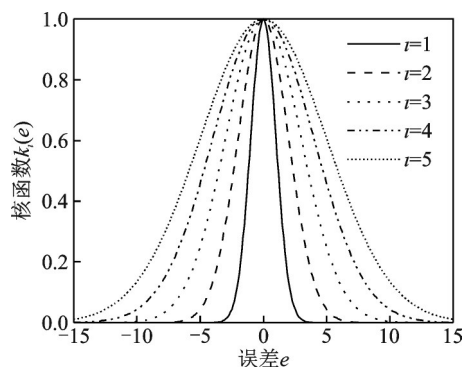


图 3 不同核尺寸下的高斯函数曲线

Fig.3 Gaussian kernel function curves for different kernel sizes

### 3.2 目标函数

在实际应用中,  $F_{XY}(x, y)$  通常是未知的,只能利用核函数将输入空间向高维空间作非线性映射,而该方法只与样本对有关,因此采用有限长度的数据样本对相关熵进行估算,式(8)可改写为

$$V_{N, t}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_t(e_i) \tag{10}$$

式中:  $e_i = X_i - Y_i, i = 1, 2, \dots, N$ ;  $X_i$  和  $Y_i$  都为独立于  $X$  和  $Y$  的样本。同时为了保证算法的稳定性,加入稀疏权重向量  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M], \xi_M \geq 0$ , 误差信号  $e_i = s_i - \xi^T x_i$ 。因此, MGC 算法的目标函数为<sup>[14]</sup>

$$J_{MGC}(\xi) = \max_{\xi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_t(e_i) = \max_{\xi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_t(s_i - \xi^T x_i) = \max_{\xi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\exp\left(-\frac{(s_i - \xi^T x_i)^2}{2t^2}\right)}{\sqrt{2\pi} t} \tag{11}$$

或者采用求最小化目标函数表示为

$$J_{MGC}(\xi) = \min_{\xi} \left( -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\exp\left(-\frac{(s_i - \xi^T x_i)^2}{2t^2}\right)}{\sqrt{2\pi} t} \right) = \min_{\xi} \left( -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N \sqrt{2\pi} t} \left( \exp\left(-\frac{(s_i - \xi^T x_i)^2}{2t^2}\right) \right) \right) \tag{12}$$

**定理 1** 设  $f: C \rightarrow \mathbf{R}$  是定义在凸集  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  上的凸函数,  $Z \geq 0$ , 则  $Zf$  是  $C$  上的凸函数<sup>[16]</sup>。

**定理 2** 设  $f_1, f_2, \dots, f_p$  是定义在凸集  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  上的凸函数, 则  $f_1 + f_2 + \dots + f_p$  是  $C$  上的凸函数<sup>[16]</sup>。

**定理 3** 设  $f_1, f_2, \dots, f_p$  是定义在凸集  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  上的凸函数, 设  $g(x) = \min f_i(x), x \in C$ , 当上述定义中的最小值有限时, 则  $g$  是  $C$  上的凸函数<sup>[16]</sup>。

其中  $B = -1/2t^2, Z = 1/N \sqrt{2\pi} t$ , 由上述定理可知, 当  $f(\xi) = \exp\left(B(s - \xi^T x)^2\right) = \exp\left[B(s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_M x_M))^2\right]$  为凸函数时,  $J_{MGC}(\xi)$  为凸函数, 本文采用 Hessian 矩阵判定  $f(\xi)$  是否为凸函数。

