

基于压缩感知平行因子分解的电力系统谐波与间谐波频率估计方法

岳衡, 张小飞, 石莎

(南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 211106)

摘要: 电力系统中的电力电子设备所产生的谐波数量日益增加, 谐波问题是一个备受关注的话题。本文通过引入压缩感知理论和平行因子模型, 提出了一个用于谐波和间谐波的频率估计算法。先从信息发送终端中获取数据, 然后使用欧拉公式将正弦信息转化为空域信息构造多时延输出并建立为平行因子模型, 再对模型进行压缩后进行平行因子分析。最后将所得的数据经过贪婪算法重构, 再进行频率值的估计。与传统的平行因子计算比较, 该计算具有压缩过程, 计算工作量相对较小, 对数据存储容量需求也较少。所提计算的频谱估计性能与传统的平行因子分解算法 (Parallel factorization, PARAFAC) 非常接近, 而且也比采用旋转不变技术的信号参数估计算法 (Estimating signal parameter via rotational invariance techniques, ESPRIT) 更加精确。

关键词: 间谐波分析; 压缩感知; 频率; 平行因子分解

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A

A Harmonic and Inter-harmonic Frequency Estimation Method of Electric Power Systems via Compressed Sensing PARAFAC Method

YUE Heng, ZHANG Xiaofei, SHI Sha

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: Power quality has always attracted attention. The number of power electronic equipments in the power system and harmonics generated are increasing. The problem of harmonics has always been a topic of concern. This paper proposes a frequency estimation algorithm for power system harmonics and inter-harmonics by introducing the compressed sensing theory and the parallel factor model. First, this paper obtains the data at the signal receiving end, uses Euler's formula to convert the sine signal into a spatial signal, and constructs the multi-delay output into a parallel factor model. Second, we compress the three slices of the model, and use the trilinear alternating least squares algorithm parallel factorization (PARAFAC). Finally, the obtained data is sparsely reconstructed to obtain the frequency of the automatic pairing. Compared with the traditional parallel factor algorithm, this method has a compression process, a minor calculation, and lower storage capacity requirements. The frequency estimation performance of the proposed algorithm is very similar to that of the traditional PARAFAC method and better than that of the

基金项目: 国家自然科学基金(61971217, 61971218, 61631020); 江苏省自然科学基金(BK20200444); 国家重点研发计划(2020YFB1807602)。

收稿日期: 2022-02-25; **修订日期:** 2022-11-09

estimating signal parameter via rotational invariance techniques (ESPRIT) method.

Key words: inter-harmonics analysis; compressed sensing; frequency; parallel factorization

引 言

随着新能源和直流输电系统的快速发展,应用电力电子技术的设备越来越多地投入到电力系统中,这类设备接入电网后会带来频率多变的间谐波,给监测带来新的挑战^[1]。在谐波间谐波问题日益突出的背景下,对谐波间谐波的检测为谐波间谐波产生机理及抑制领域的科学研究提供了前提条件,具有重要意义。

传统的谐波分析方法基于傅里叶变换,将时域中的信号代入频域中进行分析,通过绘制信号频域的特性曲线对参数进行估计。但是常用于间谐波处理的离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)^[2],缺点在于此类方法完全依赖奈奎斯特采样定理并且需要同步采样,由于间谐波的存在,同步采样难以实现。DFT在非同步采样的情况下,严重的栅栏效应和频谱泄漏导致参数估计失效。文献[3]提出了一种基于全相位快速傅里叶变换(All phase fast Fourier transform, APFFT)的方法,利用时间移位得到相位差从而对电能信号进行分析处理,能够有效测量高次谐波和抑制频谱泄漏。文献[4]提出了一种基于加窗插值压缩感知的方法,克服了传统傅里叶变换非同步采样情况下无法检测间谐波的问题,利用窗函数和贪婪算法降低频谱泄漏的影响,降低了所需采样数据。其他的一些方法如文献[5]等提出的一种参数小波阈值方法,通过原始信号和重构信号间的均方误差来调节阈值,相比传统的小波变换阈值固定更为灵活。文献[6]将小波分析的数据加入到神经网络方法中,提出了一种善于处理和分析频率快慢变化的算法。上述方法中,加窗插值虽然可以克服频谱泄漏,但代价就是分辨率有所下降;小波变换虽然克服了DFT的缺点,但是存在混频现象,分辨率也不够高。因此需要找到一种可以提高分辨率,减小估计误差的频率估计方法。

