

勾股模糊H平均决策算法及应用

杨颖, 李冬睿, 黄晓峰

(广东农工商职业技术学院计算机学院, 广州, 510507)

摘要: 研究了勾股模糊数信息环境下属性值间存在内在关联性的多属性决策问题。首先定义了基于t-模和t-余模的勾股模糊数运算;将Heronian平均融入到聚合算子的构建过程中;讨论了勾股模糊Heronian平均算法的3个特征性质和经常使用的特例。然后构建了改进的勾股模糊决策模型,该模型在考虑输入属性值之间关联性的同时,提高了决策的使用范围。最后通过多属性决策实例验证了改进的决策模型合理有效。

关键词: 勾股模糊集;Heronian平均;信息融合算法;多属性决策模型

中图分类号: TP181 **文献标志码:** A

Pythagorean Fuzzy Heronian Mean Decision Algorithms and Applications

YANG Ying, LI Dongrui, HUANG Xiaofeng

(School of Computer Science, Guangdong AIB Polytechnic College, Guangzhou, 510507, China)

Abstract: The multi-attribute decision making problem in the relationship between attribute values under Pythagorean fuzzy number information environment is researched. Firstly, the Pythagorean fuzzy number operations based on t-norm and t-conorm are defined. Then, the Heronian mean is integrated into the construction process of aggregation operator. The three characteristic properties of Pythagorean fuzzy Heronian mean (PFHM) and its commonly used special cases are also discussed. In addition, a new improved Pythagorean fuzzy decision making model is constructed, which considers the relationship between input attribute values and improves the scope of decision-making. Finally, an example of multi-attribute decision making is provided to verify the rationality and effectiveness of the proposed model.

Key words: Pythagorean fuzzy set; Heronian mean; information aggregation algorithm; multi-attribute decision making model

引言

多属性决策问题的本质是在相关评价指标下对已有的待评价方案进行评价分析,并借助于相关理论工具筛选出综合评价最好的方案,因此在工程、经济、管理及计算机等许多领域都具有重要意义^[1-3]。传统方法中人们对备选方案(对象)的评价信息都是以精确的数字形式呈现。然而在现实生活中,人类所面临的信息不仅仅是精确数值,更多的是不精确性和不确定性的数据信息。因此,有必要研究这类

基金项目: 广东省教育厅重点平台及科研项目青年创新人才类(自然科学)(2017GkQNCX041)资助项目;广东省教育厅高职教育质量工程立项建设资助项目;广东农工商职业技术学院科研课题(xyyb1412)资助项目。

收稿日期: 2019-12-31; **修订日期:** 2020-02-24

含有不确定信息的多属性决策问题。对于此,Zadeh提出的模糊集^[4]有效地解决了多属性决策中的不确定性问题。针对模糊集的一个广义情况,Atanassov引入了直觉模糊集^[5]的概念,该集合中的单位元以隶属度和非隶属度为基础描述不确定性特征。在这种情况下,直觉模糊集可以为决策者提供较为便捷的方法来处理复杂的决策问题。作为直觉模糊集的推广,勾股模糊集^[6]继承了直觉模糊集的二元性,即同时具有隶属度和非隶属度两个特征,因此在实际的多属性决策问题中比直觉模糊集更具有测量不确定性的灵活性,同时能够囊括更多的不确定信息。勾股模糊集中的单位元称为勾股模糊数,其满足隶属度和非隶属度的平方和等于或小于1的条件。

