

# 基于云模型与 PROMETHEE 方法的语言型 Z-number 多属性决策

李燕飞, 郭海艳, 吴涛, 毛军军

(安徽大学数学科学学院, 合肥 230601)

**摘要:** 针对属性权重未知, 属性值为语言型 Z-number 的多属性决策问题, 提出了一种基于云模型与丰富度评估的偏好排序组织方法 (Preference ranking organization method for enrichment evaluation, PROMETHEE) 的决策方法。首先, 引入语言尺度函数, 然后利用其建立转化模型完成语言型 Z-number 向云模型的转化。此外, 通过定义云可能度函数, 建立属性权重求解公式及构建正弦偏好函数, 进而计算方案的优先指数, 通过计算方案的正负方向优序级别值得到备选方案综合优序级别值, 进而得到方案排序。最后通过算例及比较分析验证本方法的有效性和可行性。

**关键词:** 云模型; 语言型 Z-number; PROMETHEE; 多属性决策

**中图分类号:** TP18      **文献标志码:** A

## Linguistic Z-numbers Multi-attribute Decision-Making Method Based on Normal Cloud Model and PROMETHEE Method

LI Yanfei, GUO Haiyan, WU Tao, MAO Junjun

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** To solve the multi-attribute decision-making (MADM) problem in which the weights of the attributes are unknown under linguistic Z-numbers environment, a novel decision-making method based on normal cloud model and preference ranking organization method for enrichment evaluation (PROMETHEE) method is proposed. Firstly, the conversion model based on linguistic scale function is proposed to convert linguistic Z-numbers to normal cloud models. Then, this paper defines a new cloud likelihood function, and utilizes the proposed function to establish a weight formula to measure the importance of each attribute in MADM. Moreover, a sine preference function is designed to acquire the preference values of alternatives, and the positive, negative and net flow on the basis of aggregated preference values can be calculated, and the corresponding ranking result of each alternative is acquired. Finally, the validity and feasibility of the proposed method can be illustrated by the problem of air pollution potential evaluation and comparative analysis with other existing three methods.

**Key words:** cloud model; linguistic Z-number; PROMETHEE; multi-attribute group decision-making

## 引言

多属性决策问题就是从若干个属性考虑,综合评价多个备选方案,从而取得使决策者满意的方案排序的过程。2011年,Zadeh<sup>[1]</sup>提出了Z-number理论,Z-number不仅对评价对象作出了评价,还给出了评价结果的可靠性,因而在很多领域得到了广泛应用。后来很多学者对Z-number进行了大量研究,文献[2-3]讨论了离散型Z-number和连续型Z-number的运算问题,包括加减乘法除、开平方根以及其他的一些运算操作,文献[4]提出了一种Z-number向经典模糊集的转化模型。通过这种操作,可以将模糊集环境下的决策方法应用到Z-number环境中去;1995年,李德毅等<sup>[5]</sup>首次提出了云模型这个概念,讨论了云模型的技术实现以及具体的应用场合,文献[6]论证了正态云模型的普适性,以及为什么云模型能够快速完成定性概念与数值之间的转换;文献[7]将多专家在多准则下给出的自然语言评价信息转化为用云模型表示的评价信息,再以云模型的相对距离的大小为准绳,对备选方案进行优先级别的排序,最终选出了最优方案。

比利时学者Brans等<sup>[8]</sup>提出了丰富度评估的偏好排序组织方法(Preference ranking organization method for enrichment evaluation, PROMETHEE)的决策方法,在该决策方法中,每一个属性对应的偏好函数可以根据决策者自己的偏好来进行选择或者由决策者自己定义。然后依据偏好函数和属性权重定义方案之间的优先指数,下一步计算每一个方案的正方向和负方向的优先级别数值,最后计算出每一种方案的综合优先级别值,得到方案的最终排序。语言变量中的不确定性主要来自其模糊性与随机性,而目前对于Z-number的研究大多都只考虑到其模糊性未考虑其随机性,将云模型与Z-number结合可以很好地解决这个问题。与应用最多的TOPSIS决策方法比较,PROMETHEE更加看重被评估对象各属性间的差异,因此本文将云模型与PROMETHEE决策方法结合,应用到语言型Z-number环境下的决策问题中。

针对评价信息为语言型Z-number,且各属性的权重完全未知的多属性决策问题,本文介绍了一种基于云模型与PROMETHEE方法思想的决策方法。处理这种问题面临两个难点:(1)如何将语言型Z-number向云模型的转化;(2)如何利用云模型评价信息矩阵进行PROMETHEE决策。为解决这些问题,首先,引入语言尺度函数,然后利用其建立转化模型完成语言型Z-number向云模型的转化,然后,通过定义云可能度函数,建立属性权重求解公式及构建正弦偏好函数,进而计算方案的优先指数,最终完成PROMETHEE决策方法的决策过程。