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_m} = \exp\left[B(s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_M x_M))^2\right] \cdot \left[-2Bx_m(s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_M x_M))\right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_m \partial \xi_n} = x_m x_n \cdot 2B \left[ 2B(s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_M x_M))^2 + 1 \right] \exp\left[B(s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_M x_M))^2\right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1 \partial \xi_M} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2 \partial \xi_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_M \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_M \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_M^2} \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_M \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M x_1 & x_M x_2 & \cdots & x_M^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中:  $G = 2B \left[ 2B \left( s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M) \right)^2 + 1 \right] \exp \left[ B \left( s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M) \right)^2 \right]$ , 将  $B = -1/2t^2$  代入, 可得:  $2B \left( s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M) \right)^2 + 1 = 1 - \left( s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M) \right)^2 / t^2$ , 因为误差信号  $s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M)$  具有较大的突变性, 为了保证算法的稳定性, 核尺寸的取值应尽量偏小, 因此  $\left( s - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_M x_M) \right)^2 > t^2$ , 可得  $G > 0$ 。式(15)中矩阵的所有顺序主子式大于等于0, 即Hessian矩阵半正定, 式(12)是凸函数。

### 3.3 共轭梯度下降法

本节采用共轭梯度下降法对式(12)中的目标函数迭代求解<sup>[17]</sup>, 得到最优参数值和最小化的目标函数。

共轭梯度下降法中权重迭代更新的关键步骤是

$$\boldsymbol{\xi}_{j+1} = \boldsymbol{\xi}_j + \varphi_j \mathbf{d}_j \quad (16)$$

当  $J_{\text{MGC}}(\boldsymbol{\xi})$  可微时, 给定迭代点  $\boldsymbol{\xi}_j$ ,  $\varphi_j$  为搜索步长,  $\mathbf{d}_j$  为可行的搜索下降方向, 该算法的具体步骤如下。

(1) 由于式(12)是凸函数, 极值点只有一个, 不同的初始值参数不会对求解结果产生影响, 因此任取初始点  $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbf{R}^n$ , 参数  $\delta \in (0, 1/2)$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $j = 1$ 。若  $\|\mathbf{g}_1\| \leq \varepsilon$ , 停止。

(2) 计算搜索方向  $\mathbf{d}_j$ <sup>[17]</sup>。

$$\mathbf{d}_j = \begin{cases} -\mathbf{g}_j & j = 0 \\ -\theta_j \mathbf{g}_j + \eta_j^{\text{VPRP}} \mathbf{d}_{j-1} & j \geq 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{g}_j$  为在迭代点时的梯度,  $\theta_j$  和  $\eta_j$  为标量参数。关于  $\eta_j$  的计算有FR(Fletcher-Reeves)、PRP(Polak-Ribiere-Polyak)、HS(Hestenes-Stiefel)、DY(Dai-Yuan)、LS(Liu-Storey)、共轭梯度下降法(Conjugate gradient descent, CD)等多种方法, PRP方法的数值结果较好, 但对一般的目标函数在精确线搜索下不能收敛, 因此对PRP公式进行负修正得到新的参数计算公式  $\eta_j^{\text{VPRP}}$ 。

$$\eta_j^{\text{VPRP}} = \frac{\mathbf{g}_j^T \left( \mathbf{g}_j - \frac{\mathbf{g}_j^T \mathbf{g}_{j-1}}{\mathbf{g}_{j-1}^2} \mathbf{g}_{j-1} \right)}{\mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{g}_{j-1}} \quad (18)$$

$$\theta_j = 1 + \eta_j^{\text{VPRP}} \frac{\mathbf{g}_j^T \mathbf{d}_{j-1}}{\mathbf{g}_{j-1}^2} \quad (19)$$

(3) 计算步长因子  $\varphi_j$ , 需要满足条件:  $\left( J_{\text{MGC}}(\boldsymbol{\xi}_j + \varphi_j \mathbf{d}_j) \leq J_{\text{MGC}}(\boldsymbol{\xi}_j) + \delta \varphi_j \mathbf{g}_j^T \mathbf{d}_j \right)$ 。

$$\varphi_j = \max \{ \rho^p, p = 0, 1, 2, \dots \} \quad (20)$$

(4) 迭代计算  $\boldsymbol{\xi}_{j+1} = \boldsymbol{\xi}_j + \varphi_j \mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_{j+1})$ , 当  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_j)^T \mathbf{d}_j \leq \varepsilon$ , 停止。

