

## 基于迭代的多频频率估计方法

陈皓<sup>1</sup>, 雷艺<sup>2</sup>

(1. 中国电子科技集团第三十八研究所孔径阵列与空间探测安徽省重点实验室, 合肥, 230031; 2. 合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥, 230009)

**摘要:** 调频连续波(Frequency modulated continuous wave, FMCW)雷达中的频率测量精度直接决定了测距的精度, 但实际应用中频率估计受到负频谱和多目标带来的多频信号的干扰, 误差较大。本文基于常用的单频频率估计方法Orguner算法提出了一种新的多频频率估计方法, 并利用迭代逐步消除负频谱和其他频率带来的干扰。该方法只需要对信号进行离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT), 进而取各频率点附近的3个采样值实现精确的频率估计。仿真结果证明, 本文提出的方法无论在无噪声条件下还是在高斯白噪声条件下均能带来频率估计精度的提升, 且无需加窗处理, 相比传统方法拥有更低的计算复杂度。

**关键词:** 频率估计; 多频率; 离散傅里叶变换; 迭代

**中图分类号:** TN951      **文献标志码:** A

## Frequency Estimation Method for Multi-frequency Estimation Based on Iteration

CHEN Hao<sup>1</sup>, LEI Yi<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Aperture Array and Space Application, No.38 Research Institute of China Electronic Technology Group Corporation, Hefei, 230031, China; 2. School of Computer Science and Information Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, 230009, China)

**Abstract:** Frequency-modulated continuous-wave (FMCW) radars utilize the frequency difference between the transmitted signal and the received echo signal to calculate the target range, so estimating the beat frequency is an important procedure in FMCW radar. However, the interference of negative frequency component and the multi-frequency component deteriorate the accuracy of frequency estimation in practical application. In this paper, a new frequency estimation method is proposed for multi-frequency estimation, which is based on the Orguner method and iteration. The method can accurately estimate frequency only using three discrete Fourier transform (DFT) samples near every frequency component. Simulations confirm that the proposed method outperforms traditional alternatives both in noiseless scenario and Gaussian white noise scenario, and has lower complexity because of no windowing processing.

**Key words:** frequency estimation; multi-frequency; discrete Fourier transform (DFT); iteration

## 引言

调频连续波(Frequency modulated continuous wave, FMCW)雷达是一种常用的雷达,在军民产业中均有广泛的使用。FMCW雷达发射连续调频信号,利用发送和接收的频率之差计算目标的距离。因此,雷达需要对发送与接收信号的差频信号进行频率估计,频率估计的精度直接影响雷达测距的精度。频率估计中最简单有效的方法是利用离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)把信号从时域变换到频域,在频域可以直接得到信号的频率值。但是利用DFT进行频率估计容易带来一些测量误差。误差主要来源于两方面:(1)离散变换的栅栏效应,DFT的结果是频谱的采样值,难以保证频谱峰值正好和待测频率值重合;(2)负频谱泄漏,实数信号的频谱既包含正频谱也包含负频谱,正负频谱叠加后的总频谱最大值与信号的真实频率会出现偏差。

为了解决栅栏效应带来的误差,该领域研究者们已提出很多有效的算法<sup>[1-4]</sup>,其中Candon算法<sup>[5]</sup>和Orguner算法<sup>[6]</sup>是复指数信号频率估计中最经典的算法,只需利用DFT结果的3个采样点即可计算出精确的频率值。但由于没有考虑负频谱干扰,这两种方法在实数信号的频率估计中并不适用。为了抑制负频谱干扰,学者们又提出了加窗算法,其中包括一些常用的加窗算法<sup>[7]</sup>(如Hamming, Hann和Blackman窗)以及基于最大旁瓣衰减(Maximum-sidelobe-decay, MSD)窗的高精度算法。使用MSD窗的算法有经典三点法<sup>[8]</sup>,以及在经典三点法基础上改进而来的新三点法<sup>[9]</sup>。相比经典三点法,改进三点法增加了纠正因子,能够比经典三点法有更好的负频谱抑制效果。同时,Borkowski等基于MSD窗提出的算法<sup>[10]</sup>也能够达到非常高的频率估计精度。实际应用中,FMCW雷达测距时往往不止探测一个目标,当对多个频率同时进行频率估计时,除了单频估计遇到的栅栏效应和负频谱干扰以外,多个频率频谱之间的互相干扰也严重影响频率估计的精度。加窗方法虽然也能对多个频率之间的互相干扰有一定抑制,但无论在频率估计精度还是计算复杂度上都有一定的局限性。本文首先对多频信号的离散频域形式进行了详细推导,得到每个频率对应的最大谱线和其左右两谱线的数学表达式。进而定义了干扰系数,并采取迭代的手段,利用两种不同的方法逐步消除负频谱和其他频率带来的干扰。仿真实验证明,本文提出方法相比传统加窗算法在频率估计精度上有明显提升,而且由于不需要进行加窗处理,也降低了计算复杂度。

