

# 一种基于全变分技术和 $L_p$ 伪范数的椒盐噪声去除方法

许基隆, 陈颖频

(闽南师范大学物理与信息工程学院, 漳州, 363000)

**摘要:** 针对传统各向同性全变分(Isotropy total variation, ITV)去噪算法容易导致图像边缘模糊、不易保持图像细节信息等问题,提出一种基于  $L_p$  伪范数和各向同性全变分的图像去噪方法。该方法将  $L_p$  伪范数代替 ITV 模型中的  $L_1$  范数,利用交替方向乘子算法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)将能量泛函拆解成若干个子问题,并将差分算子视为卷积算子;然后引入卷积定理和快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)提高算法运算效率;最后通过 Matlab 进行仿真实验,运用图像质量的客观和主观评价方法进行评价分析。结果表明,本文方法能够较好地保留图像的边缘特性,有效提升去噪效果。

**关键词:** 图像去噪;快速傅里叶变换;  $L_p$  伪范数;各向同性全变分

**中图分类号:** TP751.1      **文献标志码:** A

## Method of Removing Salt and Pepper Noise Based on Total Variation Technique and $L_p$ Pseudo-Norm

XU Jilong, CHEN Yingpin

(School of Physics and Information Engineering, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China)

**Abstract:** In the framework of the traditional isotropic total variation (ITV) denoising algorithm, the edge of the image is easily blurred, and it is difficult to maintain the image detail information. Thus, we mainly study the image denoising problem by using  $L_p$  pseudo-norm and ITV. The  $L_p$  pseudo-norm takes place the  $L_1$  norm in traditional ITV energy function. Then the energy function is broken into several sub-problems by using alternating direction method of multipliers (ADMM). We treat the differential operator as a convolution operator, then introduce the convolution theorem and the fast Fourier transform (FFT) to further improve the efficiency of the proposed method. Finally, through Matlab, the simulation experiment employs the objective and subjective evaluation methods of image quality for evaluation and analysis. Simulation results show that the proposed method is capable of preserving the edge characteristics of the image and improving the denoising effect efficiently.

**Key words:** image denoising; fast Fourier transform;  $L_p$  quasi-norm; isotropic total variation

---

**基金项目:**福建省教育厅中青年教师教育科研基金(JT180311, JT180310, JT180309, JAT190378)资助项目;广东省数字信号与图像处理技术重点实验室开放课题(2017GDDSIPL\_01)资助项目;福建省重大教学改革基金(FBJG20180015)资助项目;福建省电子信息工程试点专业创新创业教改基金(2008-178026)资助项目;闽南师范大学校级教改基金(JG201918)资助项目;闽南师范大学校长基金(KJ19019)资助项目。

**收稿日期:** 2019-01-10; **修订日期:** 2019-08-19

## 引言

图像是信息获取、处理和理解过程中非常重要的来源,但由于采集、传输、存取过程中各种因素的影响,获取的图像通常是原图像的降质形式,例如,在数码相机成像过程中,较长的曝光时间会导致椒盐噪声<sup>[1-2]</sup>。椒盐噪声在概率分布上体现为:以一定的概率出现冲击扰动,以一定的概率出现零值扰动<sup>[3]</sup>。本文将从椒盐噪声的数学统计特性发出,以 $L_p$ 伪范数对其加以刻画,并结合全变分技术消除椒盐噪声,提高图像恢复质量,从而为图像处理的后续工作服务。