(5)  $j = j + 1$ , 转步骤 2。

### 3.4 检测门限的设置

SR 系统的输出分布  $\rho(x, t)$  是由 Fokker-Planck 方程决定的<sup>[3]</sup>, 同时  $\alpha$  噪声的概率分布也没有显式表达式, 因此想要获得精确的  $\rho(x, t)$  闭合表达式非常困难。另外, 输入噪声经过 SR 系统后, 输出功率谱近似服从洛伦兹分布, 且输出样本也不是独立存在。因此, 检测统计数据的分布很难通过分析得到, 但是当模拟次数足够多时, 可以通过实验得到检测门限。

本节将通过蒙特卡洛算法, 利用虚警概率  $P_f$  统计确定检测门限  $J_{\text{MGC}_{\text{th}}}$ , 设定虚警概率为固定值  $P_f \in (0, 1)$ , 计算  $H_0$  和  $H_1$  下的  $J_{\text{MGC}}(\xi_j)$  值。每经过一次蒙特卡洛模拟实验, 就会得到一个新的  $J_{\text{MGC}}(\xi_{j_i})$  值, 将所有的模拟值进行排序, 再根据  $P_f$  值划定检测门限  $J_{\text{MGC}_{\text{th}}}$ 。

$$J_{\text{MGC}_{H_0}}(\xi_{k_q}) \geq J_{\text{MGC}_{H_0}}(\xi_{k_p}) \quad 1 \leq q \leq p \leq \text{sim} \quad (21)$$

判决表达式为

$$J_{\text{MGC}_{H_1}}(\xi_{k_q}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} J_{\text{MGC}_{\text{th}}} \quad (22)$$

## 4 算法流程

### 4.1 算法步骤

**算法 1** SR 和最大相关熵算法

输入:  $a, b, \Delta h, r_i, \text{sim}$

输出:  $P_d$

- (1)  $a, b, \Delta h, r_i$  代入式 (5), 得  $x_i$
- (2) if ( $|x_i| > 4$ )
- (3)  $x_i = \text{sign}(x(t)) \times 4$
- (4) end if
- (5)  $e_i = s_i - \xi^T x_i$
- (6) for  $l = 1: \text{sim}/2$
- (7) for  $j = 1: N$
- (8) 由式 (11) 及算法 2, 得  $J_{\text{MGC}_{H_0}}(\xi_j)$
- (9) 排序  $J_{\text{MGC}_{H_0}}(\xi_p) \geq J_{\text{MGC}_{H_0}}(\xi_q)$ , 得  $J_{\text{MGC}_{\text{th}}}$
- (10) end
- (11) end
- (12) for  $l = 1: \text{sim}/2$
- (13) for  $j = 1: N$
- (14) 由式 (11) 及算法 2, 得  $J_{\text{MGC}_{H_1}}(\xi_j)$

(15) if  $(J_{\text{MGC}_{H_i}}(\xi_j) > J_{\text{MGC}_{H_b}})$

(16)  $n_a = n_a + 1$

(17) end if

(18) end

(19) end

(20)  $P_d = n_a / \text{sim}$

#### 算法2 共轭梯度下降法

输入:  $\xi_1 \in \mathbf{R}^n$ ,  $\delta \in (0, 1/2)$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon \geq 0$

输出:  $J_{\text{MGC}}(\xi_j)$

(1) for  $j = 1: N$

(2) 由式(17~19), 得  $d_j$

(3)  $\varphi_j = \max\{\rho^p, p = 0, 1, 2, \dots\}$

(4) if  $(J_{\text{MGC}}(\xi_j + \varphi_j d_j) \leq J_{\text{MGC}}(\xi_j) + \delta \varphi_j g_j^T d_j)$

(5)  $\xi_{j+1} = \xi_j + \varphi_j d_j$

(6)  $g_{j+1} = g(\xi_{j+1})$

(7) if  $(g(\xi_j)^T d_j \leq \varepsilon)$

(8) else if

(9)  $j = j + 1$ , 转步骤(2)