现代谱估计理论中的方法由于分辨率高,估计误差小,被广泛应用在设备故障检查,波达方向估计等方面。文献[7]提出了一种基于卡尔曼滤波和自回归模型(Autoregressive model, AR)的间谐波估计方法,能够在低信噪比的情况下精确估计间谐波频率,文献[8]提出了一种基于鲁棒性独立分量分析(Robust independent component analysis, RobustICA)和Prony算法的间谐波检测方法,缓解了端点效应和模态混叠,具有良好的去噪效果和辨识能力。文献[9]将多信号分类算法(Multiple signal classification, MUSIC)引入分析光伏并网的间谐波,由于精度高、计算误差小,取得了良好效果。文献[10]将基于旋转不变技术的信号参数估计算法(Estimating signal parameter via rotational invariance techniques, ESPRIT)算法和滤波器组相结合,减少了ESPRIT算法的计算量并且抗噪性能也有所提升。上述方法中,AR模型在处理短数据时频率估计偏差较大。Prony算法在信号阶数不能确定的情况下,估计会出现较大偏差。MUSIC方法涉及到子空间划分和谱峰搜索,计算量庞大。ESPRIT方法不需要进行谱峰搜索,计算量比较小,但因为不能准确划分噪声子空间,往往需要结合滤波器使用。

为克服傅里叶变换类方法的缺点,进一步降低现代谱估计算法的计算复杂度,因此找到一种估计误差和计算量都小的算法具有实际意义。平行因子分解算法(Parallel factorization, PARAFAC)是一种基于张量分解的高分辨率估计算法,估计性能总体要好于MUSIC算法和ESPRIT算法,缺点是算法的迭代过程计算复杂度较大,本文重点解决平行因子分解的计算复杂度较高的问题。

压缩感知(Compressed sensing, CS)^[11]近年来受到了广泛关注,如果信号在某一个域是稀疏的,则重构信号的过程中不需要严格遵循奈奎斯特采样定理。电力系统谐波和间谐波的频率在频域上的分

布是稀疏的,非常适合用压缩感知理论进行分析。文献[12]提出了一种利用压缩感知重构信号对谐波间谐波进行估计的算法,计算量得到有效改善。文献[13]提出了一种基于平行因子分解的谐波间谐波分析方法,克服了同步采样和子空间划分的缺点,实现了频率的超分辨率估计。

本文在文献[13]的基础上,利用压缩感知的压缩过程减少算法计算量,提出了一种基于CS-PARAFAC的谐波和间谐波频率估计算法,仿真结果表明,所提算法的频率估计性能与传统的PARAFAC方法十分相近同时计算量明显下降,并且较ESPRIT算法更为精确。本文主要贡献可以概括为:(1)针对电力谐波频率估计问题,引入PARAFAC模型,根据电力信号的稀疏性特点,结合压缩感知的思想,提出了CS-PARAFAC算法;(2)由于PARAFAC算法大量数据进行迭代,大大增加了算法求解时的复杂度,本文通过CS方法,在保证估计精度的前提下,降低了算法复杂度。

1 信号模型

1.1 电力系统信号模型

接收端的电力系统信号^[14](电压或者电流)可以表示为

$$f(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \sin(\omega_m t + \varphi_m) + e(t) \quad (1)$$

式中: M 为谐波次数; α_m 为第 m 个波形的信号幅值; ω_m 为第 m 个波形的角频率; φ_m 为第 m 个波形的相位; $e(t)$ 为噪声。

利用欧拉公式($e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$)可以将其转化为

$$r(n) = \sum_{m=1}^M A_m e^{-j(\omega_m n + \varphi_m)} + w(n) \quad (2)$$

式中: A_m 为谐波信号幅值; ω_m 为归一化频率; φ_m 为归一化初始相位; w 为0均值的噪声。若不考虑噪声,可以简化为

$$s(n) = \sum_{m=1}^M \alpha_m e^{-j\omega_m n} \quad (3)$$

式中 $\alpha_m = A_m e^{-j\varphi_m}$ 。

1.2 平行因子模型

为了对信号的频率进行估计,构造多输出信号模型,对接收端信号(时延级数为 $P, P > 2$)进行构造^[13]。

$$\begin{cases} r_0(n) = s(n) + w_0(n) \\ r_1(n) = s(n - D_1) + w_1(n) \\ \vdots \\ r_{P-1}(n) = s(n - D_{P-1}) + w_{P-1}(n) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $D_p (p = 1, 2, \dots, P-1)$ 为时延; $w_p (p = 0, 1, \dots, P-1)$ 为噪声。

接下来构造平行因子切片的元素,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(k) = [r_0(k), r_0(k+1), \dots, r_0(k+Q-1)]^T \\ \mathbf{x}_1(k) = [r_1(k), r_1(k+1), \dots, r_1(k+Q-1)]^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{P-1}(k) = [r_{P-1}(k), r_{P-1}(k+1), \dots, r_{P-1}(k+Q-1)]^T \end{cases} \quad (5)$$