椒盐噪声的去除方法有很多种,如:全变分(Total variation, TV)方法,TV方法分为各向异性全变分(Anisotropic total variation, ATV)<sup>[4-5]</sup>和各向同性全变分(Isotropy total variation, ITV)<sup>[5]</sup>;传统中值滤波方法(Median filtering, MF)<sup>[6]</sup>;数学形态(Mathematical morphology, MM)方法<sup>[7]</sup>;脉冲耦合神经网络(Pulse coupled neural network, PCNN)<sup>[8]</sup>。其中,TV方法相比于MF、MM、PCNN去噪方法能更好地保护图像边缘。因此,近年来TV方法在图像解模糊、图像去噪、图像修复等方面得到了广泛的应用<sup>[9-12]</sup>。例如,陈颖频等将交叠组稀疏收缩技术引入广义全变分,提出一种具有高鲁棒性的图像恢复算法<sup>[13]</sup>。传统的TV方法一般以 $L_1$ 范数建模数据保真项,对噪声的稀疏性刻画能力并不理想。ATV方法相比于ITV方法有严重的阶梯效应。因此本文选择ITV去噪模型为改进对象。目前,基于ATV、ITV的椒盐噪声去除方法通常用 $L_1$ 范数来描述保真项。但是用 $L_1$ 范数做保真项的约束,对椒盐噪声的稀疏性刻画能力不足,所以本文用 $L_p$ 伪范数代替 $L_1$ 范数,通过增加一个自由度来提高保真项对椒盐噪声的刻画能力<sup>[14]</sup>。

## 1 椒盐噪声去噪方法

### 1.1 基于ITV的椒盐去噪方法

基于ITV的椒盐去噪方法从去噪算法域的角度可总结成两种:一是空间域算法,二是频率域算法<sup>[15]</sup>。空间域又名像素域,在图像上以矩阵的形式存在。在空域上进行图像去噪处理时,难免要对图像矩阵进行行列化操作,导致大型矩阵相乘,运算复杂度高。因此可以利用傅里叶变换把空间域中的图像转换到频率域中,在频域中进行处理后再反变换到空域,即频域算法<sup>[16]</sup>。基于椒盐噪声的特点,本文提出了一种频域去噪算法。

传统ITV椒盐噪声去噪模型为<sup>[5]</sup>

$$f = \operatorname{argmin}_f \|f - g\|_1 + \mu(\sqrt{\|\nabla_h f\|_1^2 + \|\nabla_v f\|_1^2}) \quad (1)$$

式中: $f \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ 为恢复图像的列化向量; $g \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ 表示被污染图像的列化向量; $\|f - g\|_1$ 表示数据保真项; $\sqrt{\|\nabla_h f\|_1^2 + \|\nabla_v f\|_1^2}$ 表示ITV正则项; $\nabla_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ 和 $\nabla_v \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ 分别表示横向差分矩阵和纵向差分矩阵; $\mu$ 为保真项和ITV正则项的平衡参数;\*表示二维卷积算子。

为减小矩阵规模、提高运算效率,本文将ITV模型改写为

$$F = \operatorname{argmin}_F \|F - G\|_1 + \mu(\sqrt{\|K_h * F\|_1^2 + \|K_v * F\|_1^2}) \quad (2)$$

式中: $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为原图像; $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为被噪声污染的图像; $K_h = [-1, 1]$ ,  $K_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 分别表示横向和纵向差分卷积核。

对比式(1,2)可知,式(1)中向量化形式的能量泛函涉及大型矩阵( $\nabla_h, \nabla_v \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ )运算的求逆运算,算法乘法复杂度为 $O((N^2)^3)$ ,而其矩阵形式的能量泛函不存在大型矩阵,且卷积算子可以映射到频

域后以点乘的形式进行运算,从而大大提高运算效率,算法复杂度仅为  $O(N^2 \log_2(N))$ 。

### 1.2 $L_p$ 伪范数

$L_p$  范数定义为  $\|F\|_p = (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |F_{ij}|^p)^{1/p}$ ,  $L_p$  伪范数定义为  $\|F\|_p^p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |F_{ij}|^p$ 。图 1 为不同  $L_p$  伪范数的等高线。

