

双加权 L_p 范数 RPCA 模型及其在椒盐去噪中的应用

董惠雯, 禹晶, 郭乐宁, 肖创柏

(北京工业大学信息学部, 北京 100124)

摘要: 鲁棒主成分分析 (Robust principal component analysis, RPCA) 模型中秩函数和 L_0 范数的求解是非确定性多项式 (Nondeterministic polynomial, NP) 难问题, 凸近似模型的求解通常会导致过收缩。本文结合加权方法和 L_p 范数提出了一种基于双加权 L_p 范数的 RPCA 模型, 利用加权 S_p 范数低秩项和加权 L_p 范数稀疏项分别对 RPCA 框架中的低秩恢复问题和稀疏恢复问题进行建模, 使其更接近秩函数和 L_0 范数最小化问题的解, 提升了矩阵秩估计和稀疏估计的准确性。为了验证模型性能, 本文利用图像的非局部自相似性, 结合相似图像块组的低秩性与椒盐噪声的稀疏性, 将双加权 L_p 范数鲁棒主成分分析模型应用于去除椒盐噪声过程中。定量与定性的实验结果表明, 本文模型性能优于其他模型, 同时奇异值过收缩分析也表明本文模型能够有效抑制秩成分的过度收缩。

关键词: 图像去噪; 鲁棒主成分分析; 低秩; 稀疏; 非局部自相似性

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

Dual-Weighted L_p -Norm RPCA Model and Its Application in Salt-and-Pepper Noise Removal

DONG Huiwen, YU Jing, GUO Lening, XIAO Chuangbai

(Faculty of Information Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The robust principal component analysis (RPCA) model aims to estimate underlying low-rank and sparse structures from the degraded observation data. Both the rank function and the L_0 -norm minimization in the RPCA model are nondeterministic polynomial (NP)-hard problems, which usually are solved by the convex approximation model, so leading to the undesirable over-shrinkage problem. This paper proposes a dual-weighted L_p -norm model based RPCA model by combining the weighting method and the L_p -norm. We use the weighted S_p -norm low-rank term and the weighted L_p -norm sparse term to model the low-rank and sparse recovery problems under the RPCA framework, respectively, which provides better approximations to the rank minimization and the L_0 -norm minimization, thus improving the accuracy of the rank estimation and the sparse estimation. To further demonstrate the performance of the proposed model, we apply the dual-weighted L_p -norm RPCA model to remove the salt-and-pepper noise by exploiting the image nonlocal self-similarity and combining the low rank of similar image patch matrices and the sparsity of salt-and-pepper noise. Both qualitative and quantitative experiments demonstrate that the proposed model outperforms other state-of-the-art models, and the singular value over-shrinkage

analysis experiment also demonstrates that the model can better deal with the over-shrinkage problem of the rank components.

Key words: image denoising; robust principal component analysis (RPCA); low rank; sparse; nonlocal self-similarity

引言

主成分分析(Principle component analysis, PCA)模型可以分离观测数据中低秩的数据结构,但是对数据中大噪声异常敏感。文献[1-2]提出了鲁棒主成分分析(Robust principal component analysis, RPCA)模型,旨在分离观测数据中潜在的低秩结构与稀疏结构,对严重噪声干扰的观测数据具有鲁棒性。RPCA模型可以应用于图像中椒盐噪声的去除^[3]、监控视频背景中的前景运动目标分离^[4-6]或者人物面部图像阴影与遮挡物的去除^[7]等。

RPCA模型包含两个子问题—— L_0 范数最小化问题(稀疏恢复)与秩函数最小化问题(低秩恢复)。RPCA模型的求解是非确定性多项式(Nondeterministic polynomial, NP)难问题,主成分追踪(Principal component pursuit, PCP)模型^[5]是RPCA模型最紧的凸近似,当秩或者稀疏程度超过阈值限制时,凸近似模型将无法准确估计低秩解与稀疏解。为此,Candes等^[8]提出了加权 L_1 范数方法,为较大的矩阵元素分配较小的权值,抑制 L_1 范数的过收缩问题,提升稀疏解的准确性。Gu等提出了加权核范数最小化模型(Weighted nuclear norm minimization, WNNM)^[9],以及基于WNNM的RPCA模型(WNNM-RPCA)^[10],该模型利用加权核范数对秩函数进行松弛,考虑了不同秩成分的重要性,根据奇异值大小分配权值,控制对不同秩成分的惩罚,以保留更重要的秩成分,提升了低秩解的准确性。Peng等^[11]提出了一种双加权模型,同时对RPCA模型中的稀疏项与低秩项进行加权,并结合重加权方法在迭代算法中分配权值。该模型能够同时提升稀疏解与低秩解的准确性。

L_1 范数是 L_0 范数最紧的凸近似,非凸的 L_p 范数更接近 L_0 范数的几何形态, p 为区间 $(0, 1)$ 上的任意实数。 S_p 范数是矩阵奇异值的 L_p 范数, $0 < p < 1$,与核范数相比,非凸的 S_p 范数更接近秩函数的几何形态。由于这种广义的范数模型并不严格符合范数的数学定义,因此也称为伪范数或拟范数。Zhang等^[12]通过实验证明,与核范数相比,非凸的 S_p 范数能够更准确地对数据的低秩性进行建模。Xie等提出了加权 S_p 范数最小化模型(Weighted Schatten p -norm, WSNM)^[13],利用加权 S_p 范数对秩函数进行松弛,更准确地抑制对较大奇异值的过度收缩。WSNM模型使用 L_2 范数建模数据保真项,能够较好地抑制图像中的高斯噪声,但是对较大的稀疏噪声较为敏感。为此,基于WSNM的RPCA模型(WSNM-RPCA)^[14]利用 L_1 范数约束稀疏成分;Chen等^[15]提出了基于 L_1 范数的WSNM模型(WSNM based L_1 -norm, WSNM- L_1),采用 L_1 范数建模数据保真项。

本文提出一种双加权 L_p 范数模型(Dual-weighted L_p -norm, DWLP),同时提升了矩阵秩估计和稀疏估计的准确性。该算法结合加权算法与 L_p 范数,利用加权 S_p 范数低秩项和加权 L_p 范数稀疏项分别对RPCA框架中的低秩恢复问题和稀疏恢复问题进行建模,使其更接近秩函数最小化问题和 L_0 范数最小化问题的解,有效抑制凸近似模型的过度收缩。结合图像的非局部自相似性,通过构建相似图像块组,将双加权 L_p 范数模型应用于椒盐噪声的去除中,估计低秩的图像结构与稀疏的椒盐噪声,从稀疏噪声中分离低秩的图像结构,从而恢复或重建原始的无噪图像。

1 RPCA模型

RPCA模型旨在利用数据矩阵的低秩性和误差矩阵的稀疏性,从稀疏的误差中恢复出本质上低秩

的数据矩阵。假设观测数据矩阵为 $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$,低秩矩阵为 $L \in \mathbf{R}^{m \times n}$,稀疏矩阵为 $S \in \mathbf{R}^{m \times n}$,RPCA模型定义为

