

# 降维的四阶累量近场信源定位方法

李宛儒<sup>1</sup>, 邓科<sup>1</sup>, 殷勤业<sup>1</sup>, 张雁<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学电子与信息学部, 西安 710049; 2. 国网陕西省电力公司信息通信公司, 西安 710048)

**摘要:** 针对近场信源定位中自由度小、准确性低等问题, 提出一种基于四阶累量矩阵的定位算法。首先构造等效导向矢量包含波达方向(Direction of arrival, DOA)和距离信息的高维虚拟协方差矩阵, 在角度估计中, 提出基于矩阵秩亏来搜索最小奇异值倒数的一维搜索方法, 降低了计算量, 在增大自由度的同时利用高斯噪声高阶累量为零的特性提高了低信噪比下的性能; 在不进行额外计算的前提下, 直接利用角度估计中进行奇异值分解时得到的奇异向量所包含的距离信息, 通过最小二乘法得到距离。仿真结果表明, 相比于已有算法, 该方法可以仅在一个高阶累量矩阵中通过一维搜索估计角度和距离, 在降低复杂度的同时提高了准确性, 并且提出方法的自由度是降维多重信号分类方法的2倍。

**关键词:** 阵列信号处理; 近场信源; 四阶累量; 一维搜索; 最小二乘法

**中图分类号:** TN911      **文献标志码:** A

## Dimension Reduced Fourth-Order Cumulant Near-Field Source Localization Method

LI Wanru<sup>1</sup>, DENG Ke<sup>1</sup>, YIN Qinye<sup>1</sup>, ZHANG Yan<sup>2</sup>

(1. Faculty of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Information and Communications Company, State Grid Shaanxi Electric Power Company, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** For the problems of low degree of freedom and low accuracy in near-field source localization, a localization algorithm based on fourth-order cumulant matrix is proposed. Firstly, a high-dimensional virtual covariance matrix is constructed, where the equivalent steering vector contains both direction of arrival (DOA) and distance information. In angle estimation, a one-dimensional search method based on rank deficiency to search the reciprocal of the minimum singular value is proposed, where the computational burden is reduced. The degrees of freedom are increased and the characteristic that the high-order cumulant of Gaussian noise is zero is exploited to improve the estimation performance at low signal-to-noise ratio. In the estimation of distance, the distance information contained in the singular vector obtained by singular value decomposition in angle estimation can be directly exploited without additional calculation, and the distance is estimated by the least square method. Simulation results show that the method estimates the angle and distance information of the near-field source through the one-dimensional search only in a high-order cumulant matrix, which reduces the computational burden and improves the accuracy of the estimation compared with the existing algorithms. Moreover, the proposed method has twice as many degrees of freedom as the reduced-dimension MUSIC method.

**Key words:** array signal processing; near-field source; fourth-order cumulant; one-dimensional search; least square method

## 引 言

阵列信号处理是通信领域的重要研究方向<sup>[1-2]</sup>,波达方向(Direction of arrival, DOA)估计作为其主要的分支在雷达、声呐等方面有着广泛的应用<sup>[3-4]</sup>。近年来研究人员在远场估计方面提出了一系列基于稀疏重构<sup>[5-6]</sup>和子空间<sup>[7-9]</sup>的方法。但是当信号处于菲涅尔区域<sup>[10]</sup>时,距离参数不可忽略<sup>[11]</sup>,因此以上估计方法对于近场无法直接使用,文献[12]提出了一种二维多重信号分类(Two-dimensional multiple signal classification, 2D-MUSIC)算法,但是计算复杂度很高。文献[13]采用原子范数最小化来计算近场 DOA,然后利用传统一维搜索估计距离。文献[14]将四阶累量与低秩 Toeplitz 矩阵重构理论结合,通过参数配对得到每个近场信源的 DOA 和距离。文献[15]基于离格稀疏表示提出了交替迭代优化方法。以上稀疏重构类方法均存在计算量较大的问题。文献[16-18]提出了将阵列分为两个子阵列的方式构造仅对角度信息具有旋转不变性的信号子空间,通过角度搜索来计算近场 DOA 的方法。其中文献[16]在计算出角度后通过一维搜索计算出每个角度对应的距离;文献[17]将近场问题扩展到了混合场,对于远场采用传统的多重信号分类(Multiple signal classification, MUSIC)方法,利用重构协方差矩阵的方式得到了仅包含近场信息的协方差矩阵,提高了混合场中近场信源的估计性能;文献[18]利用远场协方差矩阵是 Toeplitz 矩阵的特性,使用矩阵差分的方法减掉了远场信息。文献[19]利用拉格朗日定理对角度进行估计,使用最小二乘法对距离进行估计,在高信噪比和信号数目较少时可以在降低计算量的前提下达到与 2D-MUSIC 相同的准确度,但是在信噪比较低或信号较多的情况下性能不够好,且在计算角度时无法同时得到距离向量,需要将已估计的角度代入后对矩阵进行求逆和乘积操作。当存在  $2N + 1$  个阵元时,文献[16-19]均只有  $N$  个自由度<sup>[20]</sup>。以上方法都存在自由度较低的问题,而且当信号个数较多时,即使处于最大可估计信源个数范围内,由于噪声空间较小,性能也会出现较为严重的下降。

近年来,为了增大可估计信源的总个数以及提高准确性,学者们将子空间方法应用于四阶累量矩阵中,提出了一系列近场信源定位算法<sup>[21-23]</sup>,极大地增加了天线阵列的有效孔径。文献[21]提出了一种利用累积量进行波束形成的技术,但是在近场估计中无法直接应用。文献[22]在远近场混合模型下,构造了两个累量矩阵分别计算所有信源 DOA 和近场距离,但是计算复杂;而且估计角度时只用到了对称阵元上的信息,估计距离时只使用了求和取平均思想,导致准确性不够好。文献[23]将互质阵应用于近场定位,但是在估计 DOA 和距离时均需要谱峰搜索,计算量较大。