式中: $k \in [1, M]$; Q 表示得到的信号数量。如果不考虑噪声,式中的信号可以表示为

$$\begin{cases} x_0(k) = \mathbf{A}s(k) \\ x_1(k) = \mathbf{A}\mathbf{\Delta}(\omega, D_1)s(k) \\ \vdots \\ x_{P-1}(k) = \mathbf{A}\mathbf{\Delta}(\omega, D_{P-1})s(k) \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} & \cdots & e^{j\omega_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\omega_{1(Q-1)}} & e^{j\omega_2} & \cdots & e^{j\omega_{m(Q-1)}} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{Q \times M}$$

$$\mathbf{s}(k) = [\alpha_1 e^{j\omega_1 k}, \alpha_2 e^{j\omega_2 k}, \dots, \alpha_M e^{j\omega_m k}]^T \in \mathbf{C}^{M \times 1}$$

$$\mathbf{\Delta}(\omega, D) = \text{diag}(e^{-j\omega_1 D}, e^{-j\omega_2 D}, \dots, e^{-j\omega_m D}) \in \mathbf{C}^{M \times M}$$

式中: \mathbf{A} 为含有频率信息的方向矩阵; \mathbf{H} 为含有时延信息的时延矩阵; \mathbf{S} 为含有待估计信息的信源矩阵。 \mathbf{H} 和 \mathbf{S} 表达式为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j\omega_1 D_1} & e^{-j\omega_2 D_1} & \cdots & e^{-j\omega_m D_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega_{1(Q-1)} D_{P-1}} & e^{-j\omega_2 D_{P-1}} & \cdots & e^{-j\omega_{m(Q-1)} D_{P-1}} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{P \times M} \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}(k), \mathbf{s}(k+1), \dots, \mathbf{s}(k+L+1)] \in \mathbf{C}^{M \times L} \quad (8)$$

利用式(6)构造一组矩阵为

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_0 = [x_0(k), x_0(k+1), \dots, x_0(k+L-1)] \\ \mathbf{Z}_1 = [x_1(k), x_1(k+1), \dots, x_1(k+L-1)] \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{P-1} = [x_{P-1}(k), x_{P-1}(k+1), \dots, x_{P-1}(k+L-1)] \end{cases} \quad (9)$$

式中 L 为信号的采样数。

则式(9)等价于

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \text{Diag}_{p+1}(\mathbf{H}) \mathbf{S} \quad p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (10)$$

考虑噪声影响,观测模型变为

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_p = \mathbf{A} \text{Diag}_{p+1}(\mathbf{H}) \mathbf{S} + \mathbf{W}_p \quad p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (11)$$

式中 \mathbf{W}_p 是接收噪声,为 $Q \times L$ 矩阵。

通过重排式(11)可以得到三线性模型为

$$z_{q,p,l} = \sum_{m=1}^M a_{q,m} h_{p,m} s_{m,l} \quad (12)$$

$$q = 0, 1, \dots, Q; p = 1, 2, \dots, P; l = 1, 2, \dots, L$$

式中: $a_{q,m}$ 表示 \mathbf{A} 的 (q, m) 元素; $h_{p,m}, s_{m,l}$ 同理。

为了将观测模型进一步迭代,需要得到3个方向的信息,根据式(10)得到的时延方向的信息,由平行因子模型的对称性可得信源方向和估计频率方向的信息为

$$\widetilde{\mathbf{X}}_l = \mathbf{H} \text{Diag}_l(\mathbf{S}^T) \mathbf{A}^T \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_q = \mathbf{S}^T \text{Diag}_q(\mathbf{A}) \mathbf{H}^T \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (14)$$

2 谐波和间谐波频率估计

2.1 模型压缩

为了降低 PARAFAC 的复杂度,将接收数据的三维矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{Q \times P \times L}$ 压缩为一个较小的矩阵 $\mathbf{X}' \in \mathbb{C}^{Q' \times P' \times L'}$,其中 $Q' < Q, P' < P, L' < L$ 。将压缩矩阵定义为 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{Q \times Q'}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{P \times P'}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{L \times L'}$,上述压缩矩阵需满足有限等距性质(Restricted isometry property, RIP),可以通过 Tucker3 分解得到^[13]。

然后压缩后的三维矩阵可以表示为

$$\mathbf{Z}'_{p'} = \mathbf{A}' \text{Diag}_{p'+1}(\mathbf{H}') \mathbf{S}' \quad p' = 0, 1, \dots, P' - 1 \quad (15)$$