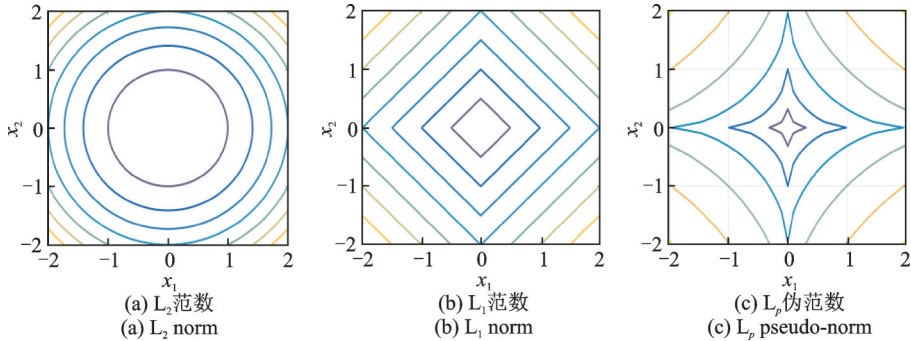


图 1 各类范数等高线

Fig.1 Contour line of different norms

传统的 ITV 椒盐去噪模型中用  $L_1$  范数做保真项的约束,对椒盐噪声的稀疏性刻画能力不足。图 2 展示了不同范数的稀疏性刻画能力,其中  $f - g$  表示加在图像信号的噪声。显然,图 2(c) 中等高线上的点相比于图 2(a, b) 更高概率地逼近于坐标轴,因此用  $L_p$  伪范数能够诱导出更加稀疏的解,从而更好地描述椒盐噪声的稀疏特性。

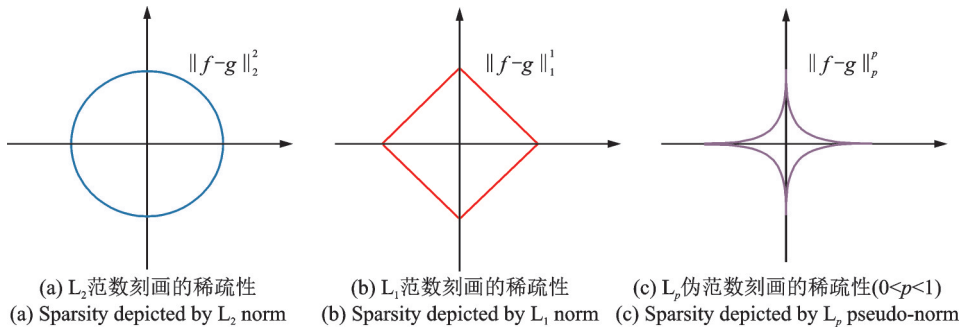


图 2 各类范数稀疏性

Fig.2 Sparsity of different norms

鉴于  $L_p$  伪范数优良的稀疏刻画能力,本文对稀疏收缩算子加以改进,将基于  $L_1$  范数的全变分图像恢复方法推广为基于  $L_p$  伪范数<sup>[14,17-21]</sup>的全变分图像恢复方法,用  $L_p$  伪范数代替  $L_1$  范数,通过增加 1 个自由度来提高保真项对椒盐噪声的刻画能力。

## 2 基于 $L_p$ 伪范数的 ITV 去噪方法

本文将  $L_p$  伪范数引入 ITV 模型,提出新的去噪模型如下

$$F = \operatorname{argmin}_F \|F - G\|_p^p + \mu (\sqrt{\|K_h * F\|_1^2 + \|K_v * F\|_1^2}) \quad (3)$$

对比式(3)和式(2)可以发现,本文提出的模型相比于传统的ITV模型最大的差别在于将传统ITV的保真项 $\|F - G\|_1$ 改为 $\|F - G\|_p^p$ ,通过 $L_p$ 伪范数加强对噪声数学统计特性的刻画,从而提高图像恢复的质量。