自从勾股模糊集被提出之后得到了深入研究^[7-9]。Dick等^[10]研究了勾股模糊集的格理论性质,并将其推广到复平面的单位圆盘上。运用爱因斯坦运算法则,Garg^[11]讨论了一种新的广义勾股模糊信息集结算子,然后将这些算子应用于勾股模糊信息下的多属性决策问题中,以显示新方法的有效性、实用性和有效性。Zhang^[12]提出了一种基于相似测度的处理勾股模糊多准则群决策问题的新方法,并讨论了两种新的聚合算子。针对多重多准则勾股模糊决策问题,Zhang^[13]还设计了一种基于勾股模糊定性的贴进度指数方法。Peng等^[14]开发了勾股模糊数的除法和减法运算,提出了勾股模糊优缺点排序方法来解决勾股模糊信息的多准则决策问题。Wei等^[15]利用幂聚合算子构建了一系列的勾股模糊幂聚合算子,其中包括勾股模糊幂平均算子、勾股模糊幂几何算子、勾股模糊幂加权平均算子、勾股模糊幂加权几何算子、勾股模糊幂有序加权平均算子、勾股模糊幂序加权几何算子、勾股模糊幂混合平均算子和勾股模糊幂混合几何算子。丁恒等^[16]构建了勾股模糊幂加权平均算子的群决策方法,提高了专家权威和评估信息的可信度。刘卫峰等^[17]将定义的勾股模糊 Hamacher 运算用于信息融合算法的设计过程中,提出了勾股模糊 Hamacher 加权平均算子、勾股模糊 Hamacher 有序加权平均算子、勾股模糊 Hamacher 加权几何算子以及勾股模糊 Hamacher 有序加权几何算子,并通过资金投资实例进行了验证。

对于现有文献中提出的勾股模糊信息的聚合算子,大多模型方法认为其属性值是独立的,没有考虑它们之间的内在关联性,这就造成这些聚合算子存在一定的局限性。因此,本文将 Heronian 平均^[18]运用于勾股模糊数聚合算子的设计过程中,同时把 t-模和 t-余模也融入算子中,建立了勾股模糊 Heronian 平均(Pythagorean fuzzy Heronian mean, PFHM),最后通过多媒体图像系统选择案例验证了本文算法的正确性与有效性。

1 理论基础

定义 1^[18] 令 $a_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n), p, q > 0$, 称下面的多元函数

$$HM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} a_i^p a_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (1)$$

为 a_1, a_2, \dots, a_n 的 Heronian 平均。事实上, Heronian 平均不仅可以对这组非负数 a_1, a_2, \dots, a_n 进行集成运算,而且能够有效地挖掘它们之间的内在联系。

考虑一个多属性问题,假设 $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 为一组备选方案集,属性指标集表示为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 。决策过程中,专家以这组属性指标为评判标准,对备选方案集 $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 进行评定,并提供相关的属性值评价信息。为了进一步提高对不确定性信息的刻画能力和信息表达的全面性,本文将运用勾股模糊集中的勾股模糊数进行评价信息的表达,其实质上是现有直觉模糊集的拓展。

定义 2^[6] 定义在备选方案集 $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 上的勾股模糊集可以表示为 $A = \{(Z_i, \mu_A(Z_i), \nu_A(Z_i)) | Z_i \in Z\}$, 其中 $\mu_A(Z_i), \nu_A(Z_i)$ 为两个非负数,分别代表 Z_i 属于集合 A 的隶属度和非隶属度,并且满足 $0 \leq \mu_A^2(Z_i) + \nu_A^2(Z_i) \leq 1$ 。

为了便于下文叙述,文献[19]称 $(\mu_A(Z_i), \nu_A(Z_i))$ 为勾股模糊数,记为 $\alpha = (\mu, \nu) = (\mu_p(x), \nu_p(x))$ 。

定义3^[6] 令 $\alpha_i = (\mu_i, \nu_i)$ 为两个勾股模糊数,定义它们的序关系方法如下:

(1)当 $\rho(\alpha_1) > \rho(\alpha_2)$ 时,则 $\alpha_1 > \alpha_2$;

(2)当 $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2)$ 时,如果 $\pi(\alpha_1) > \pi(\alpha_2)$,则 $\alpha_1 = \alpha_2$;如果 $\pi(\alpha_1) = \pi(\alpha_2)$,则 $\alpha_1 > \alpha_2$ 。这里 $\rho(\alpha_i) = \mu_i^2 - \nu_i^2$ 代表 α_i 的得分度, $\pi(\alpha_i) = \mu_i^2 + \nu_i^2$ 代表 α_i 的精确度。