## 1 多频频率估计基础理论

假设采集的信号中有 $M$ 个频率分量( $f_1, f_2, \dots, f_M$ ),高斯白噪声下的多频离散时间信号表示为

$$r[n] = \sum_{m=1}^M A_m \cos(2\pi f_m \frac{n}{f_s} + \varphi_m) + w[n] \quad (1)$$

式中: $f_m$ 为信号的频率; $f_s$ 为采样频率; $A_m$ 为第 $m$ 个频率信号的幅度; $\varphi_m$ 为第 $m$ 个频率信号的初始相位。式(1)也可以表示成复数信号相加的形式

$$r[n] = \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{j(2\pi f_m \frac{n}{f_s} + \varphi_m)} + \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{-j(2\pi f_m \frac{n}{f_s} + \varphi_m)} + w[n] \quad (2)$$

进而对式(2)进行 $N$ 点DFT可以得到信号的离散频域表示为

$$\begin{aligned}
 R[k] = & \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{j(2\pi f_m \frac{n}{f_s} + \varphi_m)} + \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{-j(2\pi f_m \frac{n}{f_s} + \varphi_m)} \right] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + W[k] = \\
 & \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{j[\varphi_m + \pi(N-1)(\frac{f_m}{f_s} - \frac{k}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_m}{f_s} - \frac{k}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_m}{f_s} - \frac{k}{N})]} + \\
 & \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} e^{-j[\varphi_m + \pi(N-1)(\frac{f_m}{f_s} + \frac{k}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_m}{f_s} + \frac{k}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_m}{f_s} + \frac{k}{N})]} + W[k]
 \end{aligned} \tag{3}$$

本文通过DFT结果中每个频率附近的3个采样点对多个频率值进行估计。待测频率 $f_m$ 可以表示为 $f_m = f_s \cdot (k_m + \delta_m)/N$ ,其中 $k_m$ 为整数部分, $\delta_m (-0.5 \leq \delta_m < 0.5)$ 为分数部分。 $k_m$ 可以从DFT的结果直接得到,精确频率估计的目的即为估计 $\delta_m$ 的值。首先在DFT结果中的前 $N/2$ 个点里寻找第 $m$ 个频率对应的最大谱线和其左右两谱线。其对应的数学表达式为

$$\begin{aligned}
 R[k_m] = & \frac{A_m}{2} e^{j[\varphi_m + \pi(N-1)\frac{\delta_m}{N}]} \times \frac{\sin(\pi \cdot \delta_m)}{\sin(\frac{\pi \cdot \delta_m}{N})} + \sum_{i=1, i \neq m}^M \frac{A_i}{2} e^{j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m}{N})]} \times \\
 & \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m}{N})]} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{-j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m}{N})]} + W[k_m]
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 R[k_m - 1] = & \frac{A_m}{2} e^{j[\varphi_m + \pi(N-1)(\frac{\delta_m}{N} - \frac{\pi}{N})]} \times \frac{\sin(\pi \cdot \delta_m)}{\sin [\frac{\pi \cdot (\delta_m + 1)}{N}]} + \\
 & \sum_{i=1, i \neq m}^M \frac{A_i}{2} e^{j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m - 1}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m - 1}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m - 1}{N})]} + \\
 & \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{-j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m - 1}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m - 1}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m - 1}{N})]} + W[k_m - 1]
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 R[k_m + 1] = & \frac{A_m}{2} e^{j[\varphi_m + \pi(N-1)(\frac{\delta_m}{N} + \frac{\pi}{N})]} \times \frac{\sin(\pi \cdot \delta_m)}{\sin [\frac{\pi \cdot (\delta_m - 1)}{N}]} + \\
 & \sum_{i=1, i \neq m}^M \frac{A_i}{2} e^{j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m + 1}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m + 1}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} - \frac{k_m + 1}{N})]} + \\
 & \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{-j[\varphi_i + \pi(N-1)(\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m + 1}{N})]} \times \frac{\sin [N \cdot \pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m + 1}{N})]}{\sin [\pi (\frac{f_i}{f_s} + \frac{k_m + 1}{N})]} + W[k_m + 1]
 \end{aligned} \tag{6}$$