$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0 \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (1)$$

式中: $\text{rank}(L)$ 为矩阵的秩函数,定义为矩阵中非0奇异值的个数,约束矩阵的低秩性; $\|S\|_0$ 约束误差数据的稀疏程度,这里借用 L_0 范数描述矩阵的稀疏性; $\lambda > 0$ 为正则化参数。

由于秩函数 $\text{rank}(L)$ 与 L_0 范数的求解是NP难问题,通常用核范数对 $\text{rank}(L)$ 进行凸松弛,用 L_1 范数对 L_0 范数进行凸松弛,将RPCA模型转换为求解如下的凸优化问题,通过最小化 L_1 范数与核范数的组合分解矩阵^[1, 2, 5, 16],即

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (2)$$

式中: $\|L\|_*$ 为矩阵 L 的核范数,定义为矩阵奇异值之和,即 $\|L\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(L)$, $r = \min(m, n)$, $\sigma_i(L)$ 为矩阵 L 的第 i 个奇异值; $\|S\|_1$ 为矩阵 S 的 L_1 范数,定义为矩阵元素之和,即 $\|S\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |s_{i,j}|$, $s_{i,j}$ 表示矩阵 S 中的元素; $\lambda > 0$ 为正则化参数。RPCA的凸近似模型也称为主成分追踪(Principal component pursuit, PCP),记为PCP模型,当 $\lambda = C_0/\sqrt{t_1}$, $t_1 = \min(m, n)$, C_0 为正常数,低秩矩阵的秩 $\text{rank}(L) \leq O(t_2/\log(t_1)^{-1})$, $t_2 = \max(m, n)$,以及稀疏矩阵满足 $\|S\|_0 \leq O(mn)$ 时,PCP模型将以高于 $1 - O(t_1^{-10})$ 的概率准确地恢复 L 和 S ^[2]。显然,PCP模型对低秩性与稀疏性的要求是严格的。

PCP模型通过 L_1 范数约束稀疏成分 S 的稀疏性与低秩成分 L 的低秩性,通常使用软阈值算子近似求解 L_1 范数最小化问题^[17],使用奇异值软阈值算子近似求解核范数最小化问题^[18]。凸近似模型容易导致过收缩问题,影响解的准确性。软阈值算子以 λ 为阈值,对每一个满足 $|x_{i,j}| > \lambda$ 的元素惩罚相同的 λ ,当 $|x_{i,j}|$ 小于阈值时,输出的最优解 $s_{i,j} = 0$ 。绝对值较大的矩阵元素在 L_1 范数最小化问题中会受到比 L_0 范数更大的惩罚,导致过收缩问题,影响稀疏解的准确性。矩阵的秩函数等价于奇异值的 L_0 范数,矩阵的核范数等价于奇异值的 L_1 范数。核范数最小化问题利用奇异值软阈值算子求解,也会造成对矩阵中较大奇异值的过度收缩。矩阵的奇异值隐含着重要的成分信息,且重要性和奇异值大小正相关。奇异值的过度收缩会影响低秩矩阵的重建,降低低秩解的准确性。

Gu等^[10]提出了基于WNNM的RPCA模型WNNM-RPCA,即

$$\min_{L,S} \|L\|_{\Omega,*} + \lambda \|S\|_1 \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (3)$$

式中:低秩项 $\|L\|_{\Omega,*} = \sum_{i=1}^r \omega_i \sigma_i(L)$,权值对角矩阵 $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)$,第 i 个奇异值的权值定义为 $\omega_i = 1/(\sigma_i(L) + \epsilon)$, ϵ 为趋近于0的常数。加权核范数通过设置权值与矩阵奇异值成反比,抑制核范数对较大奇异值的过度收缩,保护重要的秩成分,并且约束了权值的递增顺序。令矩阵 L 的奇异值按照递减顺序排列,保证了算法的有效性^[19]。

Xie等^[14]利用 S_p 范数代替核范数对秩函数进行松弛,并结合加权方法,提出了基于WSNM的RPCA模型WSNM-RPCA,即

$$\min_{L,S} \|L\|_{\Omega,S_p}^p + \lambda \|S\|_1 \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (4)$$

式中低秩项 $\|L\|_{\Omega,S_p}^p = \sum_{i=1}^r \omega_i \sigma_i(L)^p$ 。与凸近似的核范数相比,非凸的 S_p 范数更接近秩函数的几何形态,

WSNM-RPCA采用广义软阈值算子(Generalized shrinkage thresholding, GST)^[20]近似计算 S_p 范数最小化问题的数值解。

Peng等^[11]同时对RPCA模型中的稀疏项与低秩项进行加权,提出了双加权模型,即

$$\min_{L, S} \|L\|_{\Omega, *}, + \lambda \|W \odot S\|_1 \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (5)$$

式中:低秩项 $\|L\|_{\Omega, *}, = \sum_{i=1}^r \omega_i \sigma_i(L)$;稀疏项 $\|W \odot S\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} |s_{i,j}|$, $s_{i,j}$ 表示矩阵 S 中的元素,权值矩阵 $W \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $s_{i,j}$ 的权值定义为 $\omega_{i,j} = 1/(|s_{i,j}| + \epsilon)$ 。为了更准确地估计权值, Peng等^[11]提出了一种迭代分配权值的重加权方法,根据上一次迭代的估计结果计算当前迭代所需要的权值。

2 双加权 L_p 范数RPCA模型

为了解决凸近似模型对稀疏解与低秩解的过度收缩,现有的方法提出了多种改进的RPCA模型,对 L_0 范数和秩函数 $\text{rank}(\cdot)$ 进行松弛。本文提出了一个广义的RPCA框架——双加权 L_p 范数RPCA模型DWLP,利用加权 L_p 范数和加权 S_p 范数^[13]分别对RPCA模型中的稀疏项和低秩项进行建模。

2.1 模型的建立

在RPCA框架下, DWLP模型利用加权 L_p 范数最小化模型估计稀疏恢复问题,利用WSNM模型估计低秩恢复问题。DWLP模型定义如下

$$\min_{L, S} \|L\|_{\Omega, S_p}^p + \lambda \|W \odot S\|_q^q \quad \text{s.t. } L + S = X \quad (6)$$

式中:稀疏项 $\|W \odot S\|_q^q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} |s_{i,j}|^q$ 。

加权 L_p 范数通过为较大的矩阵元素分配较小的权值,控制对较大元素的惩罚力度,削弱元素值对矩阵稀疏性的影响,并采用非凸的 L_p 范数近似 L_0 范数的几何形态,能够有效抑制过收缩问题,更准确地估计稀疏解。加权 S_p 范数根据奇异值大小分配权值,削弱对较大奇异值的惩罚,保护更重要的秩成分,并利用非凸的 S_p 范数近似秩函数的几何形态,提高了低秩解的准确性。因此, DWLP模型利用加权方法与 L_p 范数约束目标函数中的低秩成分与稀疏成分,有效抑制过收缩问题,增强了稀疏矩阵 S 的稀疏性与低秩矩阵 L 的低秩性。