根据交替乘子迭代法框架,需要引入中间变量 $Z_1 = K_h * F, Z_2 = K_v * F, Z_3 = F - G$ ,并引入对应的拉格朗日乘子 $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ 。则增广拉格朗日目标函数为

$$J = \max_{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3} (\min_{F, Z_1, Z_2, Z_3} (\|Z_3\|_p^p + \mu (\sqrt{\|Z_1\|_1^2 + \|Z_2\|_1^2}) - \langle \beta_1 \Lambda_1, Z_1 - K_h * F \rangle + \frac{\beta_1}{2} \|Z_1 - K_h * F\|_2^2 - \langle \beta_2 \Lambda_2, Z_2 - K_v * F \rangle + \frac{\beta_2}{2} \|Z_2 - K_v * F\|_2^2 - \langle \beta_3 \Lambda_3, Z_3 - (F - G) \rangle + \frac{\beta_3}{2} \|Z_3 - (F - G)\|_2^2)) \quad (4)$$

为求解目标函数,需要将每个变量的子问题求解出来。对于 $F$ 子问题,有

$$J_F = -\langle \beta_1 \Lambda_1, Z_1 - K_h * F \rangle + \frac{\beta_1}{2} \|Z_1 - K_h * F\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2} \Lambda_1^2 - \frac{\beta_1}{2} \Lambda_1^2 - \langle \beta_2 \Lambda_2, Z_2 - K_v * F \rangle + \frac{\beta_2}{2} \|Z_2 - K_v * F\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \Lambda_2^2 - \frac{\beta_2}{2} \Lambda_2^2 - \langle \beta_3 \Lambda_3, Z_3 - (F - G) \rangle + \frac{\beta_3}{2} \|Z_3 - (F - G)\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \Lambda_3^2 - \frac{\beta_3}{2} \Lambda_3^2 \quad (5)$$

对式(5)配方补项,令 $0 = \frac{1}{2} \beta_i \Lambda_i^2 - \frac{1}{2} \beta_i \Lambda_i^2 (i = 1, 2, 3)$ ,代入式(5)得

$$J_F = \frac{\beta_1}{2} \|Z_1 - K_h * F - \Lambda_1\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \|Z_2 - K_v * F - \Lambda_2\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \|Z_3 - (F - G) - \Lambda_3\|_2^2 - \frac{\beta_1}{2} \Lambda_1^2 - \frac{\beta_2}{2} \Lambda_2^2 - \frac{\beta_3}{2} \Lambda_3^2 \quad (6)$$

由于引进的变量与 $F$ 已经去耦合,则空域表达式为

$$J_F = \frac{\beta_1}{2} \|Z_1 - K_h * F - \Lambda_1\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \|Z_2 - K_v * F - \Lambda_2\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \|Z_3 - (F - G) - \Lambda_3\|_2^2 \quad (7)$$

利用卷积定理,频域表达式为

$$J_F = \frac{\beta_1}{2} \|\bar{Z}_1 - \bar{K}_h \circ \bar{F} - \bar{\Lambda}_1\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\bar{Z}_2 - \bar{K}_v \circ \bar{F} - \bar{\Lambda}_2\|_2^2 + \frac{\beta_3}{2} \|\bar{Z}_3 - (\bar{F} - \bar{G}) - \bar{\Lambda}_3\|_2^2 \quad (8)$$

式中: $\circ$ 表示点乘操作; $\bar{X}$ 表示 $X$ 的频谱。

对式(8) $\bar{F}$ 变量加以求导,并令导数为零,可以得到

$$\frac{\partial J_F}{\partial \bar{F}} = \beta_1 \bar{K}_h^* \circ (\bar{Z}_1 - \bar{K}_h \circ \bar{F} - \bar{\Lambda}_1) + \beta_2 \bar{K}_v^* \circ (\bar{Z}_2 - \bar{K}_v \circ \bar{F} - \bar{\Lambda}_2) + \beta_3 (\bar{Z}_3 - (\bar{F} - \bar{G}) - \bar{\Lambda}_3) = 0 \quad (9)$$