本文提出了一种新的近场信源估计算法。参考文献[22]中的方法构建了四阶累量矩阵,其中的等效导向矢量同时包含了信源的角度和距离信息。本文将其分解为一个只含有角度信息矩阵与一个含有角度和距离信息列向量相乘的形式,并将噪声子空间与角度矩阵的乘积视为系数矩阵。出现正确角度时,本问题可等效为齐次方程存在非零解的情形,此时系数矩阵会发生秩亏,基于这一性质,提出了一种通过搜索最小奇异值倒数的最大值来估计 DOA 的算法,将二维搜索转化成一维搜索,降低了计算复杂度。而且在角度估计中可以同时得到含有距离信息的矢量,实现角度和距离的自动配对,不需要像文献[19]一样进行额外的计算,在此基础上直接对上述矢量使用最小二乘法计算距离。为了获得更好的距离估计性能,可以进一步将提出的角度估计算法与传统距离算法相结合,虽然增加了计算量,但是可以有效提高估计的准确性。与文献[19]相比,提出的算法具有较大的自由度,在信号多的情况下估计性能明显提高,由高斯噪声在高阶累量中为零这一特性,提出的方法具有较强的抗噪声能力,在低信噪比时也有较好的性能。与文献[22]相比,提出的方法可以在只构造一个累量矩阵的前提下利用接收信号全部信息达到更好的估计效果,同时降低了计算复杂度。

## 1 系统模型

假设  $K$  个近场信号入射到如图 1 所示的对称均匀线性阵列上,其中阵列中心为参考点,阵元总数为  $2N + 1$ ,相邻阵元间距为  $d$ , $(\theta_k, r_k)$  代表第  $k$  个信号的入射角和距离。定义  $\omega_k = -\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_k, \phi_k = \frac{\pi d^2}{\lambda r_k} \cos^2 \theta_k$ 。

在  $t$  时刻,阵列上的接收信号可以表示为<sup>[24]</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$  为信号向量;  $\mathbf{n}(t) = [n_{-N}(t), n_{-N+1}(t), \dots, n_N(t)]^T$  代表噪声部分,其中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\omega_1, \phi_1), \mathbf{a}(\omega_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\omega_k, \phi_k), \dots, \mathbf{a}(\omega_K, \phi_K)] \quad (2)$$

式中  $\mathbf{a}(\omega_k, \phi_k) = [e^{j(-\omega_k N + \phi_k N^2)}, e^{j(-\omega_k(N-1) + \phi_k(N-1)^2)}, \dots, e^{j(-\omega_k + \phi_k)}, 1, e^{j(\omega_k + \phi_k)}, \dots, e^{j(\omega_k N + \phi_k N^2)}]^T$ 。

对于本文中的信号与噪声,需要满足以下假设:(1) 所有信号是统计上独立的、零均值不相关的非高斯窄带平稳随机过程;(2) 每个传感器都有零均值、加性高斯噪声,并且噪声与信号无关;(3)  $d \leq \frac{\lambda}{4}$ , 信源个数  $K \leq 2N$ 。

## 2 近场信源到达角估计

由于信号为零均值非高斯独立随机过程,因此有<sup>[25]</sup>

$$\text{cum}\{s_m(t), s_n^*(t), s_p^*(t), s_q(t)\} = \begin{cases} c_{4,k} & m = n = p = q = k \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $s$  为入射信号; $m, n, p, q \in [1, K]$ ;  $c_{4,k} = \text{cum}\{s_k(t), s_k^*(t), s_k(t), s_k^*(t)\}$  为第  $k$  个信号的累量值。

定义四阶累量矩阵为<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned} C_1(m-n+2N+1, p-q+2N+1) &= \text{cum}\{x_m(t), x_n^*(t), x_p^*(t), x_q(t)\} = \\ & \sum_{k=1}^K c_{4,k} e^{j((m-N)\omega_k + (m^2-N^2)\phi_k)} e^{-j((p-N)\omega_k + (p^2-N^2)\phi_k)} \\ m &= -N, -N+1, \dots, N; n = N; p = -N, -N+1, \dots, N; q = N \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_2(m-n+2N+1, p-q) &= \text{cum}\{x_m(t), x_n^*(t), x_p^*(t), x_q(t)\} = \\ & \sum_{k=1}^K c_{4,k} e^{j((m-N)\omega_k + (m^2-N^2)\phi_k)} e^{-j((N-q)\omega_k + (N^2-q^2)\phi_k)} \\ m &= -N, -N+1, \dots, N; n = N; p = N; q = N-1, N-2, \dots, -N \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_3(m-n, p-q+2N+1) &= \text{cum}\{x_n(t), x_n^*(t), x_p^*(t), x_q(t)\} = \\ & \sum_{k=1}^K c_{4,k} e^{j((N-n)\omega_k + (N^2-n^2)\phi_k)} e^{-j((p-N)\omega_k + (p^2-N^2)\phi_k)} \\ m &= N; n = N-1, N-2, \dots, -N; p = -N, -N+1, \dots, N; q = N \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_4(m-n, p-q) &= \text{cum}\{x_N(t), x_n^*(t), x_N^*(t), x_q(t)\} = \\ & \sum_{k=1}^K c_{4,k} e^{j((N-n)\omega_k + (N^2-n^2)\phi_k)} e^{-j((N-q)\omega_k + (N^2-q^2)\phi_k)} \\ m &= N; n = N-1, N-2, \dots, -N; p = N; q = N-1, N-2, \dots, -N \end{aligned} \quad (7)$$