式中 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}^H \mathbf{A}, \mathbf{H}' = \mathbf{V}^H \mathbf{H}, \mathbf{S}' = \mathbf{S} \mathbf{W}$ 。同理根据式(13,14)可得到

$$\mathbf{X}'_l = \mathbf{H}' \text{Diag}_l(\mathbf{S}'^T) \mathbf{A}'^T \quad l = 1, 2, \dots, L' \quad (16)$$

$$\mathbf{Y}'_{q'} = \mathbf{S}'^T \text{Diag}_{q'}(\mathbf{A}') \mathbf{H}'^T \quad q' = 1, 2, \dots, Q' \quad (17)$$

2.2 模型分解

三线交替最小二乘算法(Trilinear alternating least square, TALS)^[13]是平行因子分解的常用方法根据

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' \text{Diag}_1(\mathbf{S}'^T) \\ \mathbf{H}' \text{Diag}_2(\mathbf{S}'^T) \\ \vdots \\ \mathbf{H}' \text{Diag}_L(\mathbf{S}'^T) \end{bmatrix} \mathbf{A}'^T \quad (18)$$

得到最小二乘拟合为

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{H}} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}' \text{Diag}_1(\mathbf{S}'^T) \\ \mathbf{H}' \text{Diag}_2(\mathbf{S}'^T) \\ \vdots \\ \mathbf{H}' \text{Diag}_L(\mathbf{S}'^T) \end{bmatrix}^+ \mathbf{A}'^T \right\|_F \quad (19)$$

由式(19)得到 \mathbf{A}' 的最小二乘更新为

$$\hat{\mathbf{A}}'^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}' \text{Diag}_1(\hat{\mathbf{S}}'^T) \\ \hat{\mathbf{H}}' \text{Diag}_2(\hat{\mathbf{S}}'^T) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{H}}' \text{Diag}_L(\hat{\mathbf{S}}'^T) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_L \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中 $\hat{\mathbf{S}}'$ 和 $\hat{\mathbf{H}}'$ 分别表示上一次迭代中所得到的 \mathbf{S}' 和 \mathbf{H}' 的估计。

由

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}'^T \text{Diag}_1(\mathbf{A}') \\ \mathbf{S}'^T \text{Diag}_2(\mathbf{A}') \\ \vdots \\ \mathbf{S}'^T \text{Diag}_Q(\mathbf{A}') \end{bmatrix} \mathbf{H}^T \quad (21)$$

得到最小二乘拟合为

$$\min_{A,S,H} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S'^T \text{Diag}_1(A') \\ S'^T \text{Diag}_2(A') \\ \vdots \\ S'^T \text{Diag}_Q(A') \end{bmatrix}^+ H^T \right\|_F \quad (22)$$

由式(22)得到 H' 的最小二乘更新为

$$\hat{H}'^T = \begin{bmatrix} \hat{S}'^T \text{Diag}_1(\hat{A}) \\ \hat{S}'^T \text{Diag}_2(\hat{A}) \\ \vdots \\ \hat{S}'^T \text{Diag}_Q(\hat{A}) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_Q \end{bmatrix} \quad (23)$$

由

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \text{Diag}_1(H'^T) \\ A' \text{Diag}_2(H'^T) \\ \vdots \\ A' \text{Diag}_P(H'^T) \end{bmatrix} S' \quad (24)$$

得到最小二乘拟合为

$$\min_{A,S,H} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_{P-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A' \text{Diag}_1(H'^T) \\ A' \text{Diag}_2(H'^T) \\ \vdots \\ A' \text{Diag}_P(H'^T) \end{bmatrix}^+ S' \right\|_F \quad (25)$$

由式(25)得到 S' 的最小二乘更新为

$$\hat{S}' = \begin{bmatrix} \hat{A}' \text{Diag}_1(\hat{H}'^T) \\ \hat{A}' \text{Diag}_2(\hat{H}'^T) \\ \vdots \\ \hat{A}' \text{Diag}_P(\hat{H}'^T) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_{P-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.3 频率估计

定义矩阵 A' 的第 m 列为 $a'(\omega_m)$, 则有 $a'(\omega_m) = U^T a(\omega_m) \alpha_{a(\omega_m)}$, 其中 $a(\omega_m)$ 为矩阵 A 的第 m 列, $\alpha_{a(\omega_m)}$ 为尺度因子; 定义 $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_R$ 作为所有频率的采样网格且 $R \gg M$, 用于构造于频率估计的完备字典 $\Omega = [a(\tilde{\omega}_1), a(\tilde{\omega}_2), \dots, a(\tilde{\omega}_R)]$, 如果 $\tilde{\omega}_r = \omega_m$, 将上式改写为 $a'(\omega_m) = U^T \Omega e_p \alpha_{a(\omega_m)}$, 其中 e_p 为 $P \times 1$ 的稀疏矩阵。利用 L_0 范数约束可以得到 ω_m 的估计为

$$\hat{\omega}_m = \min \left\| a'(\omega_m) - U^H a(\tilde{\omega}_r) (U^H a(\tilde{\omega}_r))^+ a'(\omega_m) \right\|_F^2 \quad r = 1, 2, \dots, R; m = 1, 2, \dots, M \quad (27)$$