整理得

$$\text{LHS} \circ \bar{F} = \text{RHS} \quad (10)$$

$$\text{LHS} = (\beta_1 \bar{K}_h^* \circ \bar{K}_h + \beta_2 \bar{K}_v^* \circ \bar{K}_v + \beta_3 I) \quad (11)$$

式中: $I$ 表示元素全为1的矩阵;RHS为

$$\text{RHS} = \beta_1 (\bar{Z}_1 - \bar{\Lambda}_1) + \beta_2 (\bar{Z}_2 - \bar{\Lambda}_2) + \beta_3 (\bar{Z}_3 + \bar{G} - \bar{\Lambda}_3) \quad (12)$$

则有

$$F^{(k+1)} = \mathcal{F}^{-1}(\text{RHS}./\text{LHS}) \quad (13)$$

式中:符号 $./$ 表示点除操作; $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶逆变换算子。

对于 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的子问题目标函数为

$$J_{Z_1, Z_2} = \mu(\sqrt{\|Z_1\|_1^2 + \|Z_2\|_1^2}) + \frac{\beta_1}{2}\|Z_1 - K_h * F - \Lambda_1\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2}\|Z_2 - K_v * F - \Lambda_2\|_2^2 =$$

$$\mu\|\text{vec}(Z_1), \text{vec}(Z_2)\|_{2,1} + \frac{\beta_1}{2}\|Z_1 - K_h * F - \Lambda_1\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2}\|Z_2 - K_v * F - \Lambda_2\|_2^2 \quad (14)$$

式中  $\text{vec}$  表示矩阵列化算子。令  $X = (\text{vec}(K_h * F + \Lambda_1), \text{vec}(K_v * F + \Lambda_2))$ , 根据基于  $L_{21}$  范数的收缩算子<sup>[22]</sup>有

$$[Z_1^{(k+1)}, Z_2^{(k+1)}] = \text{prox}_r(X) = \text{soft}_r^{\text{row}}(X) \quad (15)$$

式中  $\text{soft}_r^{\text{row}}$  为一个映射, 定义如下

$$Z_{i,j}^{(k+1)} \leftarrow \frac{Z_{i,j}}{\|X(i, :)\|_2} \max(\|X(i, :)\|_2 - \tau) \quad (16)$$

式中  $Z_{i,j}$  表示矩阵  $Z = (Z_1, Z_2)$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素,  $Z$  为矩阵  $Z_1$  和  $Z_2$  的增广矩阵。这里假设  $X$  为  $Z$  的初始值, 则  $X(i, :)$  表示矩阵  $X$  的第  $i$  行。

对于  $Z_3$  子问题, 目标函数为

$$J_{Z_3} = \|Z_3\|_p^p + \frac{\beta_3}{2}\|Z_3 - (F - G) - \Lambda_3\|_2^2 \quad (17)$$

令  $A = F + \Lambda_3 - G$ ,  $\tau = 1/\beta_3$ , 根据  $L_p$  伪范数收缩算子<sup>[18,23]</sup>,  $Z_3$  的收缩规则为

$$Z_3^{(k+1)} = \text{shrink}_p(A, \tau) = \max\{|A| - \tau^{2-p}|A|^{p-1}, 0\} \exp(j\varphi(A)) \quad (18)$$

式中  $\varphi(A)$  表示  $A$  的相位。

对偶变量  $\Lambda_1$  子问题为

$$J_{\Lambda_1} = -\langle \beta_1 \Lambda_1, Z_1 - K_h * F \rangle \quad (19)$$

利用梯度上升法, 可以得到  $\Lambda_1$  的更新规则为

$$\Lambda_1^{(k+1)} = \Lambda_1^{(k)} + \delta \beta_1 (K_h * F^{(k+1)} - Z_1^{(k+1)}) \quad (20)$$

