

有限冲激响应执行器的熵率函数

掌德森, 徐大专, 刘甜, 赵曼曼

(南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 211106)

摘要: 控制精度、系统带宽与传输速率在控制系统中的权衡关系是一个重要的开放问题。从信息论角度研究执行器中信息传输速率和失真程度之间的关系, 基于率熵函数分析了控制系统的执行器部分, 对一类具有可再生性的概率分布函数建立了熵率分析框架。熵率不等式表示在带输入噪声的有限冲激响应执行器中, 后验熵与所需传输速率间的关系。基于推导出的表达式, 对不同信噪比下的跟踪系统的互信息数据进行了仿真, 仿真结果与推导的表达式所预期的互信息下界在高信噪比下一致。

关键词: 信息论; 熵率函数; 执行器; 率失真函数; 再生性

中图分类号: TN911.25 **文献标志码:** A

Entropy-Rate Function of FIR Actuator

ZHANG Desen, XU Dazhuan, LIU Tian, ZHAO Manman

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: The trade-off between control accuracy, bandwidth, and transmission rate in control systems is an important open question. This paper studies the trade-off relation between information transmission rate and distortion from the perspective of information theory. The actuator part of the control system is analyzed based on rate entropy function. An entropy rate analysis framework for a class of reproducible probability distribution function is established. The derived entropy rate inequality represents the relationship between posterior entropy and desired transmission rate in the finite impulse response (FIR) actuator. Based on the derived expressions, the mutual information data of the tracking system under different signal-to-noise ratios is simulated, and the simulation results are coordinated with the expression expectations.

Key words: information theory; entropy-rate function; actuator; rate-distortion function; regeneration

引言

众所周知信息论和控制论具有共同的理论和工程背景, 两者都与信号和动态系统有关。信息论已经在最优控制指标, 系统速率失真界限, 系统的可解释性等控制领域问题得到应用。通信理论主要关注信息从一个点到另一个点的可靠传输, 它相对不关心传输信息的目的或最终是否反馈给源, 相比之下, 控制理论使用反馈回路中的信息来实现控制系统性能目标, 并且通常假设通信的限制不会显著影

响性能。大多数传统的控制系统分析假设观察到的信号在控制器的整个决策时间段中都可利用^[1];然而,实际情况是控制器接收到原始观测信号的量化版本,受比特率约束,伴随着传输延迟和失真^[2-3]。最近不少工作利用信息论在控制领域做了性能指标的基本极限研究^[4-7],比如2019年Nekouei等^[4]使用互信息来评价系统对外泄露的信息量,即系统状态和系统实际输出的互信息量。2019年Fang等^[5]使用后验熵给出了对时间序列的估计的均方误差下界。本团队^[6]此前在探测和雷达系统领域进行过信息论极限研究,针对具有可再生性的一类概率分布函数(Possibility distribution function,PDF)分布族推导了率失真表达式,这为本文分析执行器的熵率关系提供了理论基础。

量化、延迟、噪声和带宽限制都是执行器存在的限制^[8-9]。目前还没有针对这些问题的通用解决方法。当控制器和受控动态对象之间通过执行器信道交换信息时会出现量化问题,该执行器信道在任何给定时间只能传输有限数量的状态^[10]。反馈控制的固有延迟使带宽限制下的控制问题变得更加复杂^[11-12]。还有一类控制系统的信息论研究工作不考虑系统中延时的影响,基于随机信源和信道的序列率失真函数,在时不变的标量高斯-马尔可夫源,渐进均方误差(Mean square error,MSE)约束下,推导了闭合表达式,推导了平稳的标量高斯-马尔可夫源,在逐点MSE约束下的序列率失真函数^[13-15]。采用直接互信息作为信息传输的失真度量,由服从二次代价函数的条件概率集中,推导出率失真函数的下界,适用于信源PDF为高斯且量化噪声PDF符合平滑条件的部分观测系统^[16],但是该工作对非高斯情况下或者二次型失真外的其他失真度量闭合表达式缺少研究。可见寻找带约束的控制系统的失真率关系是一个困难的领域,通常缺乏解析表达式的结果,寻找简单但有意义的控制成本,使其极小化是一个重要的开放问题。