为了后续的推导方便,本文把 $R[k_m]$ 、 $R[k_m - 1]$ 、 $R[k_m + 1]$ 表示成理想的无干扰项和干扰项的相加(干扰项包括负频谱干扰和其他频率带来的干扰),于是本文定义 $R[k_m]$ 、 $R[k_m - 1]$ 、 $R[k_m + 1]$ 所对应的理想谱线值为 $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ (即为无负频谱干扰和其他频率频谱干扰时的理想谱线值),并定义:

频率 $i$ 对频率 $m$ 最大谱线的干扰系数为

$$I_{k_m, i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\delta_i + k_i - k_m)}{N}\right)} \times e^{j\frac{\pi}{N}(k_m - k_i)}$$

频率 $i$ 对频率 $m$ 最大谱线左侧谱线的干扰系数为

$$I_{k_m - 1, i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\delta_i + k_i - k_m + 1)}{N}\right)} \times e^{j\frac{\pi}{N}(k_m - k_i - 1)}$$

频率 $i$ 对频率 $m$ 最大谱线右侧谱线的干扰系数为

$$I_{k_m + 1, i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\delta_i + k_i - k_m - 1)}{N}\right)} \times e^{j\frac{\pi}{N}(k_m - k_i + 1)}$$

频率 $i$ 的负频谱对频率 $m$ 最大谱线的干扰系数为

$$I_{k_m, -i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left[\frac{\pi(k_m + k_i + \delta_i)}{N}\right]} \times e^{-j\left[2 \cdot \text{angle}(a_i) - \frac{\pi}{N} \cdot (k_m + k_i)\right]}$$

频率 $i$ 的负频谱对频率 $m$ 最大谱线左侧谱线的干扰系数为

$$I_{k_m - 1, -i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left[\frac{\pi(k_m + k_i - 1 + \delta_i)}{N}\right]} \times e^{-j\left[2 \cdot \text{angle}(a_i) - \frac{\pi}{N} \cdot (k_m + k_i - 1)\right]}$$

频率 $i$ 的负频谱对频率 $m$ 最大谱线右侧谱线的干扰系数为

$$I_{k_m + 1, -i} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\delta_i}{N}\right)}{\sin\left[\frac{\pi(k_m + k_i + 1 + \delta_i)}{N}\right]} \times e^{-j\left[2 \cdot \text{angle}(a_i) - \frac{\pi}{N} \cdot (k_m + k_i + 1)\right]}$$

定义了上述参量以后,式(4—6)即可表示为

$$R[k_m] = a_m + \sum_{i=1, i \neq m}^M a_i \times I_{k_m, i} + \sum_{i=1}^M a_i \times I_{k_m, -i} + W[k_m] \quad (7)$$

$$R[k_m - 1] = b_m + \sum_{i=1, i \neq m}^M a_i \times I_{k_m - 1, i} + \sum_{i=1}^M a_i \times I_{k_m - 1, -i} + W[k_m - 1] \quad (8)$$

$$R[k_m + 1] = c_m + \sum_{i=1, i \neq m}^M a_i \times I_{k_m + 1, i} + \sum_{i=1}^M a_i \times I_{k_m + 1, -i} + W[k_m + 1] \quad (9)$$