## 1 相关概念

本节介绍了与研究相关的基本概念,包括语言术语集、语言尺度函数、Z-number和云模型的概念。

**定义1** 语言术语集<sup>[9]</sup>

$S = \{s_i | i = 0, 1, 2, \dots, 2t, t \in N\}$ 为一个有序的,基数为奇数的离散的语言集合, $s_i$ 代表语言变量的可能取值,如果 $s_l, s_j \in S$ 满足下面的性质,那么集合S就是一个语言术语集<sup>[10]</sup>。

(1)  $s_l > s_j$ ,当且仅当 $l > j$ ;(2)满足负运算, $\text{neg}(s_l) = s_j, l + j = 2t$ 。

**定义2** 语言尺度函数<sup>[9]</sup>

假设S是一个语言术语集,且 $s_i \in S$ ,另有数值 $\theta_i \in [0, 1]$ ,语言尺度函数H为从语言术语集元素 $s_i$ 到数值区间 $[0, 1]$ 的映射

$$H: s_i \rightarrow \theta_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2t$$

这里 $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{2t} \leq 1$ 。 $\theta_i$ 取值的大小反映了决策者对于语言术语 $s_i$ 这个评价信息的偏好,因此,语言尺度函数是对语言术语 $s_i$ 语义的一种定量转换。随着集合S中元素下标 $i$ 的严格递增,H

也严格增。这里给出了两种类型的语言尺度函数<sup>[11]</sup>,即

$$H_1(s_i) = \theta_i = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{i}{2t} \pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad i = 0, 1, \dots, 2t \quad (1)$$

$$H_2(s_i) = \theta_i = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{i}{t} - 1\right) + \frac{1}{2} \quad i = 0, 1, \dots, 2t \quad (2)$$

在所给的语言术语集从中间往两边延伸的过程中,  $H_1(s_i)$ 的绝对偏差递减,  $H_2(s_i)$ 的绝对偏差递增。

### 定义3 Z-number<sup>[1]</sup>

$X$ 是一个实值不确定变量,  $Z$ -number是一个有序的模糊数对, 记作  $Z = (A, B)$ , 第1个模糊数  $A$ 是实值不确定变量  $X$ 取值的模糊限制, 第2个模糊数  $B$ 是对  $A$ 的可靠性的模糊限制。一般来说, 可以用自然语言描述  $A$ 和  $B$ 。例如, (一般, 确定)和(好, 非常确定)就可以看做是2个语言型的  $Z$ -number。

### 定义4 云模型<sup>[5]</sup>

设  $U$ 为一个定量的论域, 因此它具有精确数值,  $C$ 表示论域  $U$ 上的一个定性概念, 如果  $x$ 是论域  $U$ 上的数值, 且它正好是  $C$ 的一次随机实现, 并且有  $x$ 的分布函数满足  $x \sim N(E_x, E_n'^2)$ ,  $x$ 隶属于  $C$ 的确定程度是一个隶属分布, 满足

$$y = e^{-\frac{(x-E_x)^2}{2(E_n')^2}}$$

这样  $x$ 在  $U$ 上的分布叫做正态云分布, 一颗云滴可以记作  $(x, y)$ 。云模型的主要性质可以通过云模型的期望  $E_x$ , 熵  $E_n$ , 超熵  $H_e$ 这3个数字特征反映, 因此一个云模型被记作  $C = (E_x, E_n, H_e)$ 。其中, 期望  $E_x$ 是定性概念  $C$ 在定量论域  $U$ 上的期望, 反映了定性概念  $C$ 的核心点; 熵  $E_n$ 体现了定性概念下随机实现的不确定程度, 同时决定了云滴的离散程度; 超熵  $H_e$ 是熵的不确定性测度, 也决定了云层的厚度。

## 2 Z-number向正态云模型的转化

本节提出了将语言型  $Z$ -number转化为正态云模型的方法。首先, 将描述  $Z$ -number的模糊限制和可靠性度量的语言术语集转化为正态云模型, 然后将2个正态云模型进行融合形成新的正态云模型。

### 2.1 语言变量向正态云模型的转化

在实际决策问题中, 想要对定性概念进行比较就要将其转化为对应的定量数值形式, 云模型使用3种数值特征来表达语言术语中的概念, 使定性概念与定量值之间的客观转换更加直接。文献[12]提出了基于黄金分割率的方法, 产生5个云模型来定义语言尺度, 但是这种方法有局限性, 只适用于5个标签的语言术语集。文献[13]根据正态分布的  $3\sigma$ 原则确定定性概念的熵与超熵, 应用这种方法会发现语言术语越靠近中间熵值越小, 这显然与人们对语言的模糊性理解有出入。因此, 本文发展了一种新的转化方法, 克服了以上几种方法的缺陷, 方法描述如下:

设  $S = \{s_i | i = 0, 1, 2, \dots, 2t, t \in N\}$ 是一个有序的, 奇基数的离散的语言集合, 对应的取值区间为  $U = [X_{\min}, X_{\max}]$ ,  $s_i$ 是语言术语集  $S$ 中的一个标签, 语言尺度函数  $H(s_i)$ 是从  $s_i$ 到  $\theta_i$ 的映射, 描述语言术语  $s_i$ 的标准云模型用  $C_i = (E_{x_i}, E_{n_i}, H_{e_i})$ 表示, 则  $C_i$ 可以通过下述步骤算出。

(1) 根据语言尺度函数计算  $\theta_i, \theta_i = H(s_i)$ ;

(2) 计算  $E_{x_i}$ 。根据有效区间  $U = [X_{\min}, X_{\max}]$ , 计算期望  $E_{x_i}$ 的取值,  $E_{x_i} = X_{\min} + \theta_i(X_{\max} - X_{\min})$ ;

(3) 计算  $E_{n_i}$ 。记一个云滴为  $(x, y)$ , 其中  $x \sim N(E_x, E_n'^2)$ 。由正态分布的  $3\sigma$ 法则, 可得  $3E_{n_i}' \leq \max\{X_{\max} - E_{x_i}, E_{x_i} - X_{\min}\}$ , 这里取

$$3E'_{n,i} = \begin{cases} x_{i+2} - x_i, & i \leq t - 1 \\ \frac{x_{t+2} + x_{t-2}}{2}, & i = t \\ x_i - x_{i-2}, & i \geq t + 1 \end{cases}$$

又由于  $E'_n \sim N(E_n, H_e^2)$ ,  $E_{n,i}$  可以视为  $E'_{n,i}, E'_{n,i-1}, E'_{n,i+1}$  的均值, 故有  $E_{n,i} = (E'_{n,i-1} + E'_{n,i} + E'_{n,i+1})/3$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, 2t - 1, E_{n0} = (E'_{n0} + E'_{n1})/2$ , 且  $E_{n,2t} = (E'_{n,2t-1} + E'_{n,2t})/2$ 。

(4) 计算  $H_{e,i}$ 。因为  $E'_n \sim N(E_n, H_e^2)$ ,  $H_e$  也遵从正态分布的  $3\sigma$  法则, 可以取得  $H_{e,i} = (\max_i \{E'_{n,i}\} - E_{n,i})/3$ 。

### 2.2 语言型 Z-number 向正态云模型的转化

假设语言型 Z-number  $Z_i = (s_i, s'_i)$ , 其中  $s_i, s'_i$  为语言变量, 应用上面的转化模型可以得到  $Z_i = (C_i, C'_i) = ((E_{x,i}, E_{n,i}, H_{e,i}), (E'_{x,i}, E'_{n,i}, H'_{e,i}))$ 。由于第 2 个语言变量是第 1 个的可靠性测度, 因此可以将转化后的第 2 个云模型集成到第 1 个上去, 使用如下公式

$$Z_i = C_i \times C'_i = (E_{x,i} \times E'_{x,j}, \sqrt{(E_{n,i}E'_{x,j})^2 + (E'_{n,j}E_{x,i})^2}, \sqrt{(H_{e,i}E'_{x,j})^2 + (H'_{e,j}E_{x,i})^2}) \quad (3)$$

**例 1** 假设  $S = \{s_0 = \text{非常差}, s_1 = \text{差}, s_2 = \text{有点差}, s_3 = \text{中等}, s_4 = \text{有点优}, s_5 = \text{优}, s_6 = \text{非常优}\}$ 。  $S' = \{s'_0 = \text{非常不确定}, s'_1 = \text{不确定}, s'_2 = \text{轻微不确定}, s'_3 = \text{中立}, s'_4 = \text{轻微确定}, s'_5 = \text{确定}, s'_6 = \text{非常确定}\}$ 。若  $Z_1 = (s_3, s'_6)$ , 有效区间为  $U = [0, 5]$ , 两个集合的语言尺度函数分别取  $f(s_i) = H_1(s_i), g(s'_i) = H_2(s'_i)$ 。

应用上面的模型, 对于这个 Z-number  $Z_1$ , 可以计算得到  $E_x = 2.5, E_n = 0.833\ 5, H_e = 0; E'_x = 1, E'_n = 0.104\ 0, E_x = 2.5, E_n = 0.833\ 5, H_e = 0; E'_x = 1, E'_n = 0.104\ 0, H'_e = 0$ , 因此  $ZC = (2.5, 0.837\ 0, 0.022\ 2)$ 。1 500 个云滴的正态云模型 ZC 可视化的表示可见图 1。