本文的目标是对带宽制约的控制系统模型推导出类似信息论中经典的失真率函数,从而描述控制精度(后验熵)、系统带宽与传输速率间的关系,给出有限冲激响应(Finite impulse response,FIR)执行器在给定后验熵失真下传输信息量的下界。研究已表明,达成一个好的数据量化需要更大的信道容量或更长的时间分配给数据传输^[12-14],本文推导的熵率下界对一类可再生性分布族适用,且仿真结果显示,在高信噪比下,所推导下界与系统实际互信息仿真结果贴合紧密。因此,全文基于率熵函数^[6]研究一种带噪FIR执行器的信息论建模,主要贡献是将后验熵定义为系统的失真度量推导出具有观测噪声的给定执行器的熵率函数。

1 熵率函数

1.1 失真率函数

本文考虑离散时间随机过程,所有随机过程的期望假定为零。设控制系统是线性无记忆的,控制系统的参考信号是向量 Y ,输出信号是向量 \hat{Y} 。记连续信源 Y 的PDF为 $p(y)$,描述执行器的条件信道PDF为 $f(\hat{y}|y)$,反向条件PDF为 $g(y|\hat{y})$,二者之间的关系在实际应用场景中相当于数模转换器和模数转换器之间的关系。执行器输出信宿的PDF为 $q(\hat{y})$ 。文中变量意义如表1所示。

y 和 \hat{y} 之间的失真函数 $d(y,\hat{y})$ 为非负实数,平均失真度为 $\bar{d}=E[d(y,\hat{y})]$,平均失真度满足 $\bar{d}\leq D$ 的所有试验信道集合为 $P_R=\{f(\hat{y}|y); I(\hat{Y}; Y)\leq R\}$,则失真-率函数定义为

$$D(R)=\inf_{f(\hat{y}|y)\in P_R} E[d(y,\hat{y})] \quad (1)$$

表1 符号对照表
Table 1 Nomenclature

变量	意义
$x(k)$	系统方程第 k 步的状态变量
$y(k)$	系统方程第 k 步的参考变量
$\hat{y}(k)$	系统方程第 k 步的实际输出变量
$e(k)$	系统方程第 k 步的输入变量
$f(\hat{y} y)$	执行器的条件信道PDF
$g(y \hat{y})$	反向条件PDF
$q(\hat{y})$	执行器输出信宿的PDF

失真函数的具体形式由实际应用场景确定,常见的失真函数采用平方失真 $d(y, \hat{y}) = (y - \hat{y})^2$ 或绝对值失真 $d(y, \hat{y}) = |y - \hat{y}|$, 对应的平均失真度分别称为均方失真准则和绝对失真准则。失真率函数的求解是平均失真度在互信息约束下的变分问题,求解复杂且目前只有高斯分布等少数几类信源 PDF 下存在闭合解析式。下面小节给出将平均失真度定义为后验熵的熵率函数框架。