上述已给出 CS-PARAFAC 算法估计间谐波频率的流程, 算法主要步骤如下:

- (1) 将信号模型根据式(10)得到 PARAFAC 模型;
- (2) 将压缩矩阵定义为 $U \in \mathbb{C}^{Q \times Q}$, $V \in \mathbb{C}^{P \times P}$, $W \in \mathbb{C}^{L \times L}$, 把接收数据的三维矩阵 $X \in \mathbb{C}^{Q \times P \times L}$ 压缩

为一个较小的矩阵 $X' \in \mathbb{C}^{Q' \times P' \times L'}$, 其中 $Q' < Q, P' < P, L' < L$ 。

(3) 将压缩过的 PARAFAC 模型 (15~17) 按照式 (19, 22, 25) 得到最小二乘拟合, 根据式 (20, 23, 26) 得到每个切片的最小二乘更新;

(4) 构造完备字典 $\Omega = [a(\tilde{\omega}_1), a(\tilde{\omega}_2), \dots, a(\tilde{\omega}_R)]$, 构建出频率的重构问题;

(5) 利用正交匹配追踪算法得到频率的估计值。

3 性能分析

3.1 可辨识度分析

上述已经给出了 PARAFAC 模型 TALS 算法分解过程, 根据文献 [14] 的证明过程, 下面给出算法的可辨识度。

定理 $\tilde{Y}_q = S^T \text{Diag}_q(A) H^T, q = 1, 2, \dots, Q$, 其中 $A \in \mathbb{C}^{Q \times M}, S \in \mathbb{C}^{M \times L}, H \in \mathbb{C}^{P \times M}$, A 是具有范德蒙特特性的矩阵, 如果

$$k_{s^T} + \min(Q + k_H, 2M) \geq 2M + 2 \quad (28)$$

则 A, H, S 可辨识, 算法生效。由 PARAFAC 分解得到的 $\bar{A}, \bar{H}, \bar{S}$ 分别满足

$$\bar{A} = A\Pi, \bar{H} = H\Pi, \bar{S} = S^T \Pi \quad (29)$$

式中 Π 为排列矩阵。

文中采用的是独立信源信号 $k_{s^T} = \min(M, L)$, 独立延时信号 $k_H = \min(P, M)$, 并将上式改写为

$$\min(M, L) + \min(Q + \min(P, M), 2M) \geq 2M + 2 \quad (30)$$

当 $L \geq M, P \geq M, M \geq 2$ 满足辨识度, 此时 $M \leq \min(L, P)$ 。显然上述参数满足 $L \geq M, P \geq M$, 并且可辨识的谐波数为 $\min(L, P)$ 。

3.2 算法计算复杂度分析与克拉美罗界 (CRAMER-RAO bound, CRB)

3.2.1 计算复杂度分析

对于所提出的基于 CS-PARAFAC 的频率估计算法, 压缩过程中的复杂度为 $O[Q'P'Q(P+1)L + LQ'P'L']$, 一次迭代过程的复杂度为 $O[Q'L'P'M + 3M^3 + M^2(Q'L' + Q'P' + L'P' + L' + Q' + P')]$, 该算法的稀疏恢复需要大约为 $O[M(Q+P+1)R]^{[15]}$, 所提算法的总复杂度即上述 3 个过程之和。而对于传统的平行因子算法, 一次迭代过程复杂度为 $O[PQLM + 3M^3 + M^2(QL + QP + LP + P + Q + L)]^{[16]}$ 。

为了直观地比较两种算法的计算复杂度, 将上述模型代入对比, 图 1 给出了传统 PARAFAC 算法和所提算法在不同的采样数 L 下的计算复杂度对比, 考虑 $Q = 12, P = 4, M = 3, Q'/Q = P'/P = L'/L = 0.5, R = 100$, 迭代次数为 30, 从图 1 中可以得出结论, 所提算法相较于传统的 PARAFAC 算法计算量更低。

3.2.2 克拉美罗界

定义

$$B = H \odot A \quad (31)$$

式中 \odot 表示 Khatri-Rao 乘积。

对于谐波信号的频率估计, 其 CRB^[17-20] 为

$$\text{CRB} = \frac{\sigma^2}{2L} \{ \text{Re} [D^H \Pi_B^\perp D \oplus F^T] \}^{-1} \quad (32)$$