如果二元函数 $T(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 满足有界性、单调性、对称性以及结合律这4个条件,则称 $T(x, y)$ 为t-模。如果 $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$,那么称 $S(x, y)$ 为t-余模。同时,t-模和t-余模分别可以运用减函数 $g(t)$ 和增函数 $h(t)$ 表示为 $T(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$, $S(x, y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$,这里 $h(t) = g(1 - t)$ ^[20]。下面运用函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 定义新的勾股数运算。

定义4 令 $\alpha = (\mu, \nu), \alpha_1 = (\mu_1, \nu_1), \alpha_2 = (\mu_2, \nu_2)$ 为3个勾股模糊数,定义新的基本运算法则:

$$(1) \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \left(\sqrt{h^{-1}(h(\mu_1^2) + h(\mu_2^2))}, \sqrt{g^{-1}(g(\nu_1^2) + g(\nu_2^2))} \right);$$

$$(2) \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left(\sqrt{g^{-1}(g(\mu_1^2) + g(\mu_2^2))}, \sqrt{h^{-1}(h(\nu_1^2) + h(\nu_2^2))} \right);$$

$$(3) \lambda \alpha = \left(\sqrt{h^{-1}(\lambda h(\mu^2))}, \sqrt{g^{-1}(\lambda g(\nu^2))} \right), \lambda > 0;$$

$$(4) \alpha^\lambda = \left(\sqrt{g^{-1}(\lambda g(\mu^2))}, \sqrt{h^{-1}(\lambda h(\nu^2))} \right), \lambda > 0.$$

容易证明,定义4中的基本运算法则满足交换律、分配律和结合律。

2 PFHM及其相关性质

2.1 PFHM集成形式

定义5 对于一系列勾股模糊数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$,参数 $p, q > 0$,如果

$$\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i \leq j} (\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (2)$$

那么多元函数 $\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 称为勾股模糊Heronian平均。

定理1 对于一系列勾股模糊数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$,参数 $p, q > 0$,那么通过式(2)计算得到的结果还是勾股模糊数,同时其计算展开式如下

$$\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i \leq j} (\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (3)$$

证明 本文先运用定义4中的四则基本运算来证明式(3)的表达式正确。因为

$$\alpha_i^p = \left(\sqrt{g^{-1}(pg(\mu_i^2))}, \sqrt{h^{-1}(ph(\nu_i^2))} \right)$$

$$\alpha_j^q = \left(\sqrt{g^{-1}(qg(\mu_j^2))}, \sqrt{h^{-1}(qh(\nu_j^2))} \right)$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha_i^p \otimes \alpha_j^q &= \left(\sqrt{g^{-1}(g(g^{-1}(pg(\mu_i^2))) + g(g^{-1}(qg(\mu_j^2))))}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{h^{-1}(h(h^{-1}(ph(\nu_i^2))) + h(h^{-1}(qh(\nu_j^2))))} \right) = \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2))}, \sqrt{h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2))}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i \leq j} (\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) = \\ & \left(\sqrt{g^{-1}\left(\frac{1}{p+q} g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right)\right)\right)}, \right. \\ & \left. \sqrt{h^{-1}\left(\frac{1}{p+q} h\left(g^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \leq j} g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\right)\right)\right)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

下面证明通过式(2)计算得到的结果还是勾股模糊数。已知 $g(t)$ 和 $h(t)$ 有以下性质和关系： $g(t)$ 和 $g^{-1}(t)$ 都为减函数， $h(t)$ 和 $h^{-1}(t)$ 都为增函数，同时满足 $h(t)=g(1-t)$ ， $h^{-1}(t)=1-g^{-1}(t)$ 。由于函数 $g(t)$ ， $g^{-1}(t)$ ， $h(t)$ 和 $h^{-1}(t)$ 的定义域和值域全部都在非负实数域里面，因此容易得到

$$\sqrt{g^{-1}\left(\frac{1}{p+q} g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right)\right)\right)} \geq 0 \quad (5)$$

$$\sqrt{h^{-1}\left(\frac{1}{p+q} h\left(g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\right)\right)\right)} \geq 0 \quad (6)$$