1.2 可再生性分布族的熵率函数

本文研究 FIR 系统中的信息论界限的框架是熵率函数,它将失真度量与互信息联系起来。

$$p(y, \hat{y}) = g(y|\hat{y})q(\hat{y}) \quad (2)$$

考虑用一类形如 $g(\hat{y}|y) = g(\zeta) = g(y - \hat{y})$ 的表达式来描述反向条件概率分布

$$p(y, \hat{y}) = g(y - \hat{y})q(\hat{y}) \quad (3)$$

对 \hat{y} 积分得

$$p(y) = \int g(y - \hat{y})q(\hat{y})d\hat{y} \quad (4)$$

记理想输出与实际输出序列间的误差统计量为 $\zeta = y - \hat{y}$, 那么 $y = \zeta + \hat{y}$, 有卷积等式成立

$$p(y) = g(\zeta) * q(\hat{y}) \quad (5)$$

可见, FIR 系统下的 PDF 符合卷积关系式,其特征函数可以写成

$$P_Y(j\omega) = G_Z(j\omega)Q_{\hat{Y}}(j\omega) \quad (6)$$

本文考虑一类具有可再生性的 PDF 作为 FIR 系统中的输入分布和噪声分布,由式(6)可知,这可以保证 FIR 系统的输出与输入是同一种 PDF。可再生性分布族包括连续分布中的高斯、伽马、卡方、柯西分布等,离散分布中的泊松、指数、伯努利分布等。

称服从可再生性分布的信源为可再生信源。对可再生信源可从特征函数方便地求得其后验概率分布,即做逆傅里叶变换 $g(y|\hat{y}) = \text{IFFT}\{G_Z(j\omega)\} = \text{IFFT}\{P_Y(j\omega)/Q_{\hat{Y}}(j\omega)\}$ 。

后验概率分布的微分熵为

$$h(Y|\hat{Y}) = - \int q(\hat{y})g(y|\hat{y})\log_2 g(y|\hat{y})dy \quad (7)$$

故定义失真度量为

$$d(Y; \hat{Y}) = E[-\log_2 g(y|\hat{y})] = - \int q(\hat{y})g(y|\hat{y})\log_2 g(y|\hat{y})dy = h(Y|\hat{Y}) \quad (8)$$

对条件概率分布 $f(\hat{y}|y)$ 和反向条件概率分布 $g(\hat{y}|y)$ 满足贝叶斯公式 $p(y)f(\hat{y}|y) = q(\hat{y})g(y|\hat{y})$, 对其作边缘积分得

$$\int q(\hat{y})g(y|\hat{y})d\hat{y} = p(y) \quad (9)$$

由此定义概率分布组 $(g(y|\hat{y}), q(\hat{y}))$

$$G_R = \left\{ g(y|\hat{y}), q(\hat{y}) \mid I(Y|\hat{Y}) \leq R, \int q(\hat{y})g(y|\hat{y})d\hat{y} = p(y) \right\} \quad (10)$$

$(g(y|\hat{y}), q(\hat{y}))$ 满足失真率关系式

$$H(R) = \inf_{(g(y|\hat{y}), q(\hat{y})) \in G_R} d(Y; \hat{Y}) \quad (11)$$

熵率函数与失真率函数有两个不同点:

- (1) 熵率函数从 $g(\hat{y}|y)$ 定义, 而失真率函数从 $f(y|\hat{y})$ 定义;
- (2) 以可能非负的微分熵作为失真度量, 微分熵的性质会随着不同概率分布而自适应变化。

定理 1 如果存在一组分布 $(g(y|\hat{y}), q(\hat{y}))$ 使 $I(X|\hat{X}) = R$, 并满足式(4), 那么此系统的熵率关系式为

$$H(R) = h(X) - R \tag{12}$$

下面以伽马分布为例说明可再生性分布族为熵率函数推导带来的便捷性。

例 对于伽马分布,期望输出的伽马分布的PDF为

$$p(x) = \frac{\alpha^{p_{out}} x^{(p_{out}-1)} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p_{out})} \quad p_{out} > 0, \alpha > 0 \tag{13}$$

则期望输出的特征函数为

$$\varphi_{out}(t) = \left(1 - \frac{jt}{\alpha}\right)^{-p_{out}} \tag{14}$$

输入端同为伽马分布,概率密度函数为

$$\hat{p}(x) = \frac{\alpha^{p_{in}} x^{(p_{in}-1)} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p_{in})} \quad p_{in} > 0, \alpha > 0 \tag{15}$$