## 2 基于迭代的多频频率估计算法

本文目的是根据已知的 $R[k_m]$ 、 $R[k_m - 1]$ 、 $R[k_m + 1]$ 求得 $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ ,进而利用Orguner算法进行精确的频率估计。Orguner算法在无噪声无负频率干扰时对单频信号进行无偏估计,是对复指数信号进行频率估计的最佳算法之一,其计算公式为<sup>[6]</sup>

$$\delta_m = \frac{N}{\pi} \arctan \left( \tan \left( \frac{N}{\pi} \right) \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_m e^{-j(\pi/N)} - b_m e^{j(\pi/N)}}{c_m e^{-j(\pi/N)} + b_m e^{j(\pi/N)} - \frac{2a_m}{\cos \left( \frac{N}{\pi} \right)}} \right\} \right) \quad (10)$$

由式(7—9)可以看出,干扰系数是与频率估计结果相关的值,方程没有解析解。因此,为了得到  $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$  的值,本文提出了迭代的方法。通过数次迭代得到  $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$  的近似值后,再利用 Orguner 算法进行精确的频率估计。

迭代法在一些单频频率估计方法中也有应用<sup>[11-13]</sup>。在这些方法中,迭代目的都是为了尽可能多地去除负频谱带来的干扰,因为负频谱的干扰越小,频率估计就越精确。但是这些方法都只关心单频情形下负频谱的干扰,对于多频情形并没有考虑,而实际 FMCW 雷达应用中,多目标即多频的情况更为普遍,而频率之间的干扰也比负频谱的干扰更大。因此本文迭代的思路为:首先假设没有负频谱和其他频率的干扰,得到初步的频率估计值,进而根据初步的频率估计值计算出负频率和其他频率的干扰值并进行剔除,从而得到更精确的频率估计值。这样循环迭代下去,频率估计的结果也会逐渐收敛到一个相对较为精确的值。在每个循环中进行干扰剔除时,为了求得第  $q$  次迭代的  $\hat{a}_m^q, \hat{b}_m^q, \hat{c}_m^q$  值,本文又提出了两种不同的计算方法:(1)利用上一次迭代中的  $\hat{a}_m^{q-1}, \hat{b}_m^{q-1}, \hat{c}_m^{q-1}$  值和由  $\hat{\delta}_m^{q-1}$  计算出的干扰系数;(2)只利用由  $\hat{\delta}_m^{q-1}$  计算出的干扰系数,不用上一次迭代中的  $\hat{a}_m^{q-1}, \hat{b}_m^{q-1}, \hat{c}_m^{q-1}$  值。具体的详细步骤如表 1 和表 2 所示。

表 1 多频频率估计算法 1 步骤

Table 1 Procedure of Algorithm 1

序号	步骤
1	做 $N$ 点 DFT, 从前 $N/2$ 个点中找到第 $m$ 个频率对应的最大谱线和其左右两谱线: $R[k_m], R[k_m - 1]$ 和 $R[k_m + 1]$ ( $m=1, 2, \dots, M$ ) 令 $\hat{a}_m^0 = R[k_m], \hat{b}_m^0 = R[k_m - 1], \hat{c}_m^0 = R[k_m + 1]$ 使用 Orguner 算法 <sup>[6]</sup> 计算 $\hat{\delta}_m^0$ 为
2	$\hat{\delta}_m^0 = \frac{N}{\pi} \arctan \left( \tan \left( \frac{N}{\pi} \right) \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\hat{c}_m^0 e^{-j(\pi/N)k} - \hat{b}_m^0 e^{j(\pi/N)k}}{\hat{c}_m^0 e^{-j(\pi/N)k} + \hat{b}_m^0 e^{j(\pi/N)k} - \frac{2\hat{a}_m^0}{\cos \left( \frac{N}{\pi} k \right)}} \right\} \right)$
	迭代 $q=1$ to $Q$ 计算干扰因子,根据干扰因子和 $\hat{a}_m^{q-1}, \hat{b}_m^{q-1}, \hat{c}_m^{q-1}$ 更新 $\hat{a}_m^q, \hat{b}_m^q, \hat{c}_m^q$ , 即 $\hat{a}_m^q = R[k_m] - \sum_{i=1, i \neq m}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m, i}^{q-1} - \sum_{i=1}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m, -i}^{q-1}$
3	$\hat{b}_m^q = R[k_m - 1] - \sum_{i=1, i \neq m}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m - 1, i}^{q-1} - \sum_{i=1}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m - 1, -i}^{q-1}$ $\hat{c}_m^q = R[k_m + 1] - \sum_{i=1, i \neq m}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m + 1, i}^{q-1} - \sum_{i=1}^M \hat{a}_i^{q-1} \times \hat{I}_{k_m + 1, -i}^{q-1}$ 把更新的 $\hat{a}_m^q, \hat{b}_m^q, \hat{c}_m^q$ 代入 Orguner 算法计算 $\hat{\delta}_m^q$ 循环迭代直到 $q=Q$
4	得到最终的频率估计值 $\hat{f}_m = (k_m + \hat{\delta}_m^Q) \cdot f_s / N$