DWLP模型可以看作是一种广义的低秩-稀疏分解模型,目前用于近似RPCA模型的PCP模型^[5]、WNNM-RPCA模型^[10]、WSNM-RPCA^[14]模型和Peng等提出的双加权模型^[11]均是DWLP模型的特殊情况:

- (1)当式(6)中 Ω 和 S 权值 $\omega_i = w_i = 1$ 并且 $p = q = 1$ 时, DWLP模型退化为PCP模型;
- (2)当式(6)中 S 的权值 $w_i = 1$ 并且 $p = q = 1$ 时, DWLP模型退化为WNNM-RPCA模型;
- (3)当式(6)中 S 的权值 $w_i = 1$ 并且 $q = 1$ 时, DWLP模型退化为WSNM-RPCA模型;
- (4) Peng等^[11]提出的模型是DWLP模型在 $p = q = 1$ 时的特殊情况, 本文将其简写为DWLP($p = q = 1$)。

与仅处理低秩解过收缩的WNNM-RPCA模型和WSNM-RPCA模型,以及基于 L_1 范数的双加权模型相比,本文模型能够更有效地抑制凸近似模型的过收缩问题。

2.2 模型的求解

DWLP是非凸问题,无法直接求解。将式(6)写为增广拉格朗日形式为

$$\arg \min_{L, S, Z, \mu} \lambda_l \|L\|_{\Omega, S_p}^p + \lambda_s \|\mathbf{W} \odot S\|_q^q + \langle Z, X - L - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - L - S\|_F^2 \quad (7)$$

式中: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积运算; Z 为拉格朗日乘子; μ 为惩罚系数; $\lambda_l > 0$ 为低秩正则化参数; $\lambda_s > 0$ 为稀疏正则化参数。

本文利用交替方向乘子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)求解式(7)^[21],通过交替迭代的方式更新 L 、 S 、 Z 和 μ 为

$$\begin{cases} \hat{S}^{k+1} = \arg \min_S \lambda_s \|\mathbf{W}^k \odot S\|_q^q + \frac{\mu^k}{2} \left\| X + \frac{Z^k}{\mu^k} - L^k - S \right\|_F^2 \\ \hat{L}^{k+1} = \arg \min_L \lambda_l \|L\|_{\Omega^k, S_p}^p + \frac{\mu^k}{2} \left\| X + \frac{Z^k}{\mu^k} - S^{k+1} - L \right\|_F^2 \\ \hat{Z}^{k+1} = Z^k + \mu^k (X - \hat{L}^{k+1} - \hat{S}^{k+1}) \\ \hat{\mu}^{k+1} = \rho \mu^k \end{cases} \quad (8)$$

式中 k 为迭代次数。稀疏矩阵 S 和低秩矩阵 L 估计是两个独立子问题,以下是具体求解过程。

(1)固定 L 和 Z ,估计稀疏矩阵 S 为

$$\hat{S}^{k+1} = \arg \min_S \lambda_s \|\mathbf{W}^k \odot S\|_q^q + \frac{\mu^k}{2} \left\| X + \frac{Z^k}{\mu^k} - L^k - S \right\|_F^2 \quad (9)$$

令 $F^k = X + Z^k/\mu^k - L^k$, $\Phi^k = \lambda_s \mathbf{W}^k/\mu^k$,将式(9)写为

$$\hat{S}^{k+1} = \arg \min_S \|\Phi^k \odot S\|_q^q + \frac{1}{2} \|S - F^k\|_F^2 \quad (10)$$

为了便于求解,将式(10)拆解为关于分量 $\hat{s}_{i,j}^{k+1}$ 的子问题为

$$\hat{s}^{k+1} = \arg \min_s \frac{1}{2} (s - f^k)^2 + \phi^k |s|^q \quad (11)$$

式中: \hat{s}^{k+1} 、 f^k 和 ϕ^k 分别为矩阵 \hat{S}^{k+1} 、 F^k 和 Φ^k 中的元素,为了方便描述,这里省略了下标 i, j 。由于当前迭代中的 s 是未知量,因此需要使用上一次迭代结果计算权值 $w^k = 1/(|s^k| + \epsilon)$,且 $\phi^k = \lambda_s w^k/\mu^k$,其中 w^k 和 s^k 分别为权值矩阵 \mathbf{W}^k 和上一次迭代估计的稀疏矩阵 \hat{S}^k 中的元素。

式(11)是 L_p 范数最小化问题,本文利用Chartrand等提出的 p -shrinkage算子近似计算 L_p 范数最小化问题的闭合解^[22-23]为

$$\hat{s}^{k+1} = \text{sgn}(f^k) \max(0, |f^k| - \phi^k |f^k|^{q-1}) \quad (12)$$

(2)固定 S 和 Z ,估计低秩矩阵 L 为

$$\hat{L}^{k+1} = \arg \min_L \lambda_l \|L\|_{\Omega^k, S_p}^p + \frac{\mu^k}{2} \left\| X + \frac{Z^k}{\mu^k} - S^{k+1} - L \right\|_F^2 \quad (13)$$

令 $T^k = X + Z^k/\mu^k - S^{k+1}$, $\Psi^k = \lambda_l \Omega^k/\mu^k$,将式(13)写为

$$\hat{L}^{k+1} = \arg \min_L \|L\|_{\Psi^k, S_p}^p + \frac{1}{2} \|L - T^k\|_F^2 \quad (14)$$

T^k 的奇异值分解为 $T^k = U \Sigma^k V^T$,奇异值对角矩阵 $\Sigma^k = \text{diag}(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_r^k)$,其中, $i = 1, 2, \dots, r, \sigma_i^k$ 为 T^k 的第 i 个奇异值。低秩矩阵 \hat{L}^{k+1} 的奇异值分解为 $\hat{L}^{k+1} = U \hat{\Delta}^{k+1} V^T$, $\hat{\Delta}^{k+1} = \text{diag}(\hat{\delta}_1^{k+1}, \hat{\delta}_2^{k+1}, \dots, \hat{\delta}_r^{k+1})$, \hat{L}^{k+1} 的第 i 个奇异值为

$$\hat{\delta}_i^{k+1} = \arg \min_{\delta_i} \frac{1}{2} (\delta_i - \sigma_i^k)^2 + \psi_i^k \delta_i^p \quad (15)$$