则输入的特征函数为

$$\varphi_{in}(t) = \left(1 - \frac{jt}{\alpha}\right)^{-p_{in}} \tag{16}$$

由乘积关系

$$\varphi_{out/in}(t) = \frac{\varphi_{out}(t)}{\varphi_{in}(t)} = \frac{\left(1 - \frac{jt}{\alpha}\right)^{-p_{out}}}{\left(1 - \frac{jt}{\alpha}\right)^{-p_{in}}} = \left(1 - \frac{jt}{\alpha}\right)^{(p_{in}-p_{out})} \tag{17}$$

由PDF和特征函数具有一一对应的关系可见,执行器的PDF是参数为 $(p_{in}-p_{out})$ 的伽马分布

$$g_{Y|\hat{Y}}(x) = \frac{\alpha^{(p_{in}-p_{out})} x^{(p_{in}-p_{out}-1)} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p_{in}-p_{out})} \quad (p_{in}-p_{out}) > 0, \alpha > 0, -\infty < y < \infty \tag{18}$$

因此失真测度 H 为

$$H = p_{in} - p_{out} - \log_2 \alpha + \log_2 [\Gamma(p_{in}-p_{out})] + (1-p_{in}+p_{out})\psi(p_{in}-p_{out}) = D + \log_2 [\Gamma(D)] + (1-D)\psi(D) \tag{19}$$

式中 $D = p_{in} - p_{out}$ 。那么在互信息不超过 R ,得到伽马分布的熵率函数

$$H(R) = \inf_{(g(y|\hat{y}), q(\hat{y})) \in G_R} E[d(x, \hat{x})] = h(x) - R = p_{out} - \log_2 \alpha + \log_2 [\Gamma(p_{out})] + (1-p_{out})\psi(p_{out}) - R \tag{20}$$

2 线性反馈执行器的熵率函数

有了对熵率函数的一般结论后,本节研究带线性反馈的有记忆执行器的熵率函数。

2.1 执行器模型

假设信道在一个符号周期内不变(慢衰落),记其在第 i 个符号周期内的冲击响应序列为 h ,长度为 m ,系统输入与输出的离散信号卷积关系式为

$$\hat{y}(n) = \sum_{l=n-m+1}^n e(l)h(n-l) \tag{21}$$

传统控制理论使用频域分析理论来刻画噪声与系统传递函数,现代控制理论使用线性代数与状态空间来建立系统状态方程,把式(21)所表示的系统传递函数转换为系统的状态空间方程,得到

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}e(k-1) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}e(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (22)$$

记 $\{x_k\}$ 自相关矩阵为 $m \times m$ 矩阵 $\mathbf{R}(m)$, 那么其功率谱和方差为: $\phi_X(\omega) = \sum_m \mathbf{R}(m) e^{-j\omega m}$, $\sum_X \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(\omega) d\omega$ 。下面的推导以高斯分布为例进行, 高斯随机变量 x 的熵为 $h(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \log_2(2\pi e)^m \left| \sum_X \right|$, 其他可再生性分布的熵也有固定公式可见文献[6]。

假设噪声 \mathbf{v}_k 与系统输入 e_0 , 系统状态 x_0 相互独立, 此 FIR 执行器由图 1 表示, 这里系统每一步的输入 e_k 是根据系统的预期输出信号 y_k 经过估计算法得到的, 记 $x^k = \{x(1), x(2), \dots, x(k)\}$, 同样地 $y^k = \{y(1), y(2), \dots, y(k)\}$, 直接给出本文所使用的基于最大似然估计的逐步估计理论公式

$$p(e_k | y^k, y^{k-1}, e^{k-1}, x^{k-1}, x_k) = \frac{p(e_k, y_k, y^{k-1}, e^{k-1}, x^{k-1}, x_k)}{p(y_k, y^{k-1}, e^{k-1}, x^{k-1}, x_k)} = \frac{f_w f_v p(y^{k-1}, e^{k-1}, x^{k-1}) p(e_k)}{E_{p(e_k)} [f_w f_v p(y^{k-1}, e^{k-1}, x^{k-1})]} \quad (23)$$