式中: $D = [\frac{\partial b_1}{\partial \omega_1}, \dots, \frac{\partial b_M}{\partial \omega_M}]$, b_M 为矩阵 B 的第 M 列, $F = I_{3 \times 3} \otimes P_s$, 其中 $\hat{P}_s = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L s(k) s^H(k)$, $I_{3 \times 3}$ 为 3×3 元素全为 1 的矩阵; $\Pi_B^\perp = I - B(B^H B)$; \oplus 表示 Hadamard 乘积。

本文算法的优点主要体现在:(1)适用于电力系统中的谐波和间谐波信号,实际使用中易于实现;(2)算法计算量较小,同时对数据存储的容量要求较低;(3)借助于 PARAFAC 模型,能够得到配对的频率估计,无需再进行额外配对。

4 仿真结果

假设传感器接收到的含谐波信号为

$$x(t) = 0.2 \cos(2\pi \cdot 45t) + \cos(2\pi \cdot 50t) + 0.2 \cos(2\pi \cdot 75t) + e(t) \quad (33)$$

式中: L 为信号采样数; P 为时延级数; Q 为传感器个数。仿真中,定义求根均方误差(Root mean square error, RMSE)用于衡量算法的频率估计性能^[21-23]。

$$\text{RMSE}_{\text{frequency}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\hat{\omega}_{m,i} - \omega_m)^2} \quad (34)$$

式中: $\hat{\omega}_{m,i}$ 为第 i 次蒙特卡洛仿真中 ω_m 的估计值; T 为总的仿真次数,下面仿真中取 $T=100$ 。

仿真 1 探究本文 CS-PARAFAC 算法的频率估计性能。定义算法中的 PARAFAC 模型的大小为 $Q \times P \times L$, 仿真中设置传感器数量 $Q=12$, 时延级数 $P=4$, 采样数 $L=100$, 信噪比为 20 dB, 对本文的算法进行 30 次蒙特卡洛仿真。从图 2 中可以看出该算法在信噪比较低的情况下,依然可以有效估计频率参数。

仿真 2 探究本文 CS-PARAFAC 算法、文献[13]中传统 PARAFAC 算法、文献[10]中 ESPRIT 算法的估计性能,通过绘制 RMSE 曲线进行比较。仿真过程中,仿真中设置传感器数量 $Q=12$, 时延级数 $P=4$, 采样数 $L=100$, 信噪比从 5 dB 均匀增加至 30 dB。如图 3 所示,本文提出的 CS-PARAFAC 算法估计误差明显小于 ESPRIT 算法;在 5 dB 时性能略微优于 PARAFAC 算法,随着信噪比的增大,

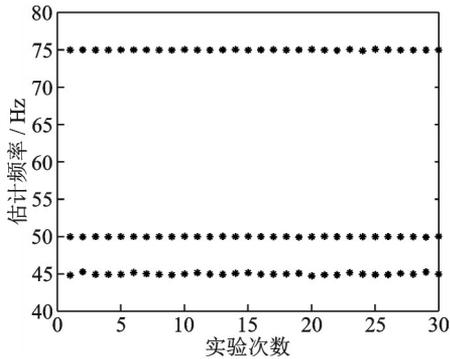


图 2 频率估计性能仿真

Fig.2 Frequency estimation performance of our algorithm

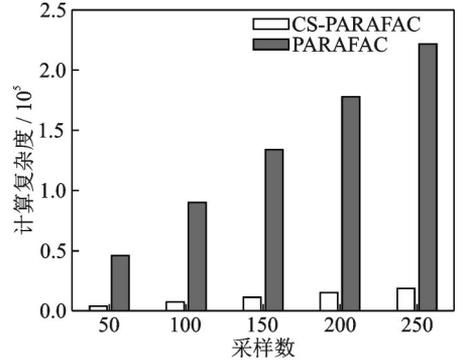


图 1 不同采样数下的计算复杂度对比

Fig1 Complicity comparison versus different samples

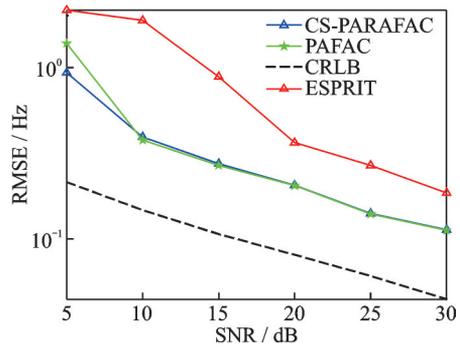


图 3 频率估计算法性能比较

Fig.3 Comparison of frequency estimation performance

CS-PARAFAC算法和传统PARAFAC算法的估计误差几乎没有区别。

仿真3 探究本文的CS-PARAFAC算法在不同采样数 L 下的频率估计性能。仿真过程中,设置传感器数量 $Q=12$,时延级数 $P=4$,采样数 $L=50,100,150,200$ 。从图4中可以看出,在信噪比相同的情况下,所提算法的估计性能随着采样数的增加而增加。