(10) end if

(11) end if

(12) end

## 4.2 算法复杂度分析

算法1是整个系统的具体流程, 算法2是最大相关熵的主要计算部分。本文所提算法与传统检测算法相比, 增加了时间复杂度的计算, 主要来源于SR和最大相关熵。首先将信号  $r_{i,m}(t)$  送入SR系统中, 采用四阶Runge-Kutta算法求解式(4), 一个输出信号  $x_{i,m}(t)$  只需要4次乘法运算, 因此SR过程将产生  $O(N)$  的计算复杂度; 其次最大相关熵算法中采用  $M$  根天线进行SS, 并利用共轭梯度下降法寻找式(12)的最优值, 因此计算  $J_{\text{MGC}}(\xi_j)$  的复杂度为  $O(MN)$ 。由此, 算法1的计算复杂度总和为  $O(N) + O(MN)$ 。虽然该算法的计算复杂度增加了, 但是针对  $\alpha$  噪声下的微弱信号检测, 只能在计算复杂度和检测精度之间折衷选取, 以保证SS性能。

## 5 仿真结果与分析

本节通过研究受试者工作特征(Receiver operating characteristic, ROC)曲线来评估所提SS方法的性能, 该曲线说明了在不同的SS方法下, 检测概率  $P_d$  与虚警概率  $P_f$  之间的关系。在以下的仿真结果中, 主要包括基于随机共振的最大相关熵频谱感知方法(Based on stochastic resonance in maximum generalized correntropy spectrum sensing method, SRMGC); 基于随机共振的最大特征值频谱感知方法(Based on stochastic resonance in maximum eigenvalue spectrum sensing method, SRME); 基于随机共振



的多天线能量检测频谱感知方法 (Based on stochastic resonance in multi-antenna energy detection spectrum sensing method, SRMEN)。

原始信号采用正弦波  $s_{i,m}(t)$ , 其他的参数设置如表 1 所示。为了诱导粒子越过势垒形成跃迁的 SR, 根据式 (7),  $f_0$  和  $f_c$  的取值决定了系统参数  $a$  和  $b$ , 从而决定了势垒高度  $U = a^2/4b$ 。参数  $a$  的取值要足够大, 才能使参数归一化后信号的频率  $f_0$  远小于 1, 而参数  $b$  可以适应强弱不同的输入信号, 因此对于参数  $b$  的取值没有任何限制。假设归一化频率  $f_0 = 0.05$  Hz, 在保证计算精度的前提下, 取载波频率  $f_c = 1$  MHz。

表 2 和图 4 比较了平均迭代次数与核尺寸的关系, 将不同核尺寸的 SRMGC 算法各自运行 50 次, 得到平均迭代次数。图 4 是 SRMGC 算法的学习曲线, 从表 2 和图 4 中可以看出: 经过少量迭代, SRMGC 算法便可实现收敛, 并且随着核尺寸的增加, 收敛所需要的平均迭代次数也在逐渐减小。

图 5 是不同的特征指数  $\alpha$  下, 采用 SRMGC 方法得到的 ROC 曲线。考虑到  $\alpha$  越小, 噪声的脉冲特征就越强, 共振的效果也会有所减弱, 因此, 将 SNR 设置为  $-10$  dB。如图 5 所示, 当  $P_f$  一定时, 随着  $\alpha$  增加,  $P_d$  也越高。当  $\alpha = 2$  时 (高斯噪声条件下), 噪声的脉冲特性较弱, 频谱感知的性能效果最好。

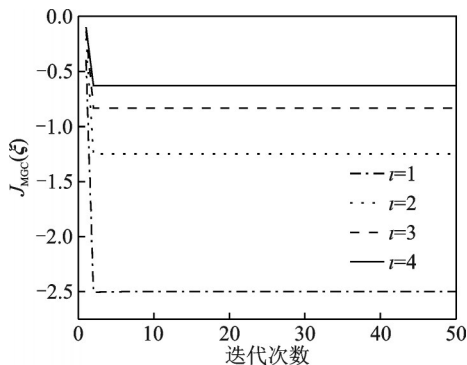


图 4 SRMGC 算法的学习曲线

Fig.4 Learning curves of the SRMGC algorithm

表 2 平均迭代次数与核尺寸的关系  
Table 2 Average number of iterations as a function of kernel size