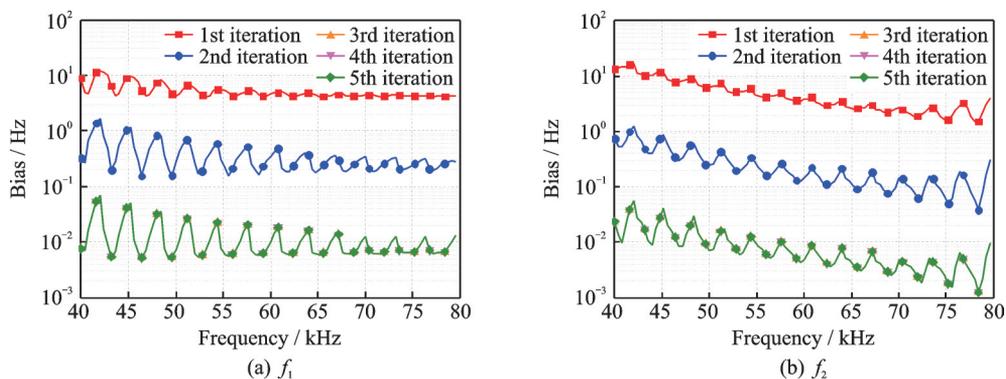
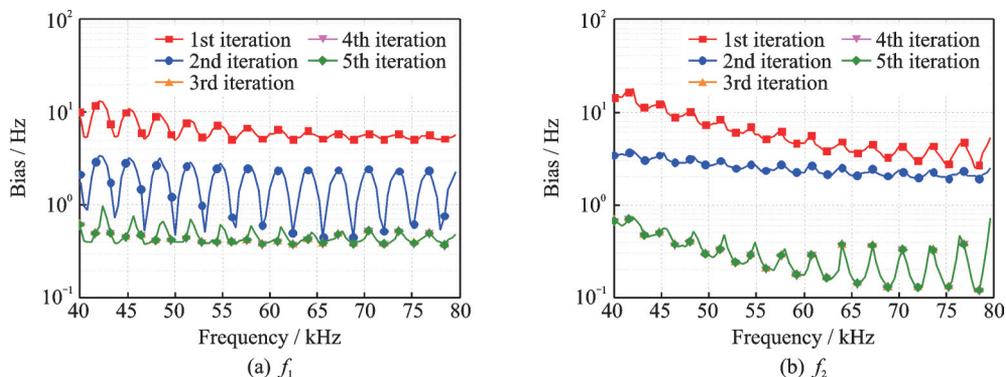
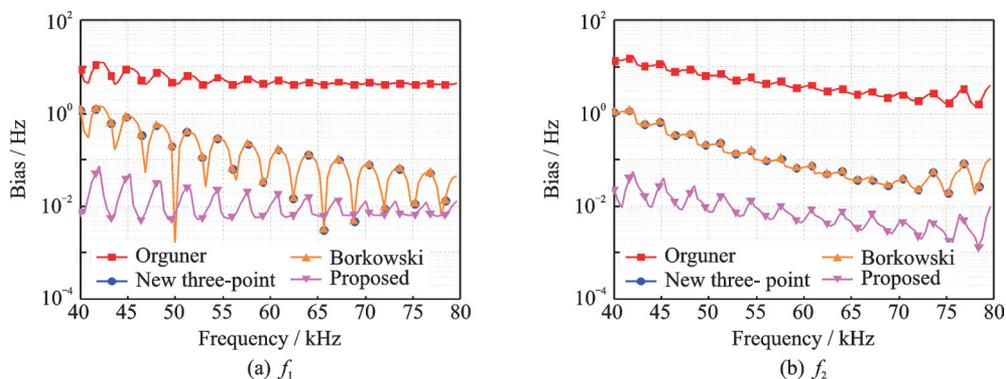
表 2 多频频率估计算法 2 步骤  
Table 2 Procedure of Algorithm 2