由图 1, 将系统实际输出 $\{\hat{y}_k\}$ 频谱写为

$$\hat{Y}(\omega) = Z(\omega) + V(\omega) = C(M - A)^{-1} E(\omega) (M_I - A)^{-T} C^T + V(\omega) \quad (24)$$

式中: $M = [e^{j\omega}, e^{2j\omega}, \dots, e^{dj\omega}] I$, $M_I = [e^{-j\omega}, e^{-2j\omega}, \dots, e^{-dj\omega}] I$ 。

2.2 熵率函数

在这个 FIR 执行器中, 由可再生性分布族的性质, 若输入分布、噪声分布、输出分布中的两者为相同的可再生性 PDF, 那么第 3 个 PDF 会是同形式的 PDF, 以高斯分布为例, 如果噪声分布和输入分布是高斯分布的那么输出也会是高斯分布的, 这可以方便推导与计算 FIR 系统的后验分布。

首先由式(8)定义系统的后验熵失真度量为

$$H = h(\hat{y}|x) = \frac{1}{2} \ln [(2\pi e)^m |\Sigma_v|] \quad (25)$$

由定理 1, 系统的熵率关系式写为 $H = h(\hat{y}) - I(x; \hat{y})$, 代入后验熵和先验熵得到

$$\frac{1}{2} \log_2 [(2\pi e)^m |\Sigma_v|] = \frac{1}{2} \log_2 [(2\pi e)^m |\Sigma_{\hat{y}}|] - I(x; \hat{y}) \quad (26)$$

$$I(x; \hat{y}) = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{|\Sigma_{\hat{y}}|}{|\Sigma_v|} \right] = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{|\Sigma_z + \Sigma_v|}{|\Sigma_v|} \right] \quad (27)$$

这里做矩阵特征值分解, $U_z \Lambda_z U_z^T$ 代表对该矩阵的分解式, $\Lambda_z = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 是 Σ_z 的特征值对角阵, 那么式(27)整理为

$$I(x; \hat{y}) = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{|U_z \Lambda_z U_z^T + \Sigma_v|}{|\Sigma_v|} \right] = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{|\Lambda_z + U_z^T \Sigma_v U_z|}{|U_z^T \Sigma_v U_z|} \right] \quad (28)$$

将 $U_z^T \Sigma_v U_z = U_z^T \sigma_v^2 U_z = \sigma_v^2 U_z^T U_z = \sigma_v^2 I$, 代入式(28)整理, 式(29)的不等号基于文献[6]。

$$I(x; \hat{y}) = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{|\Lambda_z + \sigma_v^2 I|}{|\sigma_v^2 I|} \right] \geq \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{\prod_{i=0}^m [\lambda_i + \sigma_v^2]}{(\sigma_v^2)^m} \right] \quad (29)$$

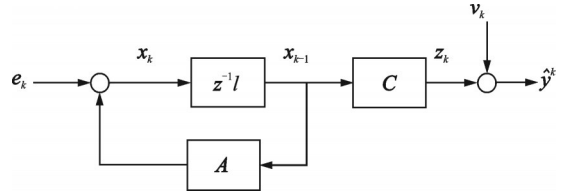


图 1 执行器模型

Fig.1 Actuator model

不等式(29)最右边整理为如下形式

$$\frac{1}{2} \log_2 \left[\prod_{i=1}^m [\lambda_i + \sigma_v^2] \right] - \frac{1}{2} \log_2 (\sigma_v^2)^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \log_2 [\lambda_i + \sigma_v^2] - \frac{1}{2} \log_2 (\sigma_v^2)^m \quad (30)$$

对式(30)两边取极限

$$I_\infty(x; \hat{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(x_{0,1,\dots,k}; \hat{y}_{0,1,\dots,k})}{k+1} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{\lambda_i + \sigma_v^2}{\sigma_v^2} \right] \right\} \quad (31)$$