估计算法	平均迭代次数
SRMGC( $l=1$ )	2.814
SRMGC( $l=2$ )	2.668
SRMGC( $l=3$ )	2.365
SRMGC( $l=4$ )	2.025

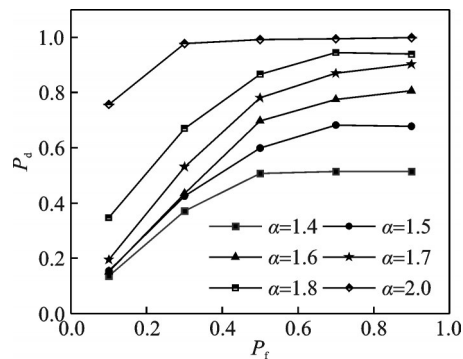


图 5 不同特征指数  $\alpha$  下的 ROC 曲线

Fig.5 ROC curves with different characteristic indices  $\alpha$

考虑到能量检测方法在  $\alpha < 1.6$  时可能失效, 因此选取  $\alpha = 1.6, 1.8, 2.0$ 。图 6(a, b) 对比了不同  $\alpha$  下, SRMGC 和 SRMEN 的感知性能, 图 6(a) 的 SNR =  $-15$  dB, 图 6(b) 的 SNR =  $-10$  dB, 图中实线为 SRMGC, 虚线为 SRMEN。在较低 SNR 环境下,  $\alpha$  越小, 噪声的脉冲性就越强, 导致  $\alpha = 1.6$ , SNR =  $-15$  dB 时  $P_d$  发生突变。整体而言, SRMGC 的检测效果优于 SRMEN。当  $P_f$  一定时, SNR 越大, SRMGC 的检测效果越好; 尤其  $P_f$  的值较小时, 增大 SNR, SRMGC 的检测效果有明显的提升, 但 SRMEN 相反。SRMEN 虽然简单, 不需要任何的先验知识, 但是它有固有的缺陷。在设置 SRMEN 的检测门限时具有一定的难度, 容易排除掉衰落的或较微弱的信号, 而将幅度较大的脉冲噪声或者突发干扰检测作为信号。本实验在  $\alpha$  噪声的基础上赋予噪声强度  $D$ , 当 SNR 越低, 噪声强度越高时, 噪声的脉冲特性越强。并且检测门限通过蒙特卡洛模拟实验不断地调整, 同时在  $\alpha < 2$  的情况下, SEMEN 的

检测性能容易出现偏差,导致随着 $\alpha$ 增大,SNR越高,SRMGC的检测效果越好,而SRMEN呈现相反的现象。在图7中,将所提出的方法与已有两种方法进行对比。该仿真所需的参数设置如表1所示,考虑到当 $\alpha < 1.6$ 时,能量检测方法会趋于失效,因此选取特征指数 $\alpha = 1.8$ 和 $\alpha = 2$ , $\text{sim} = 6000$ 。当 $\alpha = 1.8, P_f = 0.1, \text{SNR} = -20 \text{ dB}$ 时,其他两种方法的检测概率只能达到10%~20%,SRMGC的检测概率可以达到50%。保持其他条件不变, $\alpha = 2$ 时4种检测算法都有一定的提升。