接下来证明式(5)和(6)的平方和不超过1。因为对所有的 $i=1, 2, \dots, n$ ，有 $\mu_i^2 + \nu_i^2 \leq 1$ ，所以 $\mu_i^2 \leq 1 - \nu_i^2$ ，于是有下面不等式成立

$$ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)=pg(1-\nu_i^2)+qg(1-\nu_j^2)\leq pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)$$

所以

$$h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2))\leq h^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2))=1-g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2))$$

则有

$$g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\geq g(1-g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))=h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))$$

从而可得如下不等式成立

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2))) \geq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2))) \quad (7)$$

对式(7)作用减函数 $g^{-1}(t)$ ，可得到

$$\begin{aligned} & g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\right) \leq \\ & g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right) = \\ & 1 - h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right) \end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned}
 & h^{-1}\left(\frac{1}{p+q}h\left(g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\right)\right)\right)\leq \\
 & h^{-1}\left(\frac{1}{p+q}g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right)\right)\right)= \\
 & 1-g^{-1}\left(\frac{1}{p+q}g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{g^{-1}\left(\frac{1}{p+q}g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2)))\right)\right)\right)}\right)^2 + \\
 & \left(\sqrt{h^{-1}\left(\frac{1}{p+q}h\left(g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}g(h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)))\right)\right)\right)}\right)^2 \leq 1
 \end{aligned}$$

结合式(5)和(6)可以看出通过式(2)计算得到的结果还是勾股模糊数。综上,定理1得证。

2.2 PFHM 性质特征

定理 2 假设 $\alpha_i=(\mu_i,\nu_i),\beta_i=(\phi_i,\varphi_i)(i=1,2,\dots,n)$ 是两列勾股模糊数,那么 PFHM 满足以下性质。

(1) 单调性。如果 $\mu_i \leq \phi_i, \nu_i \geq \varphi_i, i=1,2,\dots,n$, 则有

$$PFHM(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\leq PFHM(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) \tag{8}$$

(2) 幂等性。若 $\alpha_i=\alpha, i=1,2,\dots,n$, 那么有

$$PFHM(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\alpha \tag{9}$$

(3) 有界性。令 $\chi=(\min_i\mu_i, \max_i\nu_i), \gamma=(\max_i\mu_i, \min_i\nu_i)$, 则有

$$\chi \leq PFHM(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \leq \gamma \tag{10}$$

证明 由于幂等性和有界性很容易可得,因此在这里只证明单调性成立。令 $PFHM(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(\mu,\nu), PFHM(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\phi,\varphi)$ 。

由于 $\mu_i \leq \phi_i, \nu_i \geq \varphi_i, i=1,2,\dots,n$, 因此有

$$\begin{aligned}
 pg(\mu_i^2)+qg(\nu_j^2) & \geq pg(\phi_i^2)+qg(\varphi_j^2) \\
 ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2) & \geq ph(\varphi_i^2)+qh(\varphi_j^2)
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\nu_j^2)) & \leq g^{-1}(pg(\phi_i^2)+qg(\varphi_j^2)) \\
 h^{-1}(ph(\nu_i^2)+qh(\nu_j^2)) & \geq h^{-1}(ph(\varphi_i^2)+qh(\varphi_j^2))
 \end{aligned}$$

从而易知

$$\begin{aligned}
 & h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}h(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\nu_j^2)))\right)\leq \\
 & h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\leq j}h(g^{-1}(pg(\phi_i^2)+qg(\varphi_j^2)))\right)
 \end{aligned}$$

$$g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} g\left(h^{-1}(ph(v_i^2)+qh(v_j^2))\right)\right) \geq g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} g\left(h^{-1}(ph(\varphi_i^2)+qh(\varphi_j^2))\right)\right)$$