由于平稳随机过程的相关矩阵是 Toeplitz 的,故矩阵特征值和的极限与该 Toeplitz 矩阵元素对应的傅里叶变换系数的关系由 Szego 定理可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{k=0}^k \lambda_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\omega) d\omega$, 整理得到率熵关系式

$$I_\infty(x; \hat{y}) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{\sigma_v^2 + Z(\omega)}{\sigma_v^2} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \log_2 \left[1 + \frac{Z(\omega)}{\sigma_v^2} \right] d\omega \quad (32)$$

式中: $\sigma_v^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\omega) d\omega$, 可以看到式(32)中 $\int_{-\pi}^{\pi} \log_2 \frac{Z(\omega)}{\sigma_v^2} d\omega$, 这一项表示的是系统信噪比。

有了率熵关系式可以进一步推导出熵率关系式,首先有后验熵与互信息的关系

$$h_\infty(x|\hat{y}) = h_\infty(y) - I_\infty(x; \hat{y}) \quad (33)$$

以约束 $h(y|\hat{y}) \leq D$, 推导后验熵极大值, 根据定理1, 代入 $I_\infty(x; \hat{y}) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{\sigma_v^2 + Z(\omega)}{\sigma_v^2} \right] d\omega$

到式(33), 这里的约束上界 D 指的是 $E[v_k^2] \leq D$ 。

$$\begin{aligned} \sup_{h(y|\hat{y}) \leq D} h_\infty(x|\hat{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log_2 \sqrt{(2\pi e)^m |\phi_X(\omega)|} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log_2 \sqrt{\frac{\sigma_v^2 + Z(\omega)}{\sigma_v^2}} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log_2 \sqrt{\frac{(2\pi e)^m |\phi_X(\omega)| \sigma_v^2}{\sigma_v^2 + Z(\omega)}} d\omega \end{aligned} \quad (34)$$

继续在约束 $I_\infty(x; \hat{y}) \leq R$ 下推导熵率函数关系式, 可以直接得到

$$\inf_{I(x; \hat{y}) \leq R} h_\infty(x|\hat{y}) = \frac{C(M-A)^{-1}E(\omega)(M_I-A)^{-T}C^T}{2^{2R}-1} - \sigma_v^2 \quad (35)$$

当执行器矩阵已知时, 有带宽约束控制系统的经典结论^[9], 任何平方稳定的控制器视作一个编码信道, 需要满足信息传输速率下限

$$R \geq \sum_{|\eta_j| \geq 1} \log_2 |\eta_j| \quad (36)$$

式中 η 为系统开环矩阵的特征值。可见, 式(19)的下限是在带有线性反馈以及系统噪声干扰的情况下更紧的执行器信息传输率下界。

3 仿真结果

基于状态空间方程(12)进行仿真, 此系统是一个带宽为 1 Hz 的随机信号跟踪系统, 其参考信号为 y_k , 实际输出信号为 \hat{y}_k 。图 2 中, 左列为信号序列的 FFT 变换后频谱分析, 右列为信号的时域序列。第 1 行是参考信号 y_k , 第 2 行是对应的实际输出信号 \hat{y}_k ; 第 3 行是逐步估计的输入信号 e_k 基于式(23), 最后一行是系统中的窄带噪声。

在输入信噪比从 1~60 dB 变化过程中, 仿真计算互信息 $I(x; \hat{y})$ 在系统迭代每一步的值在图 3 中给出, 随着系统输入信噪比的提升, 互信息会逐步升高, 同时存在有一个由系统矩阵所确定的互信息下界。图 3