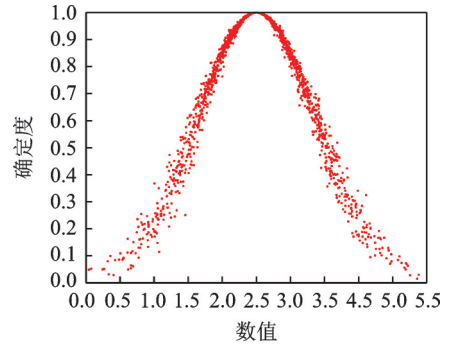


图 1 Z-number  $Z_1 = (s_3, s'_6)$  的标准云模型表示

Fig.1 Z-number  $Z_1 = (s_3, s'_6)$  described by normal cloud

## 3 云可能度函数与权重确定模型

为了对 2 个标准云模型进行比较, 文章提出了云可能度函数, 然后, 使用云可能度函数计算各方案各属性下的云评价的差异, 最后通过各属性优指数在总优先指数中的占比来确定各属性权重。

### 3.1 云可能度函数

设  $C_i = (E_{x,i}, E_{n,i}, H_{e,i})$  和  $C_j = (E_{x,j}, E_{n,j}, H_{e,j})$  是 2 个云模型, 令  $l_i = E_{n,i}^2 + H_{e,i}^2, l_j = E_{n,j}^2 + H_{e,j}^2, C_1$  优于  $C_2$  表示为  $C_1 \geq C_2$ , 则  $C_1 \geq C_2$  的可能度计算公式为

$$P(C_1 \geq C_2) = \left( \left( 1 - \frac{l_i}{l_i + l_j} \right) \frac{E_{x,i}}{2(E_{x,i} + E_{x,j})} - \left( 1 - \frac{l_j}{l_i + l_j} \right) \frac{E_{x,j}}{2(E_{x,i} + E_{x,j})} + 0.5 \right) \quad (4)$$

且满足以下 3 个性质

- (1)  $P(C_i \geq C_i) = 0.5$ ;
- (2)  $P(C_i \geq C_j) + P(C_j \geq C_i) = 1$ ;
- (3) 如果  $P(C_i \geq C_j) \geq 0.5, P(C_j \geq C_k) \geq 0.5, P(C_i \geq C_k) \geq 0.5$ 。

性质(1)和(2)显然成立, 此处省略其证明。性质(3)证明如下

如果  $P(C_i \geq C_j) \geq 0.5, P(C_j \geq C_k) \geq 0.5$ , 可得

$$\left( \left( 1 - \frac{l_i}{l_i + l_j} \right) \frac{E_{x,i}}{2(E_{x,i} + E_{x,j})} - \left( 1 - \frac{l_j}{l_i + l_j} \right) \times \frac{E_{x,j}}{2(E_{x,i} + E_{x,j})} + 0.5 \right) \geq 0.5$$

及

$$\left( \left( 1 - \frac{l_j}{l_j + l_k} \right) \frac{E_{x,j}}{2(E_{x,j} + E_{x,k})} - \left( 1 - \frac{l_k}{l_j + l_k} \right) \times \frac{E_{x,k}}{2(E_{x,j} + E_{x,k})} + 0.5 \right) \geq 0.5$$

由此, 可得不等式  $l_j E_{x,i} - l_i E_{x,j} \geq 0$ , 及  $l_k E_{x,j} - l_j E_{x,k} \geq 0$ , 进一步可得:  $l_j l_k E_{x,i} - l_i l_k E_{x,j} \geq 0$ ,  $l_i l_k E_{x,j} - l_i l_j E_{x,k} \geq 0$ , 则有  $l_j l_k E_{x,i} - l_i l_j E_{x,k} \geq 0 \Rightarrow l_k E_{x,i} - l_i E_{x,k} \geq 0$ , 可得

$$\frac{l_k E_{x,i}}{2(E_{x,i} + E_{x,k})} - \frac{l_i E_{x,k}}{2(E_{x,i} + E_{x,k})} \geq 0$$

因此得到

$$\left( \left( 1 - \frac{l_i}{l_i + l_k} \right) \frac{E_{x,i}}{2(E_{x,i} + E_{x,k})} - \left( 1 - \frac{l_k}{l_i + l_k} \right) \times \frac{E_{x,k}}{2(E_{x,i} + E_{x,k})} + 0.5 \right) \geq 0.5$$