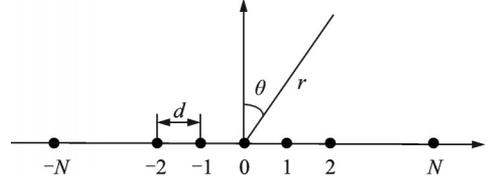


图1 阵列模型

Fig.1 Array model

利用以上4个矩阵构造一个 $(4N + 1) \times (4N + 1)$ 维的方阵  $C$  为

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = DC_{4,S}D^H \tag{8}$$

式中  $C_{4,S} = \text{diag} \{c_{4,1}, c_{4,2}, \dots, c_{4,k}, \dots, c_{4,K}\}$  为仅包含信号四阶累量信息的对角阵。等效导向矢量矩阵可以表示为

$$D = [d(\omega_1, \phi_1), d(\omega_1, \phi_1), \dots, d(\omega_k, \phi_k), \dots, d(\omega_K, \phi_K)] \tag{9}$$

式中

$$d(\omega_k, \phi_k) = [e^{j[-2N\omega_k + \{( -N \}^2 - N^2)\phi_k]} e^{j[(-2N+1)\omega_k + \{(-N+1)^2 - N^2\}\phi_k]} \dots e^{j[-N\omega_k + \{(0)^2 - N^2\}\phi_k]} e^{j[(-N+1)\omega_k + \{(1)^2 - N^2\}\phi_k]} e^{j[(-N+2)\omega_k + \{(2)^2 - N^2\}\phi_k]} \dots e^{j[0\omega_k + \{(N)^2 - N^2\}\phi_k]} e^{j[(1)\omega_k + \{(N)^2 - (N-1)^2\}\phi_k]} e^{j[(2)\omega_k + \{(N)^2 - (N-2)^2\}\phi_k]} \dots e^{j[(2N-1)\omega_k + \{(N)^2 - (-N+1)^2\}\phi_k]} e^{j[(2N)\omega_k + \{(N)^2 - (-N)^2\}\phi_k}]^T \tag{10}$$

由式(8)可以看出  $C$  是一个具有共轭对称特性的方阵,对  $C$  进行特征值分解可以得到

$$C = U_s \Lambda_s U_s^H + U_n \Lambda_n U_n^H \tag{11}$$

式中  $\Lambda_n$  为由较小的  $4N + 1 - K$  个特征值组成对角阵,对应的特征向量组成噪声子空间  $U_n$ ,由子空间定理可知,信号子空间与噪声子空间正交,如式(12)所示。

$$U_n^H d(\omega_k, \phi_k) = 0_{(4N+1-K) \times 1} \tag{12}$$

由于导向矢量  $d(\omega_k, \phi_k)$  中同时存在角度和距离变量,如在式(13)中使用传统谱峰搜索算法,则需要在角度维和距离维进行二维搜索,计算复杂。

$$P(\theta, r) = \frac{1}{d^H(\omega_k, \phi_k) U_n U_n^H d(\omega_k, \phi_k)} \tag{13}$$

为了降低计算量,本文提出一种解耦角度和距离的方法。将  $d(\omega_k, \phi_k)$  拆分为两个矩阵乘积的形式

$$d(\omega_k, \phi_k) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j[-2N\omega_k]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jN\omega_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\omega_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{jN\omega_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j(2N-1)\omega_k} & 0 & 0 \\ e^{j2N\omega_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q(\omega_k)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\{(-N+1)^2 - N^2\}\phi_k} \\ \vdots \\ e^{j\{(1)^2 - N^2\}\phi_k} \\ e^{j\{(0)^2 - N^2\}\phi_k} \\ e^{j\{(N)^2 - (N-1)^2\}\phi_k} \\ e^{j\{(N)^2 - (N-2)^2\}\phi_k} \\ \vdots \\ e^{j\{(N)^2 - (1)^2\}\phi_k} \\ e^{j\{(N)^2 - (0)^2\}\phi_k} \end{bmatrix}}_{W(\phi_k)} \tag{14}$$

式中  $Q$  为一个只与信号入射角有关的  $(4N + 1) \times (2N + 1)$  维矩阵;  $W$  为与角度和距离均有关的  $(2N + 1) \times 1$  维列向量,表达式为

$$W = [1, e^{j\{(-N+1)^2 - N^2\}\phi_k}, \dots, e^{j\{(1)^2 - N^2\}\phi_k}, e^{j\{(0)^2 - N^2\}\phi_k}, e^{j\{(N)^2 - (N-1)^2\}\phi_k}, e^{j\{(N)^2 - (N-2)^2\}\phi_k}, \dots, e^{j\{(N)^2 - (1)^2\}\phi_k}, e^{j\{(N)^2 - (0)^2\}\phi_k}]^T \tag{15}$$

定义矩阵

$$E_{(4N+1-K) \times (2N+1)} = U_n^H Q \tag{16}$$

则式(12)可以改写为

$$EW = 0_{(4N+1-K) \times 1} \tag{17}$$

当角度和距离均为正确数值时,式(17)可以看作一个齐次方程组,其中 $E$ 为系数矩阵, $W$ 为解向量,由 $W$ 的结构可知其一定不是零向量,所以此齐次方程一定存在至少一组非零解,因此系数矩阵的秩一定小于未知数个数,即

$$\text{rank}(E) < 2N + 1 \quad (18)$$

由于信号入射角度 $\theta$ 均在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 范围内,矩阵 $E$ 仅与角度有关,且 $E$ 的秩随 $\theta$ 的不同而发生变化,因此可以只在角度维进行搜索,当矩阵 $E$ 发生秩亏,即 $E$ 的最小奇异值为0时,对应的角度即为正确DOA。