序号	步骤
1	做 $N$ 点 DFT, 从前 $N/2$ 个点中找到第 $m$ 个频率对应的最大谱线和其左右两谱线: $R[k_m], R[k_m - 1]$ 和 $R[k_m + 1]$ ( $m=1, 2, \dots, M$ )
	令 $\hat{a}_m^0 = R[k_m], \hat{b}_m^0 = R[k_m - 1], \hat{c}_m^0 = R[k_m + 1]$ 使用 Orguner 算法 <sup>[6]</sup> 计算 $\hat{\delta}_m^0$ 为
2	$\hat{\delta}_m^0 = \frac{N}{\pi} \arctan \left( \tan \left( \frac{N}{\pi} \right) \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\hat{c}_m^0 e^{-j(\pi/N)k} - \hat{b}_m^0 e^{j(\pi/N)k}}{\hat{c}_m^0 e^{-j(\pi/N)k} + \hat{b}_m^0 e^{j(\pi/N)k} - \frac{2\hat{a}_m^0}{\cos(\frac{N}{\pi}k)}} \right\} \right)$
	迭代 $q=1$ to $Q$ 计算干扰因子, 根据干扰因子更新 $\hat{a}_m^q, \hat{b}_m^q, \hat{c}_m^q$ , 即
3	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1^q \\ \hat{b}_1^q \\ \hat{c}_1^q \\ \vdots \\ \hat{a}_m^q \\ \hat{b}_m^q \\ \hat{c}_m^q \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \hat{I}_{k_1, -i}^{q-1}, 0, 0, \dots, \hat{I}_{k_1, m}^{q-1} + \hat{I}_{k_1, -m}^{q-1}, 0, 0, \dots \\ \hat{I}_{k_1 - 1, -i}^{q-1}, 1, 0, \dots, \hat{I}_{k_1 - 1, m}^{q-1} + \hat{I}_{k_1 - 1, -m}^{q-1}, 0, 0, \dots \\ \hat{I}_{k_1 + 1, -i}^{q-1}, 0, 1, \dots, \hat{I}_{k_1 + 1, m}^{q-1} + \hat{I}_{k_1 + 1, -m}^{q-1}, 0, 0, \dots \\ \vdots \\ \hat{I}_{k_m, 1}^{q-1} + \hat{I}_{k_m, -1}^{q-1}, 0, 0, \dots, 1 + \hat{I}_{k_m, -m}^{q-1}, 0, 0, \dots \\ \hat{I}_{k_m - 1, 1}^{q-1} + \hat{I}_{k_m - 1, -1}^{q-1}, 0, 0, \dots, \hat{I}_{k_m - 1, -m}^{q-1}, 1, 0, \dots \\ \hat{I}_{k_m + 1, 1}^{q-1} + \hat{I}_{k_m + 1, -1}^{q-1}, 0, 0, \dots, \hat{I}_{k_m + 1, -m}^{q-1}, 0, 1, \dots \\ \vdots \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R[k_1] \\ R[k_1 - 1] \\ R[k_1 + 1] \\ \vdots \\ R[k_m] \\ R[k_m - 1] \\ R[k_m + 1] \\ \vdots \end{bmatrix}$
	把更新的 $\hat{a}_m^q, \hat{b}_m^q, \hat{c}_m^q$ 代入 Orguner 算法计算 $\hat{\delta}_m^q$ 循环迭代直到 $q=Q$
4	得到最终的频率估计值 $\hat{f}_m = (k_m + \hat{\delta}_m^Q) \cdot f_s / N$