则有

$$g^{-1}\left(\frac{1}{p+q}g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} h\left(g^{-1}(pg(\mu_i^2)+qg(\mu_j^2))\right)\right)\right)\right) \leq g^{-1}\left(\frac{1}{p+q}g\left(h^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} h\left(g^{-1}(pg(\phi_i^2)+qg(\phi_j^2))\right)\right)\right)\right) \\ h^{-1}\left(\frac{1}{p+q}h\left(g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} g\left(h^{-1}(ph(v_i^2)+qh(v_j^2))\right)\right)\right)\right) \geq h^{-1}\left(\frac{1}{p+q}h\left(g^{-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i \leq j} g\left(h^{-1}(ph(\varphi_i^2)+qh(\varphi_j^2))\right)\right)\right)\right)$$

即 $\mu^2 \leq \phi^2, v^2 \geq \varphi^2$, 那么有 $\mu^2 - v^2 \leq \phi^2 - \varphi^2$, 即 $\rho(\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \leq \rho(\text{PFHM}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n))$ 。

根据定义3可知

$$\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \text{PFHM}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

于是定理2中的单调性得证。

2.3 PFHM 特例

在式(4)的PFHM表达式中能够发现:函数 $g(t)$ 是一个递减函数,没有给定一个具体地函数表达式;同样,参数 p, q 也没有给定具体数值。下面将对这些函数和参数赋予具体的形式,探究PFHM的一些特例。

特例1 当 $g(t) = -\log_e(t)$ 时,PFHM变形为

$$\text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\sqrt{\left(1 - \prod_{i \leq j} \left(1 - (\mu_i^2)^p (\mu_j^2)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}}, \right. \\ \left. \sqrt{1 - \left(1 - \prod_{i \leq j} \left(1 - (1 - \nu_i^2)^p (1 - \nu_j^2)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}}\right) \tag{11}$$

特例2 当 $g(t) = \log_e\left(\frac{2-t}{t}\right)$ 时,PFHM变形为

$$\text{IFEHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{R(\mu_i, \mu_j) + 3S(\mu_i, \mu_j)}{R(\mu_i, \mu_j) - S(\mu_i, \mu_j)}\right)^{\frac{1}{p+q}} - 1}}, \sqrt{\frac{\left(\frac{U(\nu_i, \nu_j) + 3V(\nu_i, \nu_j)}{U(\nu_i, \nu_j) - V(\nu_i, \nu_j)}\right)^{\frac{1}{p+q}} - 1}{\left(\frac{U(\nu_i, \nu_j) + 3V(\nu_i, \nu_j)}{U(\nu_i, \nu_j) - V(\nu_i, \nu_j)}\right)^{\frac{1}{p+q}} + 1}} \right) \tag{12}$$

式中

$$\begin{aligned}
 R(\mu_i, \mu_j) &= \prod_{i \leq j} \left((2 - \mu_i^2)^p (2 - \mu_j^2)^q + 3(\mu_i^2)^p (\mu_j^2)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\
 S(\mu_i, \mu_j) &= \prod_{i \leq j} \left((2 - \mu_i^2)^p (2 - \mu_j^2)^q - (\mu_i^2)^p (\mu_j^2)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\
 U(\nu_i, \nu_j) &= \prod_{i \leq j} \left((1 + \nu_i^2)^p (1 + \nu_j^2)^q + 3(1 - \nu_i^2)^p (1 - \nu_j^2)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\
 V(\nu_i, \nu_j) &= \prod_{i \leq j} \left((1 + \nu_i^2)^p (1 + \nu_j^2)^q - (1 - \nu_i^2)^p (1 - \nu_j^2)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}
 \end{aligned}$$

特例 3 当 $q \rightarrow 0$ 时, PFHM 转化为

$$\begin{aligned}
 \text{PFHM}^{p,0}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \left(\frac{1}{n} \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\sqrt[2]{g^{-1} \left(\frac{1}{p} g \left(h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(g^{-1}(pg(\mu_i^2))) \right) \right) \right)} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[2]{h^{-1} \left(\frac{1}{p} h \left(g^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(h^{-1}(ph(\nu_i^2))) \right) \right) \right)} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