因为现实情况下存在噪声和误差,当出现正确角度时,矩阵的秩一般不会真正减小,但是此时最小奇异值即使不为0也会出现最接近于0的值。并且可以在此性质的基础上衍生出多种利用最小奇异值来搜索正确角度的方法,下面列举2种有代表性的方法:(1)矩阵 $E$ 的最小奇异值的倒数;(2)矩阵 $E$ 的最大奇异值与最小奇异值的比值。

经过仿真可知2种方法具有基本相同的误差,因此在本文使用最简单的搜索奇异值倒数的方法估计DOA,即

$$P(\theta) = \frac{1}{V_{\min}} \quad (19)$$

式中: $V_{\min}$ 为 $E$ 的最小奇异值,对 $P$ 进行一维谱峰搜索,最大的 $K$ 个峰值对应的角度即为近场信源的DOA。对比式(13,19)可以看出,利用所提出的搜索矩阵秩亏方法,实现了变量的分离,角度和距离的二维搜索被转化成了仅需在角度维进行的一维搜索,大大降低了计算复杂度。

值得注意的是,当 $U_n^H$ 的行数小于 $2N + 1$ 时,无论是否为正确角度矩阵 $E$ 的秩都小于未知数个数,因此这个方法需保证噪声子空间的列数大于等于 $2N + 1$ ,即信号个数小于等于 $2N$ 。文献[19]利用对协方差矩阵的噪声子空间和含有角度信息的阵列构造出的矩阵求逆的方式搜索DOA,当信号个数超过 $N$ 时,矩阵不可逆,因此自由度只有 $N$ 。由此可见,本文具有2倍于文献[19]的自由度。

### 3 近场信源距离估计

由于信号的距离信息包含在 $W$ 中,因此得到距离的一个途径是计算出列向量 $W$ 中的所有元素。

**定理1**  $W$ 是 $E^H E$ 最小特征值对应的特征向量。

**证明** 式(17)可以等效为一个齐次方程, $W$ 可视为非零解向量。将已经计算出的角度代入 $E$ 中,相当于系数矩阵已知。由于估计误差的存在,导致此方程无法成为真正的齐次方程,如使用MATLAB对其直接进行求根计算,只能得到全零解。因此提出一种计算非零解向量的方法。通过观察可知, $W$ 是一个 $2N + 1$ 维列向量,并且所有元素的模值均为1,因此可以得到

$$\|W\|^2 = 2N + 1 \quad (20)$$

由于式(17)无法绝对成立,但是可以使等式尽量接近于齐次方程,即让等式右边模值尽量小,此时问题转化为找到使 $\|EW\|^2 = W^H E^H EW$ 在 $\|W\|^2 = 2N + 1$ 约束下取得最小值的 $W$ 。使用拉格朗日乘法

$$L = W^H E^H EW + \mu(2N + 1 - W^H W) \quad (21)$$

对其求偏导

$$\frac{\partial L(W, \mu)}{\partial W} = 2E^H EW - 2\mu W \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (22)$$

可知

$$E^H EW = \mu W \quad (23)$$

由此可见, $\mu$ 是 $E^H E$ 的特征值, $W$ 为其对应的特征向量。

$$\|EW\|^2 = W^H E^H EW = W^H \mu W = \mu(2N + 1) \quad (24)$$

因此若要使  $\|EW\|^2$  取得最小值,  $\mu$  需为  $E^H E$  最小特征值, 对应的  $W$  为最小特征值对应的特征向量。证毕。

$E^H E$  最小特征值对应的特征向量也就是矩阵  $E$  的最小奇异值对应的右奇异向量, 由于在利用奇异值分解估计 DOA 时可以同时得到奇异向量, 因此在实际计算距离时不需要进行额外的矩阵相乘和特征值分解。设  $E^H E$  最小特征值对应的特征向量也就是  $E$  的最小奇异值对应的右奇异向量为  $u_k$ 。

$$\hat{\alpha}_k = \text{angle}(u_k) = [0, \{(-N+1)^2 - N^2\} \phi_k, \dots, \{(0)^2 - N^2\} \phi_k, \dots, \{(N)^2 - (N-1)^2\} \phi_k, \dots, \{(N)^2 - (0)^2\} \phi_k]^T \quad (25)$$

定义矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (-N+1)^2 - N^2 & \dots & (0)^2 - N^2 & \dots & (N)^2 - (N-1)^2 & \dots & (N)^2 - (0)^2 \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

需要计算使  $\left\| T \begin{bmatrix} \delta_k \\ \hat{\phi}_k \end{bmatrix} - \hat{\alpha}_k \right\|_F^2$  取得最小值的  $\begin{bmatrix} \delta_k \\ \hat{\phi}_k \end{bmatrix}$ , 其中  $\delta_k$  代表误差参数,  $\hat{\phi}_k$  代表距离的估计值。由于  $T$  是

一个列满秩矩阵, 因此存在左伪逆, 则  $\begin{bmatrix} \delta_k \\ \hat{\phi}_k \end{bmatrix}$  可以由式(27)求得。

$$\begin{bmatrix} \delta_k \\ \hat{\phi}_k \end{bmatrix} = T^\dagger \hat{\alpha}_k = (T^T T)^{-1} T^T \hat{\alpha}_k \quad (27)$$

与角度一一对应的距离可以计算为

$$\hat{r}_k = \frac{\pi d^2}{\lambda \hat{\phi}_k} \cos^2 \hat{\theta}_k \quad (28)$$

此方法的特点在于角度与距离都是在同一四阶累量矩阵中计算出来的, 在计算距离时不需要构造新的矩阵, 而且奇异值分解可以同时得到奇异向量, 因此在估计 DOA 过程中同时得到对应的用于计算距离的向量。文献[19]在计算角度过程中无法直接得到含有距离信息的向量, 需要将已估计的角度代入后对矩阵求逆并进行乘积操作。而文献[22]中方法在角度计算中需要另外构造一个四阶累量矩阵, 计算较为复杂, 而且距离误差较大。