据此, 性质(3)得到证明。

### 3.2 权重确定模型

假设决策方案为  $A_i, i=1, 2, \dots, n$ 。决策属性为  $a_j, j=1, 2, \dots, m$ ,  $C_{ij}$  表示专家对各备选方案在决策属性下云模型评价信息。最大差异方法是一种较为直接的属性权重确定方法, 如果属性  $a_j$  在各方案的评估结果中明显不同, 那么属性  $a_j$  对于区别这两个方案就会有较大的贡献, 因而可以给  $a_j$  更大的权重, 基于该思想建立如下权重确定公式

$$w_j = \frac{\sum_{i < k, i, k=1}^n |P(C_{ij} \geq C_{kj}) - 0.5|}{\sum_{j=1}^m \sum_{i < k, i, k=1}^n |P(C_{ij} \geq C_{kj}) - 0.5|} \quad (5)$$

## 4 决策模型建立

### 4.1 决策思路

本文基于标准云模型和 PROMETHEE 方法提出了一种新的决策方法, 目的在于更好地处理语言型 Z-number 环境下的多属性决策问题。

假设决策问题有  $n$  个方案:  $A_i, i=1, 2, \dots, n$ ,  $m$  个决策决策指标:  $a_j, j=1, 2, \dots, m$ 。由专家对各决策指标进行语义评价, 决策矩阵记为  $A=(a_{ij})_{n \times m}$ 。首先, 规范化处理原始信息决策矩阵  $A=(a_{ij})_{n \times m}$ , 得到  $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n \times m}$ , 在标准化过程中, 效益型的属性不需进行处理, 对于成本型的属性, 可以按照如下方法规范化

$$\bar{Z}_i = (\bar{s}_i, \bar{s}'_i) = (s_{2l-i}, s'_{2l-i}) \quad (6)$$

利用第2节中的转化模型将语言型 Z-number 评价信息转化为正态云模型, 接着, 将所有备选方案根据定义的云可能度函数在属性  $a_j$  下两两比较, 得到方案  $A_i$  对于方案  $A_k$  的优势信息, 云可能度函数是取值范围为  $[0, 1]$  的函数, 方案  $A_i$  对于  $A_k$  的云可能度大小与方案  $A_i$  优于  $A_k$  的程度正相关。云可能度  $P(C_{ij} \geq C_{kj}) > 0.5$  时, 表示在属性  $a_j$  下方案  $A_i$  是严格优于  $A_k$  的; 云可能度  $P(C_{ij} \geq C_{kj}) = 0.5$  时, 在属性  $a_j$  下方案  $A_i$  与  $A_k$  是没有差异的; 云可能度  $P(C_{ij} \geq C_{kj}) < 0.5$  时, 表明在属性  $a_j$  下方案  $A_i$  是严格劣于方案  $A_k$  的。文献[8]提出了 PROMETHEE 方法的 6 种优先函数, 根据决策者偏好, 决策者也可以自己定

义优先函数<sup>[14]</sup>,本文方法利用的是正弦属性偏好函数。因此,方案 $A_i$ 在属性 $a_j$ 下对于方案 $A_k$ 的优先指数计算方法如下

$$P_j(A_i, A_k) = \begin{cases} 0, & P(C_{ij} \geq C_{kj}) \leq 0.5 \\ \sin(P(C_{ij} \geq C_{kj}) - 0.5)\pi, & P(C_{kj} \geq C_{ij}) > 0.5 \end{cases} \quad (7)$$

通过式(5)求得各属性权重后,再根据式(8)计算出备选方案 $A_i$ 对于方案 $A_k$ 的综合优先指数 $H(A_i, A_k)$

$$H(A_i, A_k) = \sum_{j=1}^m \omega_j P_j(A_i, A_k) \quad (8)$$

分别计算备选方案的正、负方向的优先级别值

$$\begin{cases} \phi^+(A_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1, k \neq i}^m H(A_i, A_k) \\ \phi^-(A_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1, k \neq i}^m H(A_k, A_i) \end{cases} \quad (9)$$

式中:正方向的优先级别值 $\phi^+(A_i)$ 代表方案 $A_i$ 优于其他所有方案的程度,优先级别负方向的值 $\phi^-(A_i)$ 代表方案 $A_i$ 劣于其他所有方案的程度。两方案 $A_i$ 与 $A_k$ 进行比较时,当且仅当 $\phi^+(A_i) = \phi^+(A_k)$ ,  $\phi^-(A_i) = \phi^-(A_k)$ 同时成立,两方案无差异;当且仅当 $\phi^+(A_i) \geq \phi^+(A_k)$ ,  $\phi^-(A_i) \leq \phi^-(A_k)$ 同时成立,方案 $A_i$ 优于方案 $A_k$ ;其他情况下,两种方案是不可比较的。根据式(10)计算方案 $A_i$ 的综合优先级别值 $\phi(A_i)$

$$\phi(A_i) = \phi^+(A_i) - \phi^-(A_i) \quad (10)$$

根据各方案的综合优先级别值可以得出方案的完全排序。

## 4.2 决策步骤

基于上述讨论,本文提出的标准云模型与PROMETHEE方法的语言型Z-number多属性决策方法步骤如下:

**步骤1** 利用式(6)规范化原始专家决策矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$ 规,得到 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times m}$ 。

**步骤2** 利用第2节的转化模型将专家评价语言型Z-number转化为正态云模型,得到云决策矩阵 $\tilde{A} = (C_{ij})_{n \times m}$ 。

**步骤3** 通过式(5)求出每个属性的权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ 。

**步骤4** 使用式(7,8)计算方案 $A_i$ 相对于 $A_k$ 的优先指数 $H(A_i, A_k)$ 。

**步骤5** 使用式(9,10)计算每个方案的综合优先级别值,方案的综合优先级别值越大,则该方案的排名就越靠前。

## 5 决策实例

### 5.1 决策过程分析

应用本文提出的方法对某地区4个区域潜在空气污染程度<sup>[13]</sup>进行研究,4个区域分别记为 $A_1, A_2, A_3, A_4$ ,分别对其4个属性进行评估,分别为:风力 $a_1$ 、降水量 $a_2$ 、大气压 $a_3$ 、湿度 $a_4$ ,4个属性均为效益型,其权重完全未知。模糊限制与可靠性度量对应语言术语集分别为 $S = \{s_0 = \text{非常不适宜}, s_1 = \text{不适宜}, s_2 = \text{轻微不适宜}, s_3 = \text{中等}, s_4 = \text{轻微适宜}, s_5 = \text{适宜}, s_6 = \text{非常适宜}\}$ 。 $S' = \{s'_0 = \text{十分不确定}, s'_1 = \text{不确定}, s'_2 = \text{轻微不确定}, s'_3 = \text{中立}, s'_4 = \text{轻微确定}, s'_5 = \text{确定}, s'_6 = \text{非常确定}\}$ 。表达对对象的模

糊限制。此外,专家语言型 Z-number 评估矩阵见表 1。

在应用本文提出的决策模型评估 4 个地区空气潜在污染的过程中  $f(s_i)=H_1(s_i), g(s'_i)=H_2(s'_i)$ , 决策步骤如下:

**步骤 1** 由于各属性均为效益型准则,故评价矩阵不需要再进行规范化操作,所以有  $A=(a_{ij})_{n \times m}=\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n \times m}$ 。

**步骤 2** 转化模型中对于模糊限制,语言尺度函数为  $f(s_i)=H_1(s_i)$ ,对于限制的可靠程度语言尺度函数为  $g(s'_i)=H_2(s'_i)$ ,利用第 2 节转化模型将专家评价语言型 Z-number 转化为标准云模型,得到云信息的决策矩阵  $\tilde{A}=(C_{ij})_{n \times m}$  如下

$$\tilde{A}=(C_{ij})_{n \times m}=\begin{bmatrix} (2.5000, 0.8730, 0.0222) & (3.4161, 0.6492, 0.0721) & (2.3325, 0.5846, 0.1023) & (5.0000, 0.7710, 0.0674) \\ (1.8307, 0.6534, 0.0310) & (3.0409, 0.6305, 0.1067) & (1.8307, 0.6534, 0.0310) & (2.7460, 0.6801, 0.0474) \\ (2.3325, 0.5846, 0.1023) & (1.8750, 0.5563, 0.0790) & (3.7500, 0.8865, 0.0355) & (2.7460, 0.6801, 0.0474) \\ (1.8307, 0.6534, 0.0310) & (2.5000, 0.8730, 0.0222) & (2.5000, 0.5912, 0.1081) & (4.6651, 0.8170, 0.0718) \end{bmatrix}$$

**步骤 3** 通过式(5)计算各个属性的权重:  $w=(0.2662, 0.3636, 0.2205, 0.1497)$ 。

**步骤 4** 利用式(7, 8)计算方案  $A_i$  对于  $A_k$  的优先指数  $H(A_i, A_k)$ , 计算结果如表 2 所示。

**步骤 5** 利用式(9, 10)得到各方案的综合序级别值,分别为  $\phi(A_1)=0.1031, \phi(A_2)=-0.0034, \phi(A_3)=0.0569$ , 及  $\phi(A_4)=-1.567$ , 可知最优方案排序为  $A_1 > A_3 > A_2 > A_4$ 。