式中 ψ_i^k 为矩阵 Ψ^k 对角线上的元素。由于当前迭代中的 δ_i 是未知量, 因此使用上一次迭代结果计算权值 $\omega_i^k = 1/(\hat{\delta}_i^k + \epsilon)$, 进一步计算 $\psi^k = \lambda_i \omega_i^k / \mu^k$, 其中 ω_i^k 为权值矩阵 Ω^k 对角线上的元素, $\hat{\delta}_i^k$ 为奇异值矩阵 $\hat{\Delta}^k$ 中的第 i 个奇异值, $\hat{L}^k = U \hat{\Delta}^k V^T$, \hat{L}^k 为上一次迭代估计的低秩矩阵解。

本文仍利用 p -shrinkage 算子近似计算式(15)中 L_p 范数最小化问题, 其闭合解为

$$\hat{\delta}_i^{k+1} = \max(0, \sigma_i^k - \psi_i^k (\sigma_i^k)^{p-1}) \quad (16)$$

3 实验结果与分析

本文利用图像的非局部自相似性构建相似图像块组, 将DWLP模型应用于椒盐噪声的去除, 通过在不同椒盐噪声水平下的去噪实验验证本文DWLP模型的有效性。

3.1 DWLP模型在椒盐去噪中的应用

椒盐噪声是一种常见的稀疏噪声, 主要源于电荷耦合器件的坏点或远距离传输的脉冲干扰。脉冲干扰通常比图像信号的强度大, 在图像中脉冲噪声总是数字化为最小值或最大值。基于双加权 L_p 范数的椒盐去噪算法主要包括以下3个步骤: (1)利用预处理图像匹配相似图像块, 生成相似图像块组; (2)利用DWLP模型对相似图像块组进行低秩-稀疏分解; (3)聚合图像块, 输出去噪重建图像。

首先, 为减少椒盐噪声对相似块匹配的干扰, 采用中值滤波处理观测图像 $I \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 生成预处理图像 I' 。在观测图像与预处理图像中以 $c \times c$ 为图像块尺寸, s 为步长(即每相隔 s 个像素抽取一个图像块), 进行图像块划分。在预处理图像中计算第 i 个图像块与其他图像块间的欧氏距离, 并在观测图像中取出欧氏距离最小的 K 个图像块, 经过向量化表示, 构成相似图像块组 $X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,K}\} \in \mathbb{R}^{c^2 \times K}$, $x_{i,j}$ 表示第 i 个图像块的第 j 个相似图像块, 其中 $j = 1, 2, \dots, K$ 。

其次, 将相似图像块组 X_i 作为DWLP模型的输入, 利用2.2节中的求解方法估计 X_i 中的低秩图像成分 \hat{L}_i 与稀疏噪声成分 \hat{S}_i 。

最后, 抽取矩阵 \hat{L}_i 的第一列元素作为第 i 个图像块的去噪图像块。将重建的去噪图像块按照其在观测图像中的位置放回, 并对图像块之间的重叠区域取平均, 输出一幅去噪重建图像 \hat{I} 。

3.2 定量与定性比较

本文实验在 Set12、Kadak24 以及 BSD200 等数据集中随机选取 10 幅分辨率为 256 像素 \times 256 像素的灰度图像作为测试图像(图1), 并通过加入不同水平的椒盐噪声, 生成有噪的观测图像。

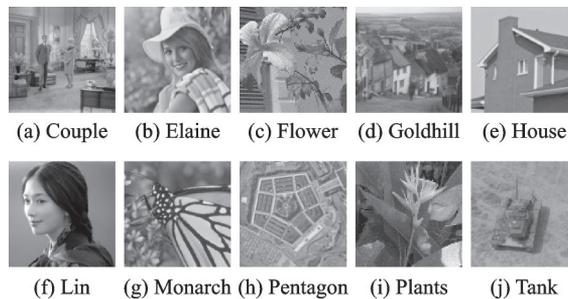


图1 测试图像

Fig.1 Test images

将本文模型与PCP模型^[5]、WNNM-RPCA模型^[10]、WSNM-RPCA模型^[14]、DWLP($p=q=1$)模型^[11],以及WSNM- L_1 模型^[15]进行比较。同时采用峰值信噪比(Peak signal to noise ratio, PSNR)^[24]和结构相似度(Structural similarity index metric, SSIM)^[25]作为客观质量评价指标。PSNR值和SSIM值越大,表示图像失真度越小,去噪图像质量越好。

表1定量比较了不同椒盐噪声概率 P 情况下各种方法的去噪结果。在10%椒盐噪声概率的情况下,DWLP模型的PSNR值分别高出PCP、WNNM-RPCA、WSNM-RPCA、WSNM- L_1 和DWLP($p=q=1$)约7.880、7.300、7.029、8.817和0.269 dB;而在30%椒盐噪声概率的情况下,DWLP模型的PSNR值分别高出PCP、WNNM-RPCA、WSNM-RPCA、WSNM- L_1 和DWLP($p=q=1$)约3.833、3.847、3.667、4.869和0.456 dB。通过实验可得出结论:首先,强度较大的椒盐噪声破坏了稀疏先验与图像低秩性,PCP模型的复原性能较差;其次,DWLP模型的PSNR和SSIM均高于其他模型的平均水平,表明使用加权 L_p 范数同时处理低秩成分与稀疏成分能够更准确地重建图像的低秩结构;最后,随着噪声水平的增加,当椒盐噪声概率达到50%时,噪声的稀疏性降低,DWLP模型中 p 和 q 的取值接近于1,DWLP($p=q=1$)与DWLP的客观评价指标相当。

表1 不同椒盐噪声概率情况下各种去噪方法的PSNR/SSIM比较

Table 1 Comparison of different denoising methods under different salt-and-pepper probabilities in terms of PSNR/SSIM