### 3 仿真结果与分析

本文研究了两种多频迭代算法的收敛速度。仿真模拟了无噪声情况下同时对 2 个频率进行频率估计的场景, 其中 1 个频率固定为  $f_1=20$  kHz, 另一个频率  $f_2$  的变化范围为 40~80 kHz。仿真中用两个不同频率的正弦波模拟两个频率的信号, 采样速率设置为 200 kHz, 采样点数  $N$  为 64。仿真共进行 5 次迭代, 实验中记录每一次迭代后的结果。图 1, 2 为算法 1 和算法 2 对 2 个频率 ( $f_1$  和  $f_2$ ) 进行频率估计的结果。从图中可以看出, 算法 1 和算法 2 均在 3 次迭代后达到稳定状态, 因此基于计算复杂度考虑, 后续仿真均使用 3 次迭代。另外, 比较图 1 和 2 可以看出, 算法 1 相比算法 2 的最终收敛误差更小, 因此后文与其他算法比较时均使用效果更好的算法 1。

图 3 仿真比较了本文提出多频频率估计算法和 Orguner 算法<sup>[6]</sup>、Borkowski 算法<sup>[10]</sup>、新三点法<sup>[9]</sup>在无噪声情况下的测量误差。Orguner 算法是用于复指数频谱估计的最精确的方法之一; 新三点法是 Belega 等人在 MSD 窗经典三点法基础上提出来的, 专门用于负频谱的干扰抑制; Borkowski 算法是电力系统频率估计中提出的一种性能较好的方法。仿真模拟了无噪声情况下同时对 2 个频率进行频率估计的

图1 算法1中测量误差随频率 $f_2$ 变化情况( $N=64$ )Fig.1 Frequency estimation error versus the frequency of  $f_2$  for different numbers of iteration by Algorithm 1 ( $N=64$ )图2 算法2中测量误差随频率 $f_2$ 变化情况( $N=64$ )Fig.2 Frequency estimation error versus the frequency of  $f_2$  for different numbers of iteration for Algorithm 2 ( $N=64$ )图3 无噪声时使用不同算法测量误差随频率 $f_2$ 变化情况( $N=64$ )Fig.3 Frequency estimation error versus the frequency of  $f_2$  for different algorithms without noise ( $N=64$ )

场景,其中一个频率固定为 $f_1=20$  kHz,另一个频率 $f_2$ 的变化范围为40~80 kHz。仿真中用2个不同频率的正弦波模拟2个频率的信号,采样速率设置为200 kHz,采样点数 $N$ 为64。从图中可以看出,相比上述几种算法,本文提出的算法有更高的测量精度。

本文接下来研究了在有噪声情况下各方法频率估计的结果(假设噪声为高斯白噪声)。仿真模拟

了40 dB信噪比下同时对2个频率进行频率估计的场景,其中一个频率固定为 $f_1=20$  kHz,另一个频率 $f_2$ 的变化范围为40~80 kHz。仿真中用2个不同频率的正弦波模拟2个频率的信号,噪声为高斯白噪声,采样速率设置为200 kHz,采样点数 $N$ 为64。图4比较了各算法的均方根误差(Root mean square error, RMSE)。从图中可以看出,本文提出算法在有噪声情况下相比其他算法依然有优势。这是因为本文方法没有使用窗函数,避免了窗函数引起的信噪比损失<sup>[14]</sup>,而且本文方法不需要进行加窗处理,因此也减轻了计算复杂度的负担。

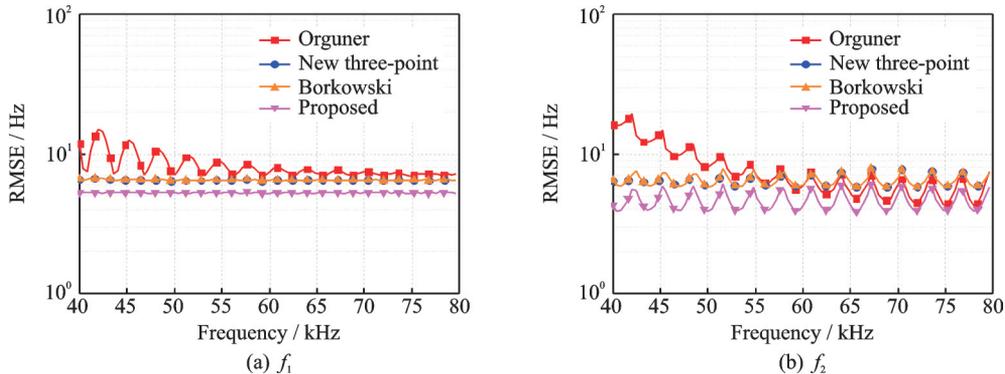


图4 信噪比40 dB时测量误差RMSE随频率 $f_2$ 变换情况( $N=64$ )