在上述条件下, 如果此时 $p = 1$, 那么 PFHM 将会退化为

$$\begin{aligned}
 \text{PFHM}^{1,0}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \frac{1}{n} \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i = \\
 &= \left(\sqrt[2]{h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mu_i^2) \right)}, \sqrt[2]{g^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\nu_i^2) \right)} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

特例 4 当 $p = q = 1/2$ 时, PFHM 变形为

$$\begin{aligned}
 \text{PFHM}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i \leq j} (\alpha_i^{\frac{1}{2}} \otimes \alpha_j^{\frac{1}{2}}) = \\
 &= \left(\sqrt[2]{h^{-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h \left(g^{-1} \left(\frac{1}{2} g(\mu_i^2) + \frac{1}{2} g(\mu_j^2) \right) \right) \right)} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[2]{g^{-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} g \left(h^{-1} \left(\frac{1}{2} h(\nu_i^2) + \frac{1}{2} h(\nu_j^2) \right) \right) \right)} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

特例 5 当 $p = q = 1$ 时, PFHM 将变形为

$$\begin{aligned}
 \text{PFHM}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \left(\frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i \leq j} (\alpha_i \otimes \alpha_j) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left(\sqrt[2]{g^{-1} \left(\frac{1}{2} g \left(h^{-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} h(g^{-1}(g(\mu_i^2) + g(\mu_j^2))) \right) \right) \right)} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[2]{h^{-1} \left(\frac{1}{2} h \left(g^{-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \leq j} g(h^{-1}(h(\nu_i^2) + h(\nu_j^2))) \right) \right) \right)} \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

3 勾股模糊决策模型的构建及其应用

3.1 模型构建

(1)模型背景

考虑一个多属性决策问题,其中用 $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 表示备选方案集, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 表示属性指标集。专家依据这些属性指标对上述备选方案进行评价分析,并运用勾股模糊数 $\alpha_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 来表示这些属性评价价值信息,使得反映的决策信息更为全面和准确,这里 α_{ij} 代表专家给定的备选方案 Z_i 在属性 C_j 下的属性值,于是得到勾股模糊数决策矩阵 $M = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ 。

(2)模型步骤

步骤1 根据实际问题背景情况对勾股模糊数决策矩阵 $M = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ 进行标准化,转化得到新的勾股模糊数决策矩阵 $N = (\beta_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤2 利用式(3)勾股模糊信息集中的勾股模糊数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的单调性等特性计算备选方案 $Z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的综合勾股模糊数 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 。

步骤3 运用定义3求出每一个综合勾股模糊数 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的得分度和精确度,并对这些综合勾股模糊数 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 进行大小排序。

步骤4 通过参照 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的大小排序输出备选方案 $Z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的优劣顺序。

3.2 决策实例

为了说明本文提出的勾股模糊决策模型的正确性和有效性,本文通过一个高校多媒体图像系统选择实例进行验证。在该实例中,有4个图像系统 $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ 基本符合学校的要求。为提升选择的合理性,该校邀请专业人员对4个图像系统进行评价,评价的指标分别为:系统交互效果 C_1 、系统成本 C_2 、系统的市场评价 C_3 以及系统售后服务 C_4 。通过专业人员的评估,得出

表1 勾股模糊数决策矩阵

Table 1 Decision matrix of Pythagorean fuzzy number

指标	C_1	C_2	C_3	C_4
Z_1	(0.9, 0.3)	(0.6, 0.7)	(0.5, 0.8)	(0.6, 0.3)
Z_2	(0.4, 0.7)	(0.2, 0.9)	(0.8, 0.1)	(0.5, 0.3)
Z_3	(0.8, 0.4)	(0.5, 0.7)	(0.7, 0.2)	(0.7, 0.4)
Z_4	(0.7, 0.2)	(0.3, 0.5)	(0.8, 0.4)	(0.2, 0.6)

了表1的勾股模糊数决策矩阵 M 。基于决策矩阵的系统选购决策步骤如下:

步骤1 考虑到系统成本 C_2 是成本型指标,和其他3个不一致,因此将 $M = (\alpha_{ij})_{4 \times 4}$ 标准化为新的矩阵 $N = (\beta_{ij})_{4 \times 4}$,即

$$N = \begin{pmatrix} (0.9, 0.3) & (0.7, 0.6) & (0.5, 0.8) & (0.6, 0.3) \\ (0.4, 0.7) & (0.9, 0.2) & (0.8, 0.1) & (0.5, 0.3) \\ (0.8, 0.4) & (0.7, 0.5) & (0.7, 0.2) & (0.7, 0.4) \\ (0.7, 0.2) & (0.5, 0.3) & (0.8, 0.4) & (0.2, 0.6) \end{pmatrix}$$

步骤2 借助于本文提出的PFHM(不失一般性,运用式(12),设定 $p = q = \frac{1}{2}$),可求得4个图像系统 $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ 的综合评价值为

$$\beta_1 = (0.6006, 0.4931), \beta_2 = (0.7880, 0.2855)$$

$$\beta_3 = (0.6910, 0.3128), \beta_4 = (0.6444, 0.4056)$$

步骤3 计算得出4个图像系统 $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ 综合评价值的得分度为

$$\rho(\beta_1) = 0.1176, \rho(\beta_2) = 0.5394$$

$$\rho(\beta_3)=0.3796, \rho(\beta_4)=0.2507$$

步骤4 通过得分度可知 $\beta_2 > \beta_3 > \beta_4 > \beta_1$, 于是4个图像系统优劣顺序为 $Z_2 > Z_3 > Z_4 > Z_1$ 。因此可得选择 Z_2 图像系统最合适。

在上面的决策过程中, 本文设定了函数 $g(t) = \log_e\left(\frac{2-t}{t}\right)$ 进行决策分析。下面将设定函

数 $g(t) = -\log_e(t)$, 即运用式(11) ($p = q = \frac{1}{2}$) 进行勾股模糊数的综合信息融合进行决策, 结果如表2所示。同时, 为了验证本文构建模型的合理性, 分别运用文献[6, 19]中的模型算法进行决策并和本文模型结果进行对比, 对比结果如表2所示。

文献[6]运用提出的勾股模糊信息算术加权平均算子进行综合信息的集成, 并构建了相应的决策模型。文献[19]将 TOPSIS 方法与勾股模糊信息相结合, 设计了一种新的多属性决策方法。

对表2中的决策结果分析可知: 运用本文提出的 PFHM 模型进行信息集成后的决策结果相同, 体现了 PFHM 的稳定性; 运用本文 PFHM 决策模型进行计算得到的最终排序结果和文献[6]结果一致, 体现了 PFHM 模型的合理性; 本文 PFHM 模型的计算结果和文献[19]结果对比, 虽然最优的结果一致, 但4个多媒体图像系统排序仍存在一定差异, 即 Z_3 和 Z_4 的优劣顺序不同。事实上, 通过挖掘原始的标准化的勾股模糊数决策矩阵 $N = (\beta_{ij})_{4 \times 4}$ 中的属性值信息可知, Z_3 对应的勾股模糊数属性信息大体上都大于 Z_4 对应的勾股模糊数属性信息, 于是就有 $Z_3 > Z_4$, 其与本文模型的决策结果相同, 证明了本文决策模型的有效性。

4 结束语

针对属性评价信息以勾股模糊数形式给出的多属性决策问题, 本文首先运用 t-模和 t-余模定义了新的勾股模糊数基本运算; 然后基于 Heronian 平均建立了 PFHM 算子, 讨论了 PFHM 算子的3个特征性质和特例; 接着构建了新的勾股模糊决策模型, 该模型考虑了输入属性值之间的关联性, 可以提高决策的使用范围; 最后将模型运用到多媒体图像系统选择决策实例中, 证明了本文模型的合理性和有效性。但是本文没有考虑属性的重要性差异情况, 因此针对属性权重不相同的勾股模糊数决策问题将进一步进行研究。

参考文献:

[1] GRABISCH M. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 89(3): 445-456.