**5.2 决策方法比较**

利用本文提出的语言型 Z-number 向正态云模型的转化模型结合文献[15]提出的云模型 TOPSIS 方法和文献[16]介绍的基于正态云相似度的语言型多属性群决策模型以及文献[13]提出的语言 Z-number 环境下的利用云模型的多准则决策方法对上面的例子进行决策,这里,取属性权重为  $w=(0.2662, 0.3636, 0.2205, 0.1497)$ 。

(1) 基于文献[13]提出的方法进行决策,得到例子中 4 个方案的贴近系数值分别为  $d_{RS_1}^*=0.4053, d_{RS_2}^*=0.3879, d_{RS_3}^*=0.4071, d_{RS_4}^*=0.4060$ 。因此得到方案的最终排序为  $A_3 > A_4 > A_1 > A_2$ 。

(2) 基于文献[15]提出的方法进行决策,让云滴数  $N=1000$ , 然后通过计算得到各方案与正理想解的距离  $D_i^+$ 、与负理想解的距离  $D_i^-$ ,再根据方案的相对贴近度  $D$  得到各方案的最终排序结果,由表 3 可知方案的最终排序为  $A_1 > A_4 > A_3 > A_2$ 。

**表 1 专家语言型 Z-number 评价矩阵**

**Table 1 Linguistic Z-number evaluation matrix given by the expert**

区域	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$A_1$	$(s_3, s'_6)$	$(s_5, s'_5)$	$(s_5, s'_3)$	$(s_6, s'_6)$
$A_2$	$(s_3, s'_5)$	$(s_6, s'_4)$	$(s_3, s'_5)$	$(s_4, s'_5)$
$A_3$	$(s_5, s'_3)$	$(s_4, s'_3)$	$(s_4, s'_6)$	$(s_4, s'_5)$
$A_4$	$(s_4, s'_5)$	$(s_3, s'_6)$	$(s_6, s'_3)$	$(s_5, s'_6)$

**表 2 各个方案之间的优先指数**

**Table 2 Comparison of priority index of each alternative**

区域	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$A_1$	0	0.1333	0.1697	0.2523
$A_2$	0.0526	0	0.0617	0.2135
$A_3$	0.1331	0.1059	0	0.2396
$A_4$	0.0602	0.0988	0.0764	0

**表 3 不同方案与理想间的相对贴近度值**

**Table 3 Values of relative closeness between each alternative with ideal**

参数	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$D_i^+$	0.5463	1.0695	1.0476	0.8842
$D_i^-$	1.2505	0.6792	0.7412	0.7839
$D$	0.6960	0.3834	0.4143	0.4699

(3) 基于文献[16]提出的方法进行决策,可以求得各属性的综合相似度矩阵 $P$ 为

$$P = \begin{bmatrix} 0.4014 & 0.4788 & 0.3144 & 0.6402 \\ 0.3868 & 0.4048 & 0.2284 & 0.1871 \\ 0.3843 & 0.2439 & 0.4201 & 0.1871 \\ 0.3868 & 0.3910 & 0.3677 & 0.5135 \end{bmatrix}$$

加权之后得到各方案综合相似度为 $S_1 = 0.4445, S_2 = 0.3270, S_3 = 0.3101, S_4 = 0.4016$ 。因此方案的排序为: $A_1 > A_4 > A_2 > A_3$ 。几种方法最终结果对比见表4。

分析表4可以得知,对于语言型Z-number环境下的多属性决策问题,应用本文模型的排序结果与利用文献[15-16]提出的模型的排序结果最优方案相同,文献[13]模型得出的最优方案在本文排序结果中也是次优的方案,由此证明了本文提出的决策模型的有效性。已有的3种方法与本文方法的主要区别在于已有的3种方法在比较云模型时做到的是度量2个标准云模型的差异程度,而本文提出的方法则可以直接比较2个云模型的优劣程度;另外本文模型改进了语言术语集向标准云模型的转化方法,缩减了单个语言术语的云的覆盖范围。

表4 4种决策方法结果对比

Table 4 Ranking results by the four methods

决策方法	方案的排序
本文方法	$A_1 > A_3 > A_2 > A_4$
文献[13]方法	$A_3 > A_4 > A_1 > A_2$
文献[15]方法	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
文献[16]方法	$A_1 > A_4 > A_2 > A_3$

## 6 结束语

语言型Z-number不仅给出了备选方案在各属性下的语言评价,同时给出了这些评价信息的可靠性,本文将云模型与PROMETHEE方法相结合,应用于语言型Z-number环境下的多属性决策问题,充分利用了语言型Z-number蕴含的信息,将PROMETHEE方法扩展至语言型Z-number环境,提出了云可能度函数和基于云可能度函数的属性权重确定模型。该方法思路清晰,可操作性和实用性强,为语言型Z-number环境下的决策及其他问题引入了一种新的视角和解决决策问题的新思路;同时,在其他环境下的云模型方法决策同样具有实用价值。本文尚存在不足,首先Z-number向云模型的转化过于依赖语言尺度函数,未能更好挖掘Z-number内在的不确定性;其次,决策时没有考虑属性之间的相关性,也未能充分挖掘评价数据中的潜在信息;最后本文未对群决策问题进行讨论,多专家情况下本文方法还有待拓展。上述问题将在进一步的研究工作中继续探讨。