式中  $\delta < 1$  表示学习率。

对偶变量  $\Lambda_2$  子问题为

$$J_{\Lambda_2} = -\langle \beta_2 \Lambda_2, Z_2 - K_v * F \rangle \quad (21)$$

利用梯度上升法, 可以得到  $\Lambda_2$  的更新规则为

$$\Lambda_2^{(k+1)} = \Lambda_2^{(k)} + \delta \beta_2 (K_v * F^{(k+1)} - Z_2^{(k+1)}) \quad (22)$$

对偶变量  $\Lambda_3$  子问题为

$$J_{\Lambda_3} = -\langle \beta_3 \Lambda_3, Z_3 - (F - G) \rangle \quad (23)$$

利用梯度上升法, 可以得到  $\Lambda_3$  的更新规则为

$$\Lambda_3^{(k+1)} = \Lambda_3^{(k)} + \delta \beta_3 (F^{(k+1)} - G - Z_3^{(k+1)}) \quad (24)$$

至此, 所有子问题得到求解, 本文提出算法 ITV- $L_p$  流程详见下面算法, 其中设置  $tol$  为  $10^{-4}$ 。

#### 算法 ITV- $L_p$

Input: 观测图像  $G$

Output: 去噪图像  $F$

Initialize:  $k=1, Z_i=0, \Lambda_i=0(i=1, 2, 3), F^{(k)}=0, \mu, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta, tol, p, E=1$ 。

(1) While  $E > tol$ , do

(2) 利用式 (13) 更新  $F^{(k+1)}$ ;

(3) 利用式 (16) 更新  $Z_1^{(k+1)}, Z_2^{(k+1)}$ ;

- (4) 利用式(18)更新  $Z_3^{(k+1)}$ ;
- (5) 利用式(20,21,24)更新  $\Lambda_i^{(k+1)} (i=1,2,3)$ ;
- (6)  $k=k+1$ ;
- (7)  $E = \frac{\|F^{(k)} - F^{(k-1)}\|_2}{\|F^{(k)}\|_2}$ ;
- (8) End while
- (9) Return  $F^{(k)}$  as  $F$

### 3 实验与分析

#### 3.1 实验环境

为了证明本文所提出方法的优越性,本文针对4组图像进行实验,如图3所示,图像的大小为512像素×512像素。本文使用的椒盐噪声水平分别为10%,20%,50%。后续实验将本文方法与已有的方法进行对比,包括ATV<sup>[5]</sup>,ITV<sup>[5]</sup>,MF<sup>[6]</sup>,MM<sup>[7]</sup>以及PCNN<sup>[8]</sup>。

实验软硬件环境为:基于2.3 GHz的Inter CPU和8 GB的RAM硬件环境及Matlab软件开发环境。评价图像恢复治理的主要参数有:算法运算时间、峰值信噪比(Peak signal-to-noise ratio, PSNR)以及结构相似性信息(Structural similarity, SSIM)<sup>[24]</sup>。PSNR和SSIM的定义为

$$\text{PSNR}(X, Y) = 10 \lg \frac{255^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_{ij} - Y_{ij})^2} \quad (25)$$

$$\text{SSIM}(X, Y) = \frac{(2u_X u_Y + (255k_1)^2)(2\sigma_{XY} + (255k_2)^2)}{(u_X^2 + u_Y^2 + (255k_1)^2)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + (255k_2)^2)} \quad (26)$$

式中: $X$ 表示原始图像; $Y$ 表示恢复图像; $\mu_X$ 和 $\mu_Y$ 分别为图像 $X$ 和 $Y$ 的均值; $\sigma_X^2$ 和 $\sigma_Y^2$ 分别表示图像 $X$ 和 $Y$ 的方差; $\sigma_{XY}$ 为 $X$ 和 $Y$ 的协方差。本文令 $k_1 = 0.01, k_2 = 0.03$ 。