本文提出的方法总结如下:

#### (1) 角度估计

- ① 分别构造四阶累量矩阵  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$ , 将其按式(8)的方式组成矩阵  $C$ ;
- ② 对  $C$  进行特征值分解, 得到噪声子空间  $U_n$ ;
- ③ 将等效导向矢量  $d$  按照式(14)进行分解, 计算出  $E$ ;
- ④ 对  $E$  进行奇异值分解, 利用式(19)搜索出近场角度。

#### (2) 距离估计

- ① 由于在估计角度时已经对  $E$  进行了奇异值分解, 所以可以直接找到正确角度所对应的矩阵  $E$  的右奇异向量;
- ② 构造矩阵式(26), 利用式(27,28)计算出距离。

## 4 仿真结果

将本文提出的 DOA 估计算法称为提出的方法; 将文献[19]中提出的方法称为降维多重信号分类 (Reduced-dimension MUSIC, RD-MUSIC); 将文献[22]中提出的方法称为两阶段多重信号分类 (Two-stage MUSIC, TS-MUSIC)。本文仿真了提出方法的成功估计概率以及均方根误差 (Root mean

square error, RMSE),并与其他相关方法进行对比。仿真中使用的信号均为二进制相移键控信号,所有方法在角度搜索过程中均采用 $0.1^\circ$ 的搜索间隔,蒙特卡洛实验次数均为500次,其中信噪比(Signal-to-noise ratio, SNR)定义为

$$\text{SNR} = 10\lg\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \quad (29)$$

式中 $\sigma^2$ 为每个传感器上的噪声功率。

#### 4.1 算法成功估计概率

当某次估计中,两个角度估计误差均小于 $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ 时,认为这次的估计是成功的,其中 $\theta_1$ 为第1个信号的真实角度, $\theta_2$ 为第2个信号的真实角度<sup>[26]</sup>。在本实验中只考虑了角度部分。在阵元总数 $2N + 1 = 9$ ,在2 000快拍的条件下仿真了成功估计概率与信噪比的关系,其中2个近场源的角度和距离分别为 $(20^\circ, 1.8\lambda)$ 和 $(22^\circ, 2\lambda)$ 。

3种方法成功估计概率随信噪比变化如图2所示。从图2可以看出,虽然3种方法均采用谱峰搜索的方式,但是性能依然有着较为明显的差距。在信噪比的变化过程中,提出的方法始终保持着最高的成功概率。这是因为RD-MUSIC方法在搜索DOA的过程中利用了矩阵的逆,噪声影响较大。而且空间谱数值随角度变化较为缓慢,得到的谱峰较为圆滑。在大多数情况下,当两个信号具有较近的角度间隔时,过于圆滑的谱峰自然难以分辨相似的DOA,多次会出现多个谱峰合并为一个的情况,影响了估计效果。TS-MUSIC算法的角度是在累量矩阵中通过传统MUSIC算法得到的,构造累量矩阵只用了对称阵元的接收信号,而且用于计算DOA的矩阵维度只有 $(2N + 1) \times (2N + 1)$ ,导致性能不够好。而提出的方法利用了接收信号全部信息,并且构造了 $(4N + 1) \times (4N + 1)$ 维矩阵 $C$ 计算DOA,信号数目相同时,相比于TS-MUSIC具有更多的噪声子空间,因此谱峰较为尖锐,在信号具有相似波达方向时具有明显优势。为了进一步说明提出方法的性能,图3给出了与图2相同仿真条件下角度的谱峰图,其中信噪比为8 dB,2 000快拍,近场角度为 $20^\circ$ 和 $22^\circ$ 。

值得注意的是,提出的方法搜索最大峰值,RD-MUSIC和TS-MUSIC方法搜索最小峰值,这是由不同方法本身决定的。由图3可知,同样是利用谱峰搜索来估计DOA,提出的方法能够区分出两个角度间隔较小的信号,并且在可视为成功估计的误差范围内准确地计算出DOA,RD-MUSIC和TS-MUSIC均存在相邻谱峰合并的问题,导致无法正确估计,体现了本文所提方法的准确性。

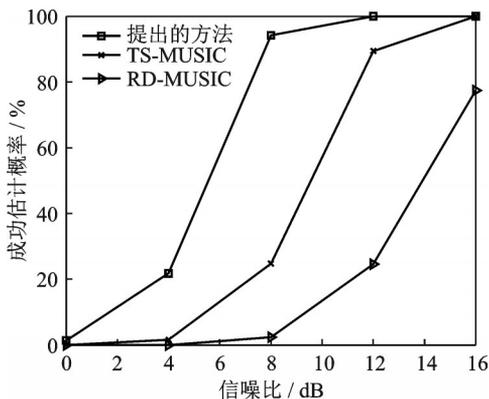


图2 成功估计概率随信噪比变化曲线

Fig.2 Curves of successful probability with SNR

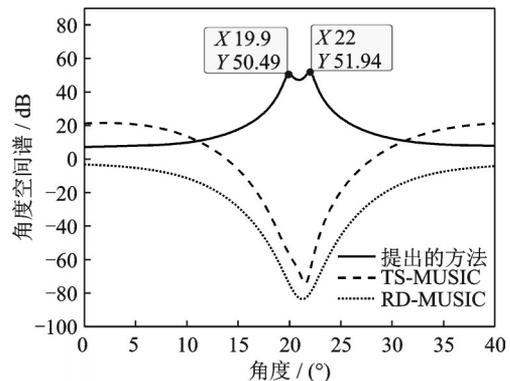


图3 不同方法空间谱

Fig.3 Angular spatial spectrum of different methods

## 4.2 算法的均方根误差

定义角度和距离的RMSE分别为

$$\text{RMSE}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{kl} - \theta_k)^2} \quad (30)$$

$$\text{RMSE}(r) = \sqrt{\frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (\hat{r}_{kl} - r_k)^2} \quad (31)$$