## 参考文献:

- [1] ZADEH L A. A note on Z-numbers[J]. Information Sciences, 2011, 181: 2923-2932.
- [2] ALIEV R A, ALIZADEH A V, HUSEYNOV O H. The arithmetic of discrete Z-numbers[J]. Information Sciences, 2015, 290: 124-155.
- [3] ALIEV R A, ALIZADEH A V, HUSEYNOV O H. The arithmetic of continuous Z-numbers[J]. Information Sciences, 2016, 373: 441-460.
- [4] KANG B Y, WEI D J, LI Y, et al. A method of converting Z-number to classic fuzzy number[J]. Journal of Information & Computational Science, 2012, 9(3): 703-709.
- [5] 李德毅, 孟海军, 史雪梅. 隶属云和隶属云发生器[J]. 计算机研究和发展, 1995, 32(6): 16-21.  
LI Deyi, MENG Haijun, SHI Xuemei. Membership clouds and membership cloud generators[J]. Journal of Computer Research and Development, 1995, 32(6): 16-21.
- [6] 李德毅, 刘长昱. 论正态模型的普适性[J]. 中国工程科学, 2004, 8(6): 28-34.



- LI Deyi, LIU Changyu. Study on the universality of the normal cloud model[J]. Strategic Study of CAE, 2004, 8(6): 28-34.
- [7] 杨恶恶, 王坚强, 马超群, 等. 基于云发生算法的犹豫语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 679-681.  
YANG Ee, WANG Jianqiang, MA Chaoqun, et al. Hesitant linguistic multiple criteria decision making method based on cloud generating algorithm[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 679-681.
- [8] BRANS J P, VINCKE P H, MARESCHAL B. How to select and rank projects: The PROMETHEE method[J]. European J of Operational Research, 1986, 24(2): 228-238.
- [9] PENG H G, WANG J Q. Hesitant uncertain linguistic Z-numbers and their application in multi-criteria group decision-making problems[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2016, 19(5): 1300-1316.
- [10] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.
- [11] 姚爱婷, 梅孔椿, 毛军军, 等. 基于新语言尺度函数的犹豫 Z-number 群决策模型[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 38-44.  
YAO Aiting, MEI Kongchun, MAO Junjun, et al. Hesitant Z-number group decision model based on new language scale function[J]. J Chongqing Technol Business Univ: Natural Science Edition, 2019, 36(1): 38-44.
- [12] WANG H L, FENG Y Q. On multiple attribute group decision making with linguistic assessment information based on cloud model[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 679-685.
- [13] PENG H G, WANG J Q. A multi-criteria group decision-making method based on the normal cloud model with zadeh's Z-number[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3246-3260.
- [14] 曾炳昕. 基于云模型的语言型多属性群决策方法研究[D]. 北京:华北电力大学, 2016.  
ZENG Bingxi. Research the linguistic multi-criteria group decision-making methods based on cloud model[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2016.
- [15] 徐士东, 耿秀丽. 云模型与 TOPSIS 相结合的多属性群决策方法[J]. 计算机应用研究, 2017, 23(10): 2964-2967.  
XU Shidong, GENG Xiuli. Method of multi-attribute group decision-making by combining cloud model and TOPSIS[J]. Application Research of Computers, 2017, 23(10): 2964-2967.
- [16] 徐聪, 潘小东. 基于正态云相似度的语言型多属性群决策方法[J]. 计算机科学, 2019, 46(6): 218-222.  
XU Cong, PAN Xiaodong. Linguistic multi-attribute group decision making method based on normal cloud similarity[J]. Computer Science, 2019, 46(6): 218-222.

#### 作者简介:



李燕飞(1995-),男,硕士研究生,研究方向:智能计算、数据挖掘、模糊集与决策理论等,E-mail:lyfinf@163.com。



郭海艳(1994-),女,硕士研究生,研究方向:智能计算、模糊集与决策理论等,E-mail:guohaiyan357@163.com。



吴涛(1970-),通信作者,男,教授,研究方向:模糊集理论、数据挖掘与智能计算等,E-mail:wutao@ahu.edu.cn。



毛军军(1973-),女,教授,研究方向:统计与决策理论、数据挖掘、不确定理论等,E-mail:maojunjun@ahu.edu.cn。

(编辑:张彤)