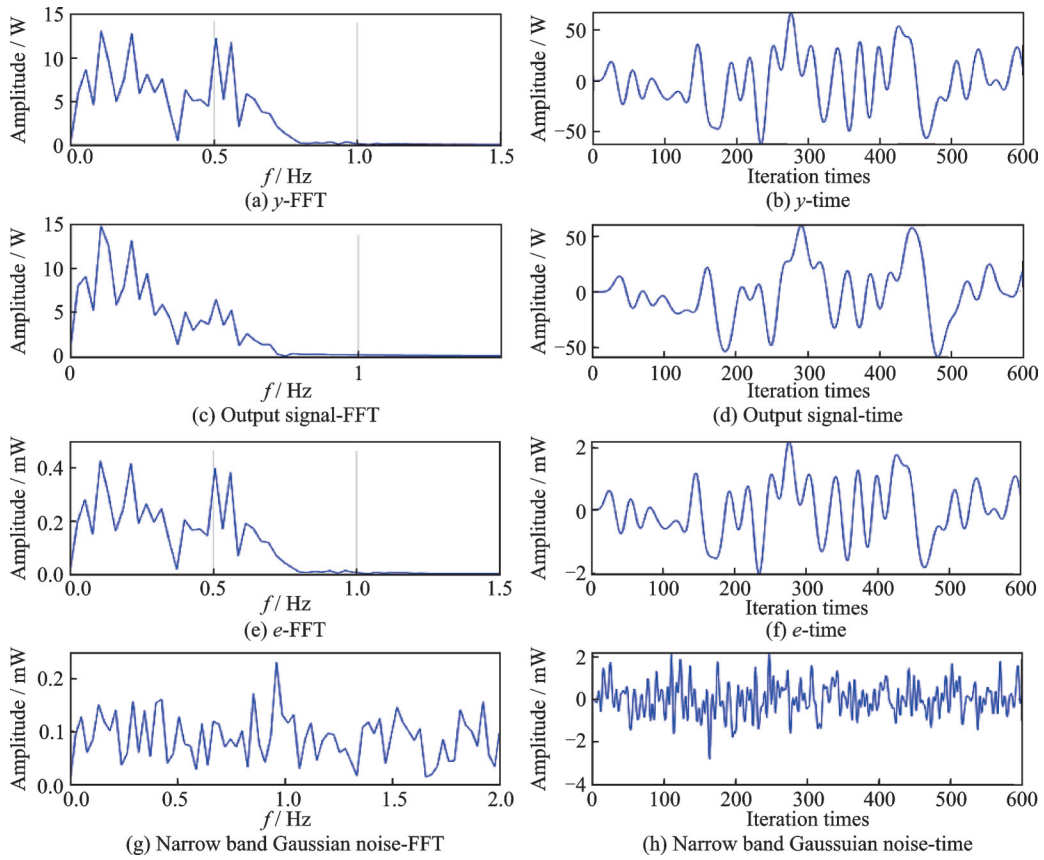


图2 FIR跟踪系统的各系统变量参数

Fig.2 Variable parameters of FIR tracking system

中,系统迭代到第30步后进入平稳,此后互信息在各SNR下均保持稳定,根据式(19)的计算结果 $I(x; \hat{y})$ 理论下界应为 $I(x; \hat{y}) \geq 0.89$,可见在高信噪比下式(19)的率熵下界和系统平稳后的互信息贴合紧密。

4 结束语

本文继承之前的率熵函数工作,并尝试解决控制领域的速率失真理论公式问题。首先给出了可再生性分布下多种概率分布的熵率函数,然后在线性反馈的FIR执行器中推导该FIR执行器模型的率熵函数关系,表明了此执行器模型的后验熵失真与所需信息传输率之间的权衡关系。熵率函数在执行器的应用中,主要体现在对于系统失真度的度量基于后验熵,以后验熵失真表示了执行器实际输出与期望输出的偏差,推导了率熵关系式(19),熵率关系式(21),并仿真计算了系统逐步迭代过程中每一步的互信息与理论互信息下界对比,结果表明在高信噪比下的理论互信息下界和实际互信息结果贴合紧密。后续工作中对最优控制的问题将做进一步研究。