图像	$P/\%$	PSNR/dB(SSIM)					
		PCP	WNNM-RPCA	WSNM-RPCA	WSNM- L_1	DWLP($p=q=1$)	DWLP
Couple	10	27.046(0.838)	27.691(0.801)	28.004(0.812)	26.452(0.735)	34.595(0.978)	35.026(0.980)
	20	26.342(0.810)	26.031(0.736)	26.294(0.748)	25.080(0.673)	30.957(0.943)	31.571(0.957)
	30	24.503(0.669)	24.408(0.649)	24.641(0.662)	23.907(0.612)	28.026(0.878)	28.771(0.914)
	40	23.431(0.650)	23.770(0.610)	23.810(0.614)	22.621(0.514)	26.107(0.792)	26.573(0.843)
	50	19.599(0.341)	23.284(0.708)	23.531(0.707)	21.065(0.416)	22.894(0.715)	22.946(0.714)
Elaine	10	31.641(0.928)	32.165(0.890)	32.462(0.896)	30.163(0.859)	40.470(0.989)	40.473(0.990)
	20	30.348(0.909)	30.238(0.858)	30.480(0.864)	28.636(0.808)	36.629(0.971)	36.381(0.970)
	30	28.423(0.880)	28.443(0.822)	28.652(0.825)	27.145(0.755)	33.405(0.951)	33.455(0.948)
	40	25.538(0.749)	26.596(0.772)	27.030(0.793)	25.175(0.689)	30.126(0.897)	30.710(0.920)
	50	19.652(0.630)	24.912(0.768)	26.167(0.768)	22.908(0.565)	26.986(0.809)	26.973(0.808)
Flower	10	28.659(0.856)	28.882(0.821)	29.223(0.831)	27.954(0.776)	35.874(0.976)	36.127(0.977)
	20	27.938(0.835)	27.461(0.775)	27.673(0.782)	26.592(0.743)	31.770(0.939)	31.776(0.945)
	30	27.113(0.811)	26.284(0.730)	26.433(0.737)	25.384(0.666)	28.993(0.876)	29.291(0.905)
	40	25.782(0.739)	25.675(0.709)	25.600(0.701)	24.230(0.617)	27.526(0.810)	28.027(0.854)
	50	22.185(0.407)	25.252(0.539)	25.316(0.546)	22.512(0.500)	25.639(0.729)	25.626(0.727)
Goldhill	10	29.419(0.857)	29.294(0.799)	29.575(0.809)	27.753(0.744)	36.405(0.977)	37.022(0.978)
	20	28.637(0.836)	28.002(0.753)	28.158(0.759)	26.792(0.699)	33.101(0.944)	32.869(0.941)
	30	27.428(0.793)	26.556(0.693)	26.687(0.696)	25.632(0.631)	29.486(0.865)	30.302(0.895)

续表

图像	$P/\%$	PSNR/dB(SSIM)					
		PCP	WNNM- RPCA	WSNM- RPCA	WSNM- L_1	DWLP ($p=q=1$)	DWLP
	40	24.787(0.687)	25.400(0.654)	25.921(0.673)	24.117(0.558)	28.067(0.807)	28.684(0.846)
	50	20.598(0.529)	24.623(0.697)	25.433(0.736)	22.299(0.464)	25.125(0.653)	25.200(0.683)
House	10	32.004(0.926)	33.223(0.891)	33.415(0.893)	30.881(0.851)	40.794(0.989)	41.242(0.990)
	20	30.292(0.908)	31.366(0.875)	31.432(0.875)	29.838(0.825)	36.789(0.973)	37.188(0.978)
	30	28.876(0.881)	29.509(0.851)	29.769(0.855)	28.150(0.789)	33.284(0.944)	33.893(0.955)
	40	24.827(0.692)	27.900(0.787)	27.917(0.820)	25.971(0.712)	30.109(0.884)	31.038(0.920)
	50	18.712(0.475)	24.305(0.767)	26.367(0.750)	23.184(0.530)	25.566(0.702)	25.623(0.707)
Lin	10	29.190(0.908)	30.761(0.888)	31.004(0.893)	28.339(0.817)	35.554(0.975)	35.815(0.980)
	20	28.605(0.897)	29.512(0.866)	29.538(0.868)	26.722(0.745)	33.034(0.948)	33.044(0.961)
	30	27.217(0.875)	27.803(0.833)	27.926(0.835)	26.184(0.709)	30.836(0.927)	30.583(0.910)
	40	25.425(0.780)	26.108(0.800)	26.152(0.802)	23.714(0.612)	27.990(0.878)	27.226(0.865)
	50	20.945(0.357)	24.684(0.610)	25.111(0.751)	21.248(0.457)	25.486(0.752)	25.510(0.755)
Monarch	10	25.304(0.889)	28.272(0.897)	28.616(0.903)	26.726(0.822)	33.349(0.980)	33.366(0.980)
	20	24.514(0.869)	26.377(0.860)	26.549(0.864)	25.160(0.811)	29.566(0.949)	29.531(0.953)
	30	22.836(0.729)	24.269(0.806)	24.468(0.811)	23.611(0.732)	26.042(0.891)	26.389(0.917)
	40	21.339(0.730)	22.980(0.763)	23.218(0.770)	22.223(0.664)	24.090(0.824)	24.322(0.875)
	50	18.791(0.501)	22.351(0.745)	22.340(0.745)	20.509(0.561)	22.369(0.754)	22.108(0.776)
Pentagon	10	26.784(0.805)	27.130(0.767)	27.408(0.783)	26.021(0.728)	34.232(0.969)	34.757(0.975)
	20	25.839(0.773)	25.510(0.691)	25.661(0.703)	24.292(0.627)	30.437(0.923)	31.201(0.943)
	30	24.149(0.725)	23.965(0.603)	24.175(0.616)	23.164(0.560)	27.990(0.859)	28.926(0.903)
	40	22.344(0.621)	23.035(0.679)	22.957(0.656)	21.947(0.488)	25.327(0.738)	26.132(0.810)
	50	18.583(0.504)	22.344(0.558)	22.566(0.554)	20.535(0.401)	22.753(0.590)	22.768(0.586)
Plants	10	31.829(0.882)	31.809(0.866)	32.058(0.872)	30.466(0.836)	39.231(0.987)	39.344(0.989)
	20	31.085(0.877)	30.664(0.840)	30.883(0.844)	29.055(0.782)	35.373(0.968)	36.092(0.975)
	30	29.241(0.871)	28.894(0.795)	29.113(0.801)	27.733(0.719)	32.862(0.935)	33.347(0.943)
	40	28.185(0.820)	28.169(0.783)	28.023(0.775)	25.915(0.655)	30.415(0.882)	30.904(0.904)
	50	24.635(0.434)	27.834(0.723)	27.780(0.766)	23.609(0.507)	28.374(0.809)	28.358(0.808)
Tank	10	32.215(0.859)	30.749(0.765)	30.914(0.770)	30.047(0.722)	39.777(0.978)	39.799(0.980)
	20	31.674(0.841)	30.122(0.748)	30.231(0.751)	29.490(0.699)	35.896(0.943)	35.920(0.953)
	30	30.054(0.813)	29.566(0.731)	29.640(0.733)	28.567(0.659)	32.682(0.883)	33.212(0.912)
	40	27.574(0.673)	29.122(0.720)	29.188(0.720)	27.289(0.603)	30.555(0.791)	31.937(0.863)
	50	20.841(0.409)	28.837(0.591)	28.838(0.603)	25.865(0.625)	28.911(0.679)	28.949(0.689)

图 2~4 为 10%、30% 与 50% 的椒盐噪声强度下各种方法在图像 Plants、House 和 Monarch 上的去噪结果。图 2~4 中的 (a) 为真实无噪图像, (b) 为不同噪声水平下的观测图像, (c~h) 分别为 PCP^[5]、WNNM-RPCA^[10]、WSNM-RPCA^[14]、WSNM- L_1 ^[15]、DWLP($p=q=1$)^[11] 和 DWLP 模型的去噪图像。