仿真4 探究本文的CS-PARAFAC算法在不同传感器数量 Q 下的频率估计性能。仿真过程中,设置传感器数量 $Q=8,12,16,20$,时延级数 $P=4$,采样数 $L=200$ 。从图5中可以看出,在信噪比相同的情况下,所提算法的估计性能随着传感器数量的增加而变好。

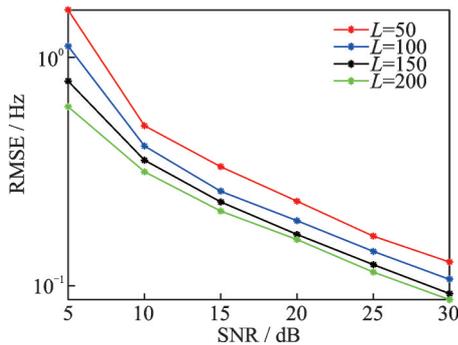


图4 不同采样数下频率估计算法性能比较

Fig.4 Comparison of frequency estimation performance under different samples

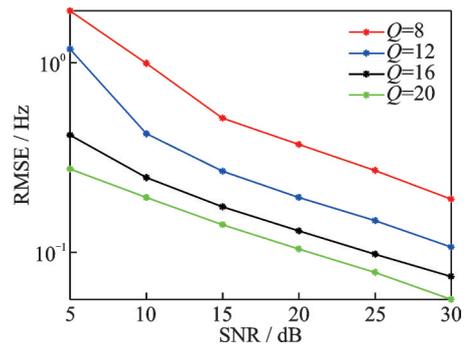


图5 不同数量传感器下频率估计算法性能比较

Fig.5 Comparison of frequency estimation performance under different sensor numbers

仿真5 探究本文的CS-PARAFAC算法对随时间变化的频率估计性能测试,所测试信号如下

$$x(t) = 0.2\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + 0.2\cos(2\pi f_3 t) + e(t) \quad (35)$$

$$\begin{cases} f_1 = 45 - 0.1t \\ f_2 = 50 + 0.01t \\ f_3 = 75 + 0.1t \end{cases} \quad (36)$$

仿真过程中,设置传感器数量 $Q=12$,时延级数 $P=4$,采样数 $L=100$,信噪比为20 dB,进行50次蒙特卡洛仿真。从图6中可以看出,所提算法在频率随时间变化的情况下,依然可以有效估计频率参数。

5 结束语

间谐波估计问题常用的DFT方法常伴随着频谱泄漏和非同步采样误差较大的缺点,导致分辨率不高。因为现代谱估计算法分辨率高,估计误差小的特点,本文将现代谱估计的算法引入电力系统谐波间谐波信号参数估计问题中。选择平行因子分解算法,既不需要如同MUSIC算法进行谱峰搜索增加计算量,也不需要如同ESPRIT算法子空间划分不够精细导致抗噪性能差。为了进一步减少算法计算量,本文将CS理论和PARAFAC模型相结合,提出了一种有效的谐波和间谐波频率估计算法,适用于电力系统中的谐波和间谐波信号,实际使用中易于实现,借助

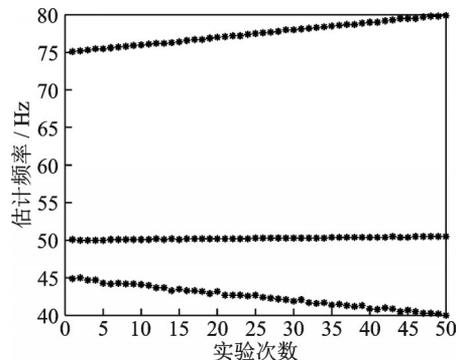


图6 随时间变化频率的估计性能

Fig6 Performance of tracking with dynamic frequency

于PARAFAC模型,能够得到配对的频率估计,无需再进行额外配对,并通过压缩过程进一步减少了运算量。仿真结果也表明,本文算法在计算量减少的同时,频率估计性能也优于ESPRIT算法,并和传统PARAFAC算法的性能几乎一致。

参考文献:

- [1] LIU J, SONG H, SUN H, et al. High-precision identification of power quality disturbances under strong noise environment based on FastICA and random forest[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 17(1): 377-387.
- [2] 王雪琼,郭静波. 动态压缩感知理论研究综述[J]. 电子测量与仪器学报, 2020, 34(10): 1-16.
WANG Xueqiong, GUO Jingbo. Review of theoretical research on dynamic compressive sensing[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2020, 34(10): 1-16.
- [3] DENG H, GAO Y, CHEN X, et al. Harmonic analysis of power grid based on FFT algorithm[C]//Proceedings of 2020 IEEE International Conference on Smart Cloud (SmartCloud). [S.l.]: IEEE, 2020.
- [4] 杜太行,梁倩伟,孙曙光,等. 基于加窗插值压缩感知的谐波/间谐波检测方法[EB/OL]. (2021-10-21). <https://kns.cnki.net/kems/detail/23.1202.TH.20211021.1543.005.html>.
DU Taihang, LIANG Qianwei, SUN Shuguang, et al. Harmonic/interharmonic detection method based on compressed sensing with windowed interpolation[EB/OL]. (2021-10-21). <https://kns.cnki.net/kems/detail/23.1202.TH.20211021.1543.005.html>.
- [5] ZHANG M, WANG Y, CHENG C, et al. Research on harmonic detection method based on wavelet neural network with a New Structure[C]//Proceedings of 2021 the 3rd Asia Energy and Electrical Engineering Symposium (AEEES). [S.l.]: IEEE, 2021.
- [6] REZVANI H, KHODADADI H. Designing evolutionary wavelet neural network for estimating foaming slag quality in electric arc furnace using power quality indices[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2022(4): 8.
- [7] MAZZOLETTI M A, DONOLO P D, PEZZANI C M, et al. Stator faults detection on induction motors using harmonic sequence current components analysis [J]. IEEE Latin America Transactions, 2021, 19(5): 726-734.
- [8] RUAN M, CHENG Y, ZHANG T, et al, Improved prony method for high-frequency-resolution harmonic and interharmonic analysis[C]//Proceedings of 2019 IEEE International Conference on Electronics Technology (ICET). [S.l.]: IEEE, 2019: 585-589.
- [9] NOSHAHR J B, KALESAR B M. Harmonic spectrum estimation and analysis of the voltage at the PCC of the distribution network connected to solar plant based on parametric algorithm (Music) [C]//Proceedings of 2017 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe). [S.l.]: IEEE, 2017: 1-6.
- [10] SANTOS E, KHOSRAVY M, LIMA M A, et al. ESPRIT associated with filter bank for power-line harmonics, sub-harmonics and inter-harmonics parameters estimation[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020, 118: 105731.
- [11] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [12] XINGANG Y, AIQIANG P, GUANGZHENG Y, et al. Supraharmonics measurement algorithm based on CS-SAMP[C]//Proceedings of 2019 IEEE Innovative Smart Grid Technologies-Asia (ISGT Asia). [S.l.]: IEEE, 2019: 160-164.
- [13] 冯宝,樊强,易浩勇,等. 基于三线性分解的电力系统谐波与间谐波参数估计算法[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(25): 173-179.
FENG Bao, FAN Qiang, YI Haoyong, et al. A harmonic and inter-harmonic parameter estimation algorithm of electric power systems based on tri-linear decomposition[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(25): 173-179.
- [14] ZHONG F, LIU Y. Research on power harmonic reconstruction using compressed sensing[C]//Proceedings of the 39th Chinese Control Conference (CCC). [S.l.]: IEEE, 2020.

- [15] KRUSKAL J B. Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1977, 18(2): 95-138.
- [16] LI S, SUN Z, ZHANG X, et al. Joint DOA and frequency estimation for linear array with compressed sensing PARAFAC framework[J]. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 2017, 26(9): 1750136.
- [17] LUO Q, ZHONG Q, WANG G, et al. An order-reduction method of interharmonic analysis model based on the principle of interharmonic interaction[J]. *CPSS Transactions on Power Electronics and Applications*, 2021, 3: 209-217.
- [18] STOICA P, NEHORAI A. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 1990, 38(10): 1783-1795.
- [19] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum LIKELIHOOD, and Cramer-Rao bound[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(5): 720-741.
- [20] ZHE Fu, CHARGÉ P, WANG Yide. Multi-rate coprime sampling for frequency estimation with increased degrees of freedom [J]. *Signal Processing*, 2020, 166: 107258.
- [21] WU X, ZHU W P, YAN J. An efficient gridless 2-D DOA estimation method for sparse and uniform L-shaped arrays[C]// *Proceedings of 2019 IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*. [S. l.]: IEEE, 2019: 1-5.
- [22] XU L, WU R, ZHANG X, et al. Joint two-dimensional DOA and frequency estimation for L-shaped array via compressed sensing PARAFAC method[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 37204-37213.
- [23] MURZAGULOV D A, ZAMYATIN A V, ROMANOVICH O V. Approach to the detection of anomalies in process signals by using the hilbert-huang transform[J]. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2021, 57(1): 27-36.

作者简介:

岳衡(1997-),男,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理, E-mail: yhssz44@nuaa.edu.cn。



张小飞(1977-),通信作者,男,教授,研究方向:阵列信号处理和通信信号处理。



石莎(1998-),女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理。

(编辑:陈珺)