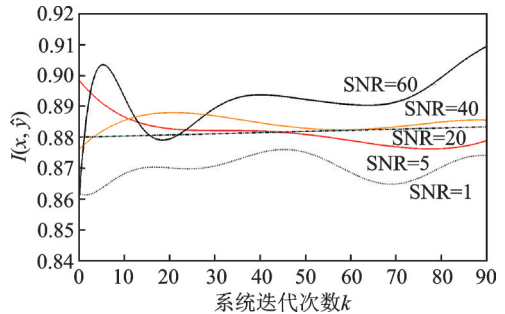


图3 跟踪系统不同信噪比下的互信息 $I(x; \hat{y})$

Fig.3 Mutual information $I(x; \hat{y})$ of the track system under different SNRs

参考文献:

- [1] NAIR G N, FAGNANI F, ZAMPIERI S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 108-137.
- [2] TATIKONDA S, MITTER S. Control under communication constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(7): 1056-1068.
- [3] BORKAR S M. LQG control with communication constraints[C]//Proceedings of Communications, Computation, Control, and Signal Processing: A Tribute to Thomas Kailath. Norwell, USA: Kluwer, 1997.
- [4] NEKOEI E, TANAKA T, SKOGLUND M, et al. Information-theoretic approaches to privacy in estimation and control[J]. Annual Reviews in Control, 2019, 47: 412-422.
- [5] FANG S, SKOGLUND M, JOHANSSON K H, et al. Generic variance bounds on estimation and prediction errors in time series analysis: An entropy perspective[J]. IEEE Information Theory Workshop (ITW), 2019. DOI:10.48550/arXiv.1904.04765.
- [6] 徐大专, 刘甜. 率熵函数[J]. 数据采集与处理, 2021, 36(6): 1073-1083.
XU Dazhuan, LIU Tian. Rate entropy function[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2021, 36(6): 1073-1083.
- [7] FANG S, CHEN J, ISHII H. Towards integrating control and information theories: From information-theoretic measures to control performance limitations[M]. [S.l.]: Springer, 2017.
- [8] XU Dazhuan, ZHANG Xiaofei. Spatial information theory[M]. Beijing: Science Press, 2021.
- [9] GIRISH N, ROB E. Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates[J]. SIAM J Control and Optimization, 2004, 43: 413-436.
- [10] KEYONG L, BAILLIEUL J. Robust quantization for digital finite communication bandwidth (DFCB) control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1573-1584.
- [11] WING Shingwong, BROCKETT R W. Systems with finite communication bandwidth constraints II stabilization with limited information feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(5): 1049-1053.
- [12] BAILLIEUL J. Matching conditions and geometric invariants for second-order control systems[C]//Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. [S.l.]: IEEE, 1999: 1664-1670.
- [13] CHARALAMBOUS C D, KOURTELLARIS C K, TZORTZIS I. Information transfer of control strategies: Dualities of stochastic optimal control theory and feedback capacity of information theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5010-5025.
- [14] TATIKONDA S, SAHAI A, MITTER S. Control of LQG systems under communication constraints[C]//Proceedings of the 1999 American Control Conference. [S.l.]: IEEE, 1999: 2778-2782.
- [15] DERPICH M S, OSTERGAARD J. Improved upper bounds to the causal quadratic rate-distortion function for Gaussian stationary sources[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(5): 3131-3152.
- [16] KOSTINA V, HASSIBI B. Fundamental limits of distributed tracking[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). [S.l.]: IEEE, 2020: 2438-2443.

作者简介:



掌德森(1997-),男,硕士研究生,研究方向:空间信息论、控制系统,E-mail:ds-zhang@nuaa.edu.cn。



徐大专(1963-),通信作者,男,教授,博士生导师,研究方向:空间信息论、信息与编码理论、宽带无线通信,E-mail:xudazhuan@nuaa.edu.cn。



刘甜(1997-),女,硕士研究生,研究方向:空间信息论,E-mail:liutian@nuaa.edu.cn。



赵曼曼(1997-),女,硕士研究生,研究方向:空间信息论、阵列信号处理,E-mail:zhao-manman@nuaa.edu.cn。