图中红色框部分为绿色框部分的放大视图。通过观察图 2 中红色框部分对植物枝叶的放大视图,可以发现图 2(g)中的 DWLP($p=q=1$)和图 2(h)中的 DWLP 能够清晰地重建图像中植物的枝叶部分,而其他算法均造成了一定程度的失真与模糊。DWLP 和 DWLP($p=q=1$)能够同时提升对模型低秩项与稀疏项的估计,有助于更准确地重构图像的低秩结构。与 DWLP($p=q=1$)相比,DWLP 的去噪图像不仅具有更高的 PSNR 和 SSIM 值,而且保留了更多的细节,对植物枝叶区域的复原情况更接近真值图像。通过观察图 3 中红色框部分对窗口墙体的放大视图,发现仅有 DWLP 的去噪图像能够较为清晰地重建图像中的窗棂结构和砖墙纹理,而其他方法均产生了不同程度的模糊或者噪声残留。通过观察图 4 中红色框部分对翅膀纹理区域的放大视图,可以发现高密度噪声对观测图像中的纹理细节损毁严重,与其他去噪方法相比,本文算法能够更好地保持蝴蝶翅纹的细节。

上述实验结果表明,本文算法不仅具有较高的 PSNR 和 SSIM 值,而且具有更清晰的视觉效果,能

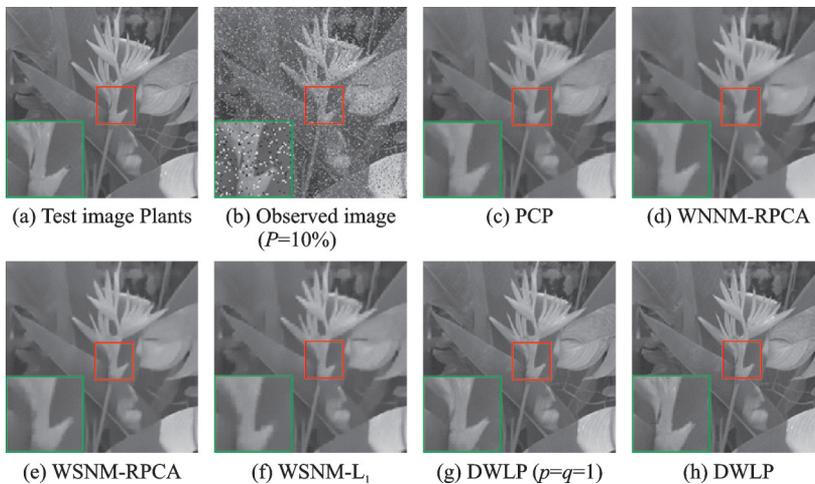


图 2 Plants 图像去噪结果(10% 椒盐噪声)

Fig.2 Denoised results on image Plants (10% salt-and-pepper noise)

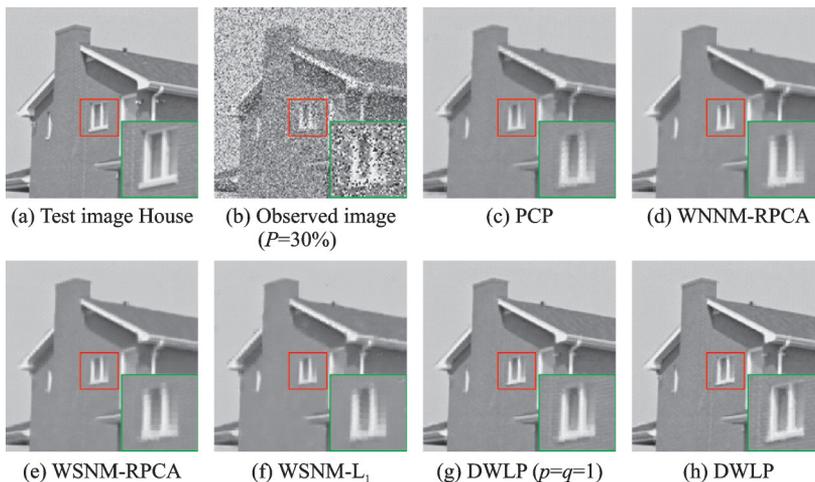


图 3 House 图像去噪结果(30% 椒盐噪声)

Fig.3 Denoised results on image House (30% salt-and-pepper noise)

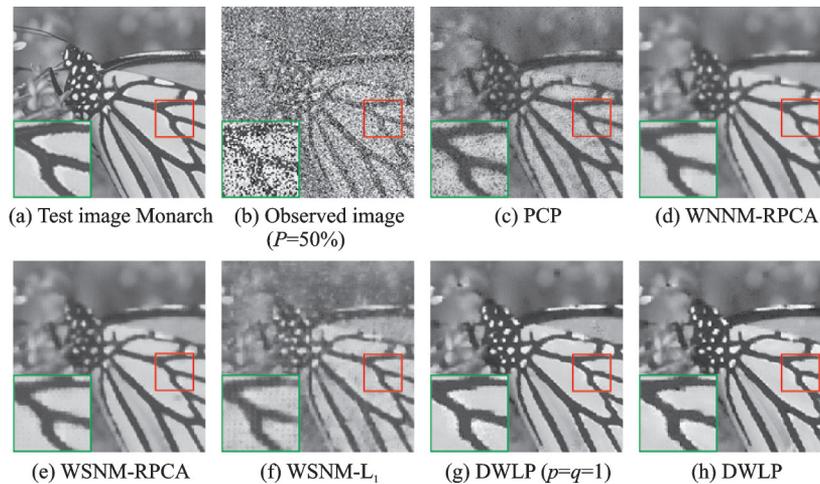


图4 Monarch图像去噪结果(50%椒盐噪声)

Fig.4 Denoised results on image Monarch (50% salt-and-pepper noise)

够有效地保持图像细节,与PCP、WNNM-RPCA、WSNM-RPCA、WSNM- L_1 和DWLP($p=q=1$)算法相比具有更好的去噪性能。

同时,本文模型也具有相对较低的时间复杂度。本文采用了具有闭合解的 p -shrinkage算子估计 L_p 范数最小化问题的闭合解,与采用迭代方式估计数值解的WSNM-RPCA与包含重加权运算的DWLP($p=q=1$)相比,减少了大量的迭代计算。DWLP模型的时间复杂度为 $O(\min\{c^4 K, K^2 c^2\} + 3c^2 K + 1)$,与WNNM-RPCA模型和PCP模型的时间复杂度相同。

3.3 奇异值过收缩分析

采用凸近似方法求解RPCA模型容易导致过收缩问题,影响对相似图像块组奇异值的估计。矩阵奇异值越接近真实值,对低秩图像成分的估计越准确,去噪重建图像的质量越高。本节将通过两组矩阵奇异值分解实验分析RPCA框架下的去噪模型对图像低秩结构的估计情况。