式中: $K$ 为信源数; $L$ 为蒙特卡洛实验次数; $\hat{\theta}_{kl}$ 为第 $l$ 次实验中第 $k$ 个信源的波达方向估计值; $\theta_k$ 为第 $k$ 个信源波达方向的真实值; $\hat{r}_{kl}$ 为第 $l$ 次实验中第 $k$ 个信源的距离估计值; $r_k$ 为第 $k$ 个信源距离的真实值。在对比距离中,将使用本文方法估计出的角度代入以下两种距离算法中并与其他方法对比,其中第4节中提出的方法称为算法1,文献[16-18]等文章中使用的传统MUSIC算法称为算法2。

首先对比9个阵元,2个入射信号情况下的误差,其中角度和距离分别为 $(0^\circ, 1.8\lambda)$ 和 $(20^\circ, 2\lambda)$ 。图4和5分别展示了在快拍数为2000、2个信号时,不同方法的均方根误差随信噪比变化的情况。从仿真图中可以看出,算法1的距离估计性能不如算法2,这是因为算法1仅在当前角度对应的信号子空间中通过直接计算得到距离。而算法2利用了信号子空间与全部噪声子空间的正交性,并通过谱峰搜索得出距离,因此准确度更高,但算法2需要进一步计算二阶协方差矩阵,并进行谱峰搜索,计算量较大。与其他方法对比中可以看出,当两个信号具有较大的角度,间隔 $20^\circ$ 且快拍数较大时,RD-MUSIC算法依然难以在信噪比较低时达到较好的准确性。随着信噪比的增加,角度和距离误差均有明显减小,信噪比达到超过2 dB时,虽然角度误差已小于提出的方法,但是距离依然与算法2接近,没有明显优势。由此可见,即使在信号数目较少的情况下,RD-MUSIC仍难以在信噪比较低时实现准确估计。TS-MUSIC算法的角度误差较大且没有随着信噪比增加出现明显下降。这是因为在计算角度时利用的四阶累量矩阵在构造的过程中只利用了对称阵元的接收信号,而且矩阵的维数较小。虽然有时会出现角度误差小于提出方法的情况,但是TS-MUSIC算法需要构造2个四阶累量矩阵,仅依靠任意一个累量矩阵都无法同时估计出角度和距离信息,具有较大的计算复杂度。在距离估计中与提出的方法有着较为明显的差距,这是因为其在距离估计时,使用的是简单的数值计算,利用计算比值和求平均的思想估计距离,难以得到较高的准确性,而且角度估计的准确性会严重影响距离估计结果,比如信噪比在-8 dB时,较大的角度误差会使其距离估计出现严重的错误。

将信号个数增加到4个,角度和距离分别为 $(0^\circ, 1.8\lambda), (20^\circ, 2\lambda), (30^\circ, 2.5\lambda), (50^\circ, 3\lambda)$ 。需要注意的是,当阵元个数为9、信源个数为4时,已经达到了RD-MUSIC的最大能分析信号个数。图6和7仿真