[2] 韩莉莉, 魏翠萍. 基于单值中智集 Choquet 积分算子的群决策方法[J]. 运筹学学报, 2017, 21(2): 110-118.
HAN Lili, WEI Cuiping. Group decision making method based on single valued neutrosophic Choquet integral operator[J]. Operations Research Transactions, 2017, 21(2): 110-118.

[3] 时恩早, 范颖. 基于直觉正态模糊信息集成的多属性决策[J]. 控制工程, 2016, 23(10): 1612-1617.
SHI Enzao, FAN Ying. Intuitionist normal fuzzy information aggregation operators and their applications to multi-attribute decision making [J]. Control Engineering of China, 2016, 23(10): 1612-1617.

[4] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-356.

[5] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[6] YAGER R R, ABBASOV A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision Making[J]. International

表2 不同模型的决策结果

Table 2 Decision making results of different models

决策模型	排序结果	最优结果
文献[6]模型	$Z_2 > Z_3 > Z_4 > Z_1$	Z_2
文献[19]模型	$Z_2 > Z_4 > Z_3 > Z_1$	Z_2
PFHM(式(11))	$Z_2 > Z_3 > Z_4 > Z_1$	Z_2
PFHM(式(12))	$Z_2 > Z_3 > Z_4 > Z_1$	Z_2

- Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.
- [7] YAGER R R. Pythagorean membership grades in multi-criteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.
- [8] 聂东明. 群决策中犹豫乘性偏好关系一致性修复方法[J]. 控制工程, 2016, 23(4): 623-628.
NIE Dongming. Method for repairing the consistency of hesitant multiplicative preference relations in group decision making [J]. Control Engineering of China, 2016, 23(4): 623-628.
- [9] GARG H. Some methods for strategic decision-making problems with immediate probabilities in Pythagorean fuzzy environment [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(4): 687-712.
- [10] DICK S, YAGER R R, YAZDANBAHKSH O. On Pythagorean and complex fuzzy set operations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(5): 1009-1021.
- [11] GARG H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 886-920.
- [12] ZHANG X L. A novel approach based on similarity measure for Pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(6): 593-611.
- [13] ZHANG X L. Multicriteria Pythagorean fuzzy decision analysis: A hierarchical QUALIFLEX approach with the closeness index-based ranking methods[J]. Information Sciences, 2016, 330: 104-124.
- [14] PENG X D, YANG Y. Some results for Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2015, 30(11): 1133-1160.
- [15] WEI G W, LU M. Pythagorean fuzzy power aggregation operators in multiple attribute decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(1): 169-186.
- [16] 丁恒, 李延来. 基于毕达哥拉斯模糊幂加权平均算子的多属性群决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(5): 1-6.
DING Heng, LI Yanlai. Multiple attribute group decision making method based on Pythagorean fuzzy power weighted average operator[J]. Computer Engineering and Applications, 2018, 54(5): 1-6.
- [17] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 毕达哥拉斯模糊 Hamacher 集成算子及其决策应用[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(6): 1566-1574.
LIU Weifeng, CHANG Juan, HE Xia. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and its application to decision making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2018, 38(6): 1566-1574.
- [18] BELIAKOV G, PRADERA A, CALVO T. Aggregation functions: A guide for practitioners[M]. Berlin: Springer, 2007.
- [19] ZHANG X L, XU Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.
- [20] DESCHRIJVER G, CORNELIS, KERRE E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12: 45-61.

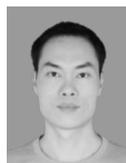
作者简介:



杨颖(1980-),女,副教授,
研究方向:图形图像处理、
模式识别, E-mail: ying-
yang_2020@21cn.com。



李冬睿(1983-),男,副教
授,研究方向:为图形图像
处理、模式识别和嵌入式
控制。



黄晓峰(1975-),男,实验
师,研究方向:视频检测、
大数据、物联网与网络安
全。

(编辑:张黄群)