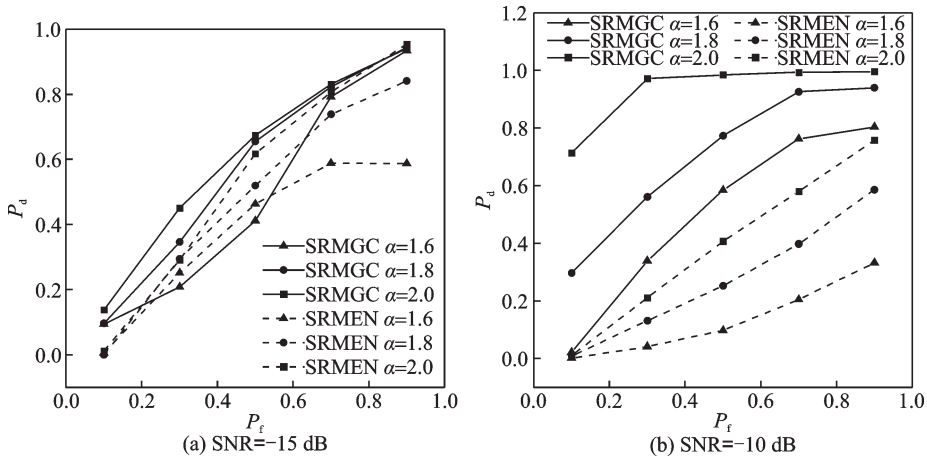


图6 不同特征指数 $\alpha$ 和信噪比SNR下,SRMEN(虚线)和SRMGC(实线)方法的ROC曲线

Fig.6 ROC curves of SRMEN and SRMGC methods with different characteristic indices  $\alpha$  and SNR

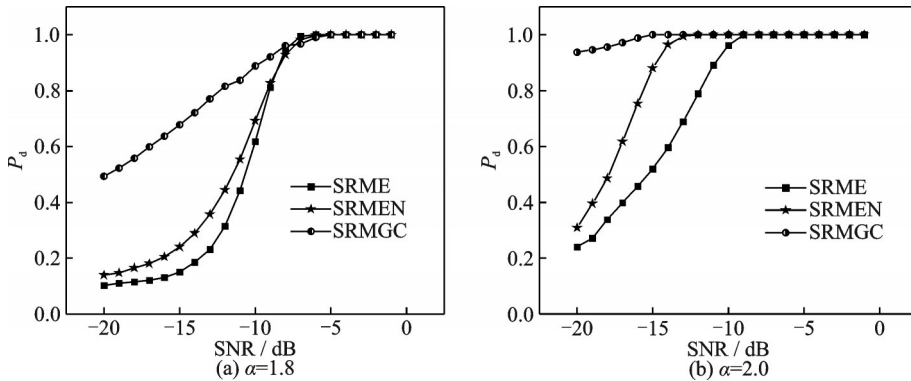


图7 算法对比的ROC曲线

Fig.7 ROC curves for algorithm comparisons

### 6 结束语

在 $\alpha$ 噪声下,传统的SS方法无法精确检测到微弱信号的存在,所以将SR应用到算法中,通过有效的非线性处理方法降低较大的噪声样本值,提高信号的输出SNR,并采用归一化尺度变换将高频微弱信号转为低频信号;再利用最大相关熵方法感知共振后的信号,降低 $\alpha$ 噪声对系统性能的影响。最终的仿真结果证明,在低信噪比条件下该算法比其他传统的SS方法更有效。

### 参考文献:

[1] CLAUDINO L, ABRAO T. Spectrum sensing methods for cognitive radio networks: A review[J]. Wireless Personal Communications, 2017, 95(4): 5003-5037.