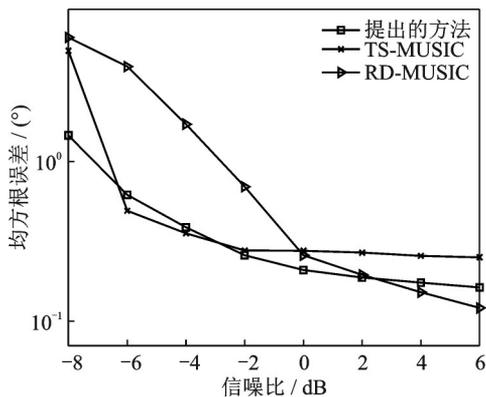


图4 2个信号时角度均方根误差随信噪比变化曲线

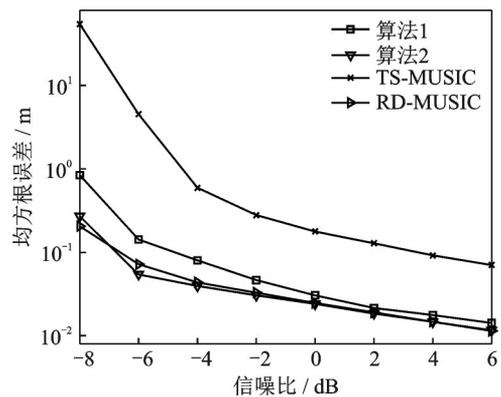


图5 2个信号时距离均方根误差随信噪比变化曲线

Fig.4 Curves of angle RMSE with SNR for two signals

Fig.5 Curves of distance RMSE with SNR for two signals

了快拍数为 2 000、4 个信号时,均方根误差随信噪比变化曲线。由结果可以看出,在信号增多到 4 个以后,提出方法的优势更加明显,在固定快拍数的条件下,随着信噪比的增加,无论是角度和距离,提出方法均保持最小的误差,即使在 2 000 快拍下,信噪比达到 25 dB 这种高信噪比时,RD-MUSIC 仍难以实现角度的准确估计,并且随着信噪比的增加,误差没有明显的下降趋势。在仿真过程中,设置的相邻角度间隔为  $10^\circ$  以及  $20^\circ$ ,RD-MUSIC 在信噪比为 5 dB 时,500 次蒙特卡洛仿真中存在一半的次数出现谱峰数目少于信源个数,导致无法计算 DOA。这说明即使理论上其方法的自由度能达到  $N$ ,但是当信源数目较多时,噪声子空间维数太小,噪声子空间不够准确导致利用正交性计算 DOA 时性能下降较为严重。由此可见,在信号个数较多时,无论是算法 1 还是算法 2,相比于其他文献的方法都具有最小的均方根误差,其中算法 1 虽然准确度稍低,但是估计距离时不需要谱峰搜索,计算量小。算法 2 拥有更高准确性却需构造协方差矩阵并多次搜索距离,因此可以综合考虑。在算法 2 中,由于角度是在四阶累量矩阵中计算的,后续计算距离时只需要将角度值代入协方差矩阵,因此协方差矩阵的维数不会限制所提方法的自由度,依然可以达到  $2N$  的自由度。而文献[19]中的方法角度和距离都是在协方差矩阵中获得的,角度和距离估计中均需对矩阵求逆,导致自由度只有  $N$ 。对于 TS-MUSIC 方法,由于其同样使用了四阶累量矩阵,增大了自由度,因此在信号数目较多时,角度估计性能相对较好,但是由于距离算法问题,虽然角度误差比 RD-MUSIC 小,但是距离误差仍然是最大的。

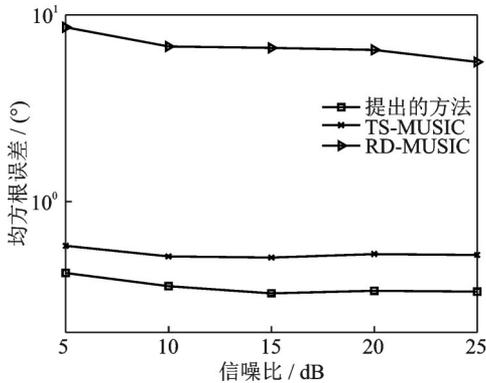


图 6 4 个信号时角度均方根误差随信噪比变化曲线

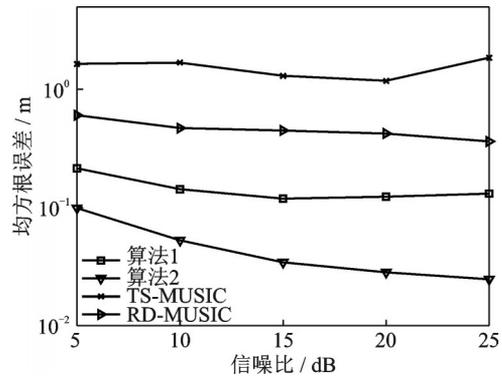


图 7 4 个信号时距离均方根误差随信噪比变化曲线

Fig.6 Curves of angle RMSE with SNR for four signals Fig.7 Curves of distance RMSE with SNR for four signals

### 4.3 算法的自由度

为了验证本文提出算法的自由度,图 8 仿真了当阵元个数  $L = 2N + 1 = 3$ ,即  $N = 1$  时的角度空间谱图,此时最大能估计信号个数应为 2。设置 2 个信源的角度和距离分别为  $(0^\circ, 2\lambda)$ ,  $(20^\circ, 2.5\lambda)$ ,信噪比 10 dB,快拍数 1 000。可以看出,在 3 个阵元时,提出的方法能够准确估计出 2 个信号的波达方向,体现了方法的正确性。

### 5 结束语

本文提出了一种新的近场信源角度和距离估计算法,构造一个四阶累量矩阵即可以实现角度和距离的估计。在角度估计中,提出了一种基于矩阵秩亏的搜索最小奇异值倒数最大值的方法,该方法可以在角度距离同时存在的导向向量中先通过一维搜索估计出 DOA,将二维搜索转化成一维搜索,在保证四阶累量估计性能的同

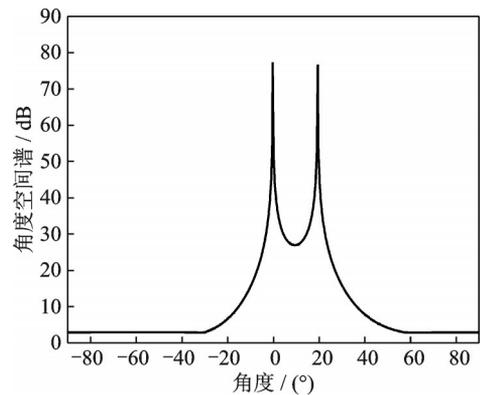


图 8 2 个信号的角度空间谱

Fig.8 Angular spatial spectrum for two signals

时降低了计算复杂度。同时提出了一种计算含有距离信息矢量的方法,并利用最小二乘法估计出与角度一一对应的距离,避免了参数配对过程。提出的方法自由度是文献[19]方法的2倍,并且增强了抗噪声性能,在9个阵元4个信号时,角度估计性能有了1~2个数量级的提高,距离误差也是最小的。与文献[22]相比,提出的方法在距离估计中即使使用算法1,准确度也会有1个数量级的提高,如果使用传统MUSIC方法,虽然增加了计算量,但仍只需构造一个高阶矩阵,并且距离估计的精度会有接近2个数量级的提升。仿真结果也验证了本文算法的可靠性和有效性。