图5(a)和(c)为10%椒盐噪声下的Goldhill图像和30%椒盐噪声下的Barbara图像,利用红色框标记的图像块以及绿色框标记的相似图像块可以组成一个相似图像块组,在两幅观测图像中随机选择10个相似图像块组作为观测数据,每个观测矩阵中包含64个8像素 \times 8像素的相似图像块,分别使用PCP模型^[5]、WNNM-RPCA模型^[10]、WSNM-RPCA^[14]模型、双加权模型(DWLP($p=q=1$))^[11]与DWLP模型估计观测矩阵的奇异值。图5(b)和(d)为不同模型复原结果的奇异值分布情况。其中,PCP模型(绿色线)的结果明显小于矩阵秩的真实情况(红色线),说明PCP模型会过度收缩矩阵的奇异值。WNNM-RPCA模型(蓝色线)一定程度上抑制了对较大奇异值的过度收缩,对秩成分的估计较为准确。而结合 S_p 范数的WSNM-RPCA模型(青色线)的结果则更贴近矩阵秩的真实情况,说明 S_p 范数方法具有更好的近似效果。DWLP($p=q=1$)模型(黄色线)与DWLP模型(品红色线)可以同时处理对低秩成分与稀疏成分的过收缩问题,复原结果明显优于WNNM-RPCA模型。与DWLP($p=q=1$)模型相比,DWLP模型对较小奇异值的估计更接近真实情况,获得了更准确的估计结果。实验结果表明,本文模型与其他模型相比,能够更有效地抑制过收缩问题,准确地估计观测矩阵的奇异值。

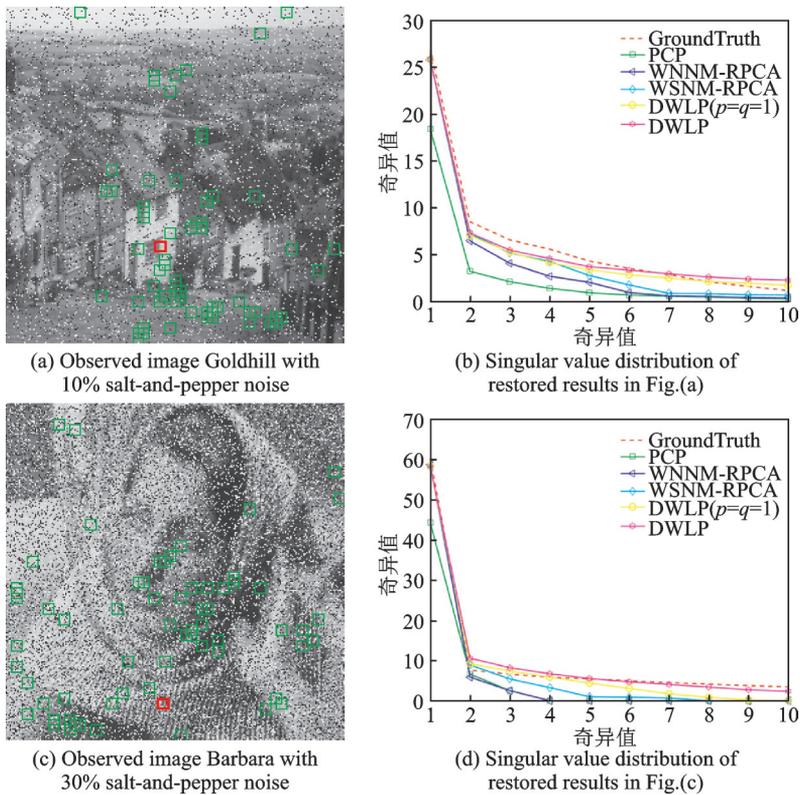


图5 低秩矩阵的奇异值分析

Fig.5 Singular value analysis of low rank matrices

3.4 参数影响的分析

本文算法经验地设置图像块的尺寸为 $8 \text{像素} \times 8 \text{像素}$, 抽取步长为 4 像素, 相似图像块的数量 K 为 64; 而稀疏约束 L_p 范数中的 q 、低秩约束 S_p 范数中的 p 、正则化参数 λ 和 λ_l , 以及 ADMM 算法中的最大迭代次数 K_{\max} 等参数通过参数实验确定。

在稀疏约束 L_p 范数中的 q 与低秩约束 S_p 范数中的 p 的参数实验中, p 和 q 的取值范围均为 $0.1 \sim 1$, 采样间隔为 0.1。图 6(a, b) 分别为椒盐噪声概率 $P = 10\%$ 和 $P = 30\%$ 的情况下, p 和 q 的取值对复原结

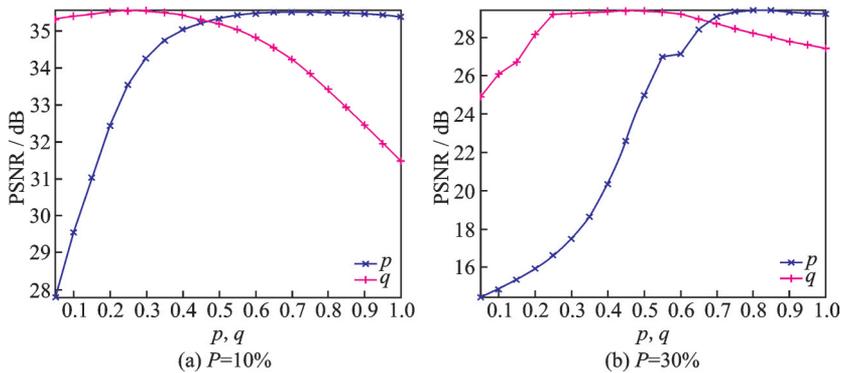


图6 不同椒盐噪声概率下 p 和 q 的取值对复原结果的影响

Fig.6 Influence of different values of p and q on the recovery results under different salt-and-pepper probabilities

果的影响。此外,分析了稀疏和低秩正则化参数 λ_s 和 λ_l 的参数实验,将低秩项的正则化参数 λ_l 设置为0.1,图7(a,b)所示为椒盐噪声概率 $P=10\%$ 和 $P=30\%$ 的情况下 λ_s 的取值对复原结果的影响。表2给出了椒盐噪声概率分别为10%、20%、30%、40%和50%的情况下稀疏约束 L_p 范数中的 q 、低秩约束 S_p 范数中的 p 以及正则化参数 λ_s 的取值。

最大迭代次数 K_{max} 是与算法收敛性相关的参数。由于DWLP是非凸模型,难以从理论上证明算法的全局收敛性。因此,本文通过实验分析迭代次数对复原结果的影响。如图8所示,当迭代次数分别达到5、10、15、20、25、30、35和40时,算法的平均PSNR值为20.84、27.87、31.35、32.67、33.33、33.39、33.40和33.39 dB。通过观察发现,当迭代次数大于30时,PSNR值的增量变得很小,算法趋于收敛。因此,本文取 $K_{max}=30$ 以避免不必要的迭代计算。