- [2] 倪水平, 常慧刚. 基于能量和小波变换的双门限联合频谱感知[J]. 北京邮电大学学报, 2017, 40(4): 117-121.  
NI Shuiping, CHANG Huigang. Double-threshold joint spectrum sensing based on energy and wavelet transform[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2017, 40(4): 117-121.
- [3] WANG Jun, REN Xin, ZHANG Shaowen, et al. Adaptive bistable stochastic resonance aided spectrum sensing[J]. IEEE Transactions Wireless Communications, 2014, 13(7): 4014-4024.
- [4] 赵晓晖, 李晓燕. 基于随机共振和MIMO技术的协方差矩阵频谱感知算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2015, 45(4): 1297-1303.  
ZHAO Xiaohui, LI Xiaoyan. Covariance matrix spectrum sensing algorithm based on stochastic resonance and MIMO technology[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2015, 45(4): 1297-1303.
- [5] LU Jin, HUANG Ming, YANG Jingjing. Study of polarization spectrum sensing based on stochastic resonance in partial polarized noise[J]. Wireless Networks, 2019, 25(8): 4991-4999.
- [6] REDA H T, MAHMOOD A, DIRO A, et al. Firefly-inspired stochastic resonance for spectrum sensing in CR-based IoT communications[J]. Neural Computing and Applications, 2019, 32(20): 16011-16023.
- [7] HAN Dongying, LI Pei, AN Shujun, et al. Multi-frequency weak signal detection based on wavelet transform and parameter compensation band-pass multi-stable stochastic resonance[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70/71: 995-1010.
- [8] TANG Jiachen, SHI Boqiang, BAO Huiru, et al. A new method for weak fault feature extraction based on piecewise mixed stochastic resonance[J]. Chinese Journal of Physics, 2020, 68: 87-99.
- [9] LIU Jian, QIAO Zijian, DING Xiaojian, et al. Stochastic resonance induced weak signal enhancement over controllable potential-well asymmetry[J]. Chaos, Solitons and Fractals: The Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena, 2021, 146: 110845.
- [10] 焦尚彬, 李佳, 张青, 等.  $\alpha$ 稳定噪声下时滞非对称单稳系统的随机共振[J]. 系统仿真学报, 2016, 28(1): 139-146, 153.  
JIAO Shangbin, LI Jia, ZHANG Qing, et al. Stochastic resonance in time-delayed asymmetric monostable systems with  $\alpha$  stable noise[J]. Journal of Systems Simulation, 2016, 28(1): 139-146, 153.
- [11] 张刚, 谢攀, 张天骐.  $\alpha$ 稳定分布噪声下非对称三稳系统的随机共振特性分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(3): 109-116.  
ZHANG Gang, XIE Pan, ZHANG Tianqi. Stochastic resonance characteristics analysis of an asymmetric tri-stable systems under  $\alpha$  stable distributed noise[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(3): 109-116.
- [12] LEE J, PRINCIPE J C. Correntropy-based spectrum sensing for wireless microphones in man-made noise environments[C]// Proceedings of the 2012 3rd International Workshop on Cognitive Information Processing (CIP). Baiona, Spain: IEEE, 2012: 1-6.
- [13] SHI Liming, LIN Yun. Convex combination of adaptive filters under the maximum correntropy criterion in impulsive interference[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(11): 1385-1388.
- [14] LIU Mingqian, ZHAO Nan, LI Junfang, et al. Spectrum sensing based on maximum generalized correntropy under symmetric alpha stable noise[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(10): 10262-10266.
- [15] HUANG Dawen, YANG Jianhua, ZHANG Jingling, et al. An improved adaptive stochastic resonance with general scale transformation to extract high-frequency characteristics in strong noise[J]. International Journal of Modern Physics B, 2018, 32(15): 1850185.
- [16] 胡芳. 关于多元凸函数性质的探讨[J]. 黄冈师范学院学报, 2016, 36(3): 4-7.  
HU Fang. A discussion about the properties of the multivariate convex function[J]. Journal of Huanggang Normal University, 2016, 36(3): 4-7.
- [17] 黄海, 林穗华. 一个PRP型共轭梯度法的收敛性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(3): 28-31.  
HUANG Hai, LIN Suihua. The convergence property of a PRP-type conjugate gradient method[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2012, 34(3): 28-31.

## 作者简介:



李如雪(1997-),女,硕士研究生,研究方向:随机共振、频谱感知,E-mail: liruixue66@mail.ynu.edu.cn。



鲁进(1984-),通信作者,男,副教授,研究方向:认知无线电、随机共振、频谱感知、机器学习,E-mail: lujin211636@ynu.edu.cn。



罗聪(1999-),男,硕士研究生,研究方向:频谱感知、机器学习。