#### 参考文献:

- [1] 陈未央,徐乐,张小飞. 基于快速平行因子分解的声矢量传感器二维DOA估计[J]. 南京航空航天大学学报, 2021, 53(1): 130-135.  
CHEN Weiyang, XU Le, ZHANG Xiaofei. Two-dimensional DOA estimation algorithm for acoustic vector-sensor array via fast PARAFAC decomposition method[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2021, 53(1): 130-135.
- [2] SHI Junpeng, HU Guoping, ZHANG Xiaofei, et al. Generalized co-prime MIMO radar for DOA estimation with enhanced degree of freedom[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2018, 18(3): 1203-1212.
- [3] CONG Jingyu, WANG Xianpeng, HUANG Mengxing, et al. Robust DOA estimation method for MIMO radar via deep neural networks[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2021, 21(6): 7498-7507.
- [4] WEI Zhenyu, WANG Wei, DONG Fuwang, et al. Gridless one-bit direction-of-arrival estimation via atomic norm denoising [J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(10): 2177-2181.
- [5] WU Fan, CAO Fei, ZHANG Xurong, et al. DOA estimation of the quasi-stationary signal using sparse reconstruction[J]. *IET Radar Sonar and Navigation*, 2022, 16(4): 603-757.
- [6] WANG Huafei, WAN Liangtian, DONG Mianxiang, et al. Assistant vehicle localization based on three collaborative base stations via SBL-based robust DOA estimation[J]. *IEEE Internet Things Journal*, 2019, 6(3): 5766-5777.
- [7] 林新平,张小飞,沈金清. 互质线阵中一种基于共轭增广的DOA估计算法[J]. 数据采集与处理, 2019, 34(6): 992-1001.  
LIN Xinping, ZHANG Xiaofei, SHEN Jinqing. DOA estimation algorithm based on conjugate augmentation for coprime linear array[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2019, 34(6): 992-1001.
- [8] JOHNNY M, AREF M R. A MSWF root-MUSIC based on pseudo-noise resampling technique[J]. *Electronics Letters*, 2021, 57(17): 675-678.
- [9] GAN Lu, LUO Xiaoyu. Direction of arrival estimation for uncorrelated and coherent signals in the presence of multipath propagation[J]. *IET Microwaves Antennas and Propagation*, 2013, 7(9): 746-753.
- [10] TIAN Ye, GAO Xinyu, LIU Wei, et al. Phase compensation-based localization of mixed far-field and near-field sources[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2021, 11(3): 598-601.
- [11] WANG Yinsheng, CUI Weijia, BA Bin, et al. Symmetric flipped nested array for mixed near-field and far-field non-circular source localization[J]. *IET Radar Sonar and Navigation*, 2022, 16(11): 1752-1760.
- [12] HUANG Y, BARKAT M. Near-field multiple source localization by passive sensor array[J]. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 1991, 39(7): 968-975.
- [13] WU Xiaohuan, YAN Jun. A second-order statistics-based mixed sources localization method with symmetric sparse arrays[J]. *IEEE Communication Letters*, 2020, 24(8): 1695-1699.
- [14] WU Xiaohuan, YAN Jun. Gridless mixed sources localization based on low-rank matrix reconstruction[J]. *IEEE Wireless Communication Letters*, 2020, 9(10): 1748-1752.
- [15] 靳一,徐常志,荆涛,等. 基于离格稀疏表示的近场信源定位方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(11): 3105-3110.  
JIN Yi, XU Changzhi, JING Tao, et al. Off-grid sparse representation based localization method for near-field sources[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(11): 3105-3110.
- [16] ZHI Wanjun, CHIA M. Near-field source localization via symmetric subarrays[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(6): 409-412.
- [17] LIU Guohong, SUN Xiaoying. Efficient method of passive localization for mixed far-field and near-field sources[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2013, 12: 902-905.
- [18] LIU Guohong, SUN Xiaoying. Spatial differencing method for mixed far-field and near-field sources localization[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(11): 1331-1335.
- [19] ZHANG Xiaofei, CHEN Weiyang, ZHENG Wang, et al. Localization of near-field sources: A reduced-dimension MUSIC

- algorithm[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(7): 1422-1425.
- [20] XIE Jian, TAO Haihong, RAO Xuan, et al. Comments on “near-field source localization via symmetric subarrays”[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(5): 643-644.
- [21] DOGAN M, MENDEL J. Applications of cumulants to array processing I : Aperture extension and array calibration[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(5): 1200-1216.
- [22] LIANG Junli, LIU Ding. Passive localization of mixed near-field and far-field sources using two-stage MUSIC algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(1): 108-120.
- [23] ZHENG Zhi, FU Mingcheng, WANG Wenqin, et al. Symmetric displaced coprime array configurations for mixed near- and far-field source localization[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(1): 465-477.
- [24] 秦宇楠,孙晓颖,刘国红. 基于协方差差分的近场源定位参量估计[J]. 电子学报, 2021, 49(1): 177-182.
- QIN Yudi, SUN Xiaoying, LIU Guohong. Passive localization for near-field sources based on covariance difference[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(1): 177-182.
- [25] 张贤达. 现代信号处理[M]. 2版. 北京:清华大学出版社, 2002: 263-285.
- ZHANG Xianda. Modern signal processing[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 263-285.
- [26] WANG Yunfei, SHEN Jinqing, ZHANG Xiaofei, et al. Non-circular signals for nested array: Sum-difference co-array and direction of arrival estimation algorithm[J]. IET Radar, Sonar and Navigation, 2020, 14(1): 27-35.

## 作者简介:



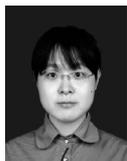
李宛儒(1998-),女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理、无线通信, E-mail: liwanru@stu.xjtu.edu.cn。



邓科(1978-),通信作者,男,副教授,博士生导师,研究方向:阵列信号处理、无线通信、矩阵分析, E-mail: denke@stu. xjtu. edu.cn。



殷勤业(1950-),男,教授,博士生导师,研究方向:信号处理、智能天线、无线传感器网络, E-mail: qyyin@mail.xjtu.edu.cn。



张雁(1979-),女,高级工程师,研究方向:信号处理、通信网络, E-mail: nowed@sohu.com。

(编辑:陈珺)