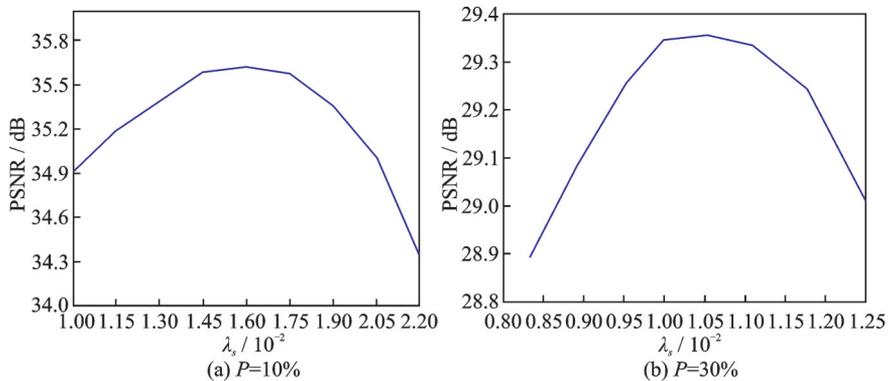


图7 不同椒盐噪声概率下 λ_s 的取值对复原结果的影响

Fig.7 Influence of different values of λ_s on the recovery results under different salt-and-pepper probabilities

表2 不同椒盐噪声概率情况下的参数设置
Table 2 Parameter setting with different salt-and-pepper probabilities

参数	$P/\%$				
	10	20	30	40	50
p	0.651	0.765	0.800	0.905	0.916
q	0.340	0.393	0.419	0.570	0.595
λ_s	0.016	0.013	0.010	0.009	0.007

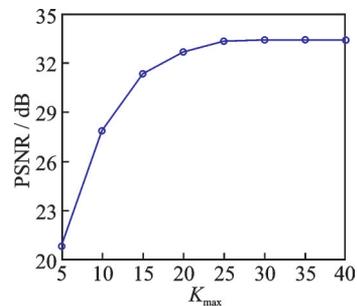


图8 最大迭代次数对复原结果的影响

Fig.8 Influence of the maximum number of iterations

4 结束语

为了抑制 L_1 范数的过收缩问题,结合加权算法与非凸的 L_p 范数,本文提出了双加权 L_p 范数RPCA模型DWLP,在RPCA框架下利用加权 L_p 范数和加权 S_p 范数建模稀疏恢复问题和低秩恢复问题,并采用ADMM算法结合 p -shrinkage算子进行求解。将该模型应用于椒盐噪声的去除实验,结果验证了本文模型的有效性,并通过奇异值过收缩分析说明了该模型的解更接近秩函数最小化问题的解和 L_0 范数最小化问题的解,有效抑制凸近似模型的过收缩问题。

参考文献:

- [1] CANDÉS E J, LI X, MA Y, et al. Robust principal component analysis[J]. *Journal of the ACM*, 2011, 58(3): 11-17.
- [2] WRIGHT J, GANESH A, RAO S, et al. Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization: UILU-ENG-09-2210, DC-243[R]. Canada: Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2009.
- [3] JIN Kyong-Hwan, YE Jong-Chul. Sparse and low-rank decomposition of a Hankel structured matrix for impulse noise removal[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, 99(7): 1448-1461.
- [4] JI H, LIU C, SHEN Z, et al. Robust video denoising using low rank matrix completion[C]//*Proceedings of 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. San Francisco, California, USA: IEEE, 2010: 1791-1798.
- [5] JI H, HUANG S, SHEN Z, et al. Robust video restoration by joint sparse and low rank matrix approximation[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(4): 1122-1142.
- [6] EBADI S E, IZQUIERDO E. Foreground segmentation with tree-structured sparse RPCA[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, 40(9): 2273-2280.
- [7] JIANG B, JIA K B. Research of robust facial expression recognition under facial occlusion condition[C]//*Proceedings of Active Media Technology International Conference*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011: 92-100.
- [8] CANDÉS E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted L_1 minimization[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5/6): 877-905.
- [9] GU S, ZHANG L, ZUO W, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising[C]//*Proceedings of 2014 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Columbus, OH: IEEE, 2014: 2862-2869.
- [10] GU S, XIE Q, MENG D, et al. Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2017, 121(2): 183-208.
- [11] PENG Y, SUO J, DAI Q, et al. Reweighted low-rank matrix recovery and its application in image restoration[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2418-2430.
- [12] ZHANG Z, ZHAO M, LI F, et al. Robust alternating low-rank representation by joint L_p and $L_{2,p}$ -norm minimization[J]. *Neural Networks*, 2017, 96(13): 55-70.
- [13] XIE Y, GU S, LIU Y, et al. Weighted Schatten p -norm minimization for image denoising and background subtraction[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25(10): 4842-4857.
- [14] XIE Y, QU Y, TAO D, et al. Hyperspectral image restoration via iteratively regularized weighted Schatten p -norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, 54(8): 4642-4659.
- [15] CHEN G, WANG J, ZHANG F, et al. Image denoising in impulsive noise via weighted Schatten p -norm regularization[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2019, 28(1): 1-13.
- [16] ZHOU Z, LI X, WRIGHT J, et al. Stable principal component pursuit[C]//*Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*. Austin, Texas, USA: IEEE, 2010: 1518-1522.
- [17] DONOHO D. De-noising by soft threshold[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, 40(3): 613-627.
- [18] CAI J, CANDÉS E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [19] LU C, ZHU C, XU C, et al. Generalized singular value thresholding[C]//*Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Austin, Texas, USA: AAAI, 2015: 1120-1131.
- [20] ZUO W, MENG D, ZHANG L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding[C]//*Proceedings of 2013 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision*. Darling Harbour, Sydney, Australia: IEEE,

2013: 217-224.

- [21] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers foundations[J]. *Trends in Machine Learning*, 2011, 1(3): 1-122.
- [22] CHARTRAND R. Fast algorithms for nonconvex compressive sensing: MRI reconstruction from very few data[C]// *Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. [S.l.]: IEEE, 2009: 1420-1429.
- [23] CHARTRAND R. Nonconvex splitting for regularized low-rank + sparse decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 5810-5819.
- [24] SHI Y Q, ANSARI N, SU W, et al. Reversible data hiding[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems for Video Technology*, 2006, 16(3): 354-362.
- [25] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Transactions Image Processing*, 2004, 13(4): 341-352.

作者简介:



董惠雯(1994-),女,硕士研究生,研究方向:图像处理与模式识别、深度学习算法等, E-mail: donghw.dhw@gmail.com。



禹晶(1979-),女,副教授,硕士生导师,研究方向:图像处理与模式识别等, E-mail: jing.yu@bjut.edu.cn。



郭乐宁(1998-),女,硕士研究生,研究方向:图像处理与模式识别等, E-mail: 2954026841@qq.com。



肖创柏(1962-),**通信作者**,男,教授,博士生导师,研究方向:数字信号处理、音视频信号处理与网络通信等, E-mail: cbxiao@bjut.edu.cn。

(编辑:张黄群)