Fig.4 RMSE versus the frequency of  $f_2$  for different algorithms with SNR=40 dB ( $N=64$ )

本文算法在精度上有提升主要有两个原因。(1)该算法充分考虑了频率估计误差的来源(负频率干扰和其他频率干扰),并通过详细的数学推导得到干扰项的数学表达式,进而通过迭代的方法进行干扰的剔除。相比之下,传统的加窗算法只是通过窗函数尽量抑制频谱的副瓣,干扰的抑制效果不如本文算法。(2)窗函数会带来信噪比的损失,本文算法没有用到窗函数,也因此避免了信噪比损失带来的精度下降。本文算法在计算效率方面有提升主要体现在少了与窗函数相乘这一环节,减少了计算量。代价是迭代的次数如果太多,也会增加计算量。但是本文证明,算法经过3次迭代即可收敛,迭代增加的计算量很小,因此总体来说本文算法在计算效率方面有所提升。

#### 4 结束语

针对FMCW雷达测距中遇到的多频频率估计问题,本文在Orguner算法的基础上利用迭代的手段,逐步消除负频谱和其他频率带来的干扰,最终实现了较为精确的频率估计。本文设计了2种迭代方法并通过比较选择了效果更佳的方法,该方法与传统频率估计方法相比,无论在估计精度上还是计算复杂度上都有明显优势。

#### 参考文献:

- [1] TREES H L V. Detection, estimation and modulation theory, Part 1[M]. New York: Wiley, 1971.
- [2] QUINN B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(5): 1264-1268.
- [3] MACLEOD M D. Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(1): 141-148.
- [4] JACOBSEN E, KOOTSOOKOS P. Fast, accurate frequency estimators[J]. IEEE Signal Process Mag, 2007, 24: 123-125.
- [5] CANDAN C. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. IEEE Signal Process Lett, 2011, 18(6): 351-354.

- [6] ORGUNER U, CANDAN C. A fine-resolution frequency estimator using an arbitrary number of DFT coefficients[J]. *Signal Processing*, 2014, 105: 17-21.
- [7] CANDAN C. Fine resolution frequency estimation from three DFT samples: Case of windowed data[J]. *Signal Processing*, 2015, 114(6): 245-250.
- [8] BELEGA D, DALLET D, PETRI D. Accuracy of sine-wave frequency estimation by multipoint interpolated DFT approach [J]. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2010, 59(11): 2808-2815.
- [9] BELEGA D, PETRI D, DALLET D. Frequency estimation of a sinusoidal signal via a three-point interpolated DFT method with high image component interference rejection capability[J]. *Digital Signal Process*, 2014, 24: 162-169.
- [10] BORKOWSKI J, KANIA D, MROZKA J. Interpolated-DFT-based fast and accurate frequency estimation for the control of power[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(12): 7026-7034.
- [11] ABOUTANIOUS E, MULGREW B. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(4): 1237-1242.
- [12] BELEGA D, PETRI D, DALLET D. Iterative sine-wave frequency estimation by generalized Fourier interpolation algorithms [C]//*Proceedings of International Symposium on Electronics & Telecommunications*. [S.l.]: IEEE, 2015. DOI: 10.1109/ISETC.2014.7010759.
- [13] DIAO R, MENG Q. Frequency estimation by iterative interpolation based on leakage compensation[J]. *Measurement*, 2015, 59: 44-50.
- [14] PORAT B. *A course in digital signal processing*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.

**作者简介:**

陈皓(1989-),男,博士,研究方向:雷达系统设计,E-mail: ch89118@sina.com。



雷艺(1990-),女,博士,研究方向:光纤通信、MI-MO、信道编码,E-mail: leiyi@hfut.edu.cn。

(编辑:张黄群)