#### 3.2 实验结果

以图3中的图像为测试对象,加上不同水平的椒盐噪声,用上述6种方法进行图像去噪,结果如表1—4所示(最优指标用黑色粗体标出,表格中Time列为“—”时表示Matlab无法测出运算时间间隔)。从表中显示的结果可以看出,本文提出的去噪模型去噪效果最佳。

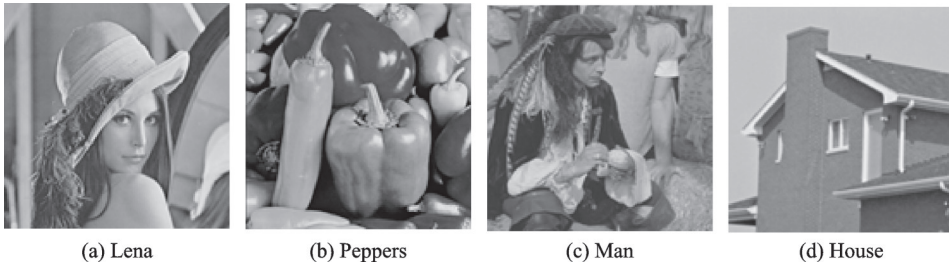


图3 测试图像

Fig.3 Tested images

表 1 不同方法关于 Lena 图像的去噪性能对比

Table 1 Denoising performance of different methods with regard to Lena

Noise level	Method	PSNR	SSIM	Time
10%	MF	28.328 6	0.880 1	—
	MM	26.745 7	0.870 9	0.062 5
	PCNN	30.415 7	0.956 6	25.062 5
	ATV	31.388 9	0.932 1	3.484 4
	ITV	31.378 8	0.936 7	3.875 0
	ITV- $L_p$	<b>32.258 3</b>	<b>0.961 8</b>	5.609 4
20%	MF	25.936 5	0.833 9	—
	MM	21.603 9	0.740 7	—
	PCNN	28.170 3	<b>0.935 5</b>	30.671 9
	ATV	29.377 3	0.881 6	3.562 5
	ITV	29.452 5	0.891 1	3.781 3
	ITV- $L_p$	<b>29.977 7</b>	0.928 6	5.218 8
50%	MF	14.954 1	0.253 0	—
	MM	11.125 7	0.152 9	—
	PCNN	20.189 4	0.687 2	46.140 6
	ATV	25.036 1	0.693 1	3.562 5
	ITV	25.301 5	0.716 7	3.718 8
	ITV- $L_p$	<b>25.483 3</b>	<b>0.809 8</b>	5.187 5

表 3 不同方法关于 Man 图像的去噪性能对比

Table 3 Denoising performance of different methods with regard to Man

Noise level	Method	PSNR	SSIM	Time
10%	MF	27.498 3	0.797 6	0.015 6
	MM	26.211 7	0.803 3	—
	PCNN	30.226 1	0.931 0	30.171 9
	ATV	30.237 0	0.908 3	3.609 4
	ITV	30.209 3	0.909 6	3.671 9
	ITV- $L_p$	<b>32.118 9</b>	<b>0.938 5</b>	4.859 4
20%	MF	25.252 3	0.755 0	—
	MM	21.986 5	0.702 8	—
	PCNN	27.473 1	<b>0.901 0</b>	36.296 9
	ATV	27.985 6	0.853 1	3.312 5
	ITV	27.997 1	0.857 7	3.593 8
	ITV- $L_p$	<b>29.517 5</b>	0.889 8	5.234 4
50%	MF	14.915 7	0.266 2	—
	MM	11.741 5	0.172 3	—
	PCNN	20.366 8	0.657 1	54.093 8
	ATV	24.094 0	0.656 0	3.734 4
	ITV	24.280 6	0.672 3	3.531 3
	ITV- $L_p$	<b>24.916 8</b>	<b>0.703 3</b>	5.296 9

表 2 不同方法关于 Peppers 图像的去噪性能对比

Table 2 Denoising performance of different methods with regard to Peppers

Noise level	Method	PSNR	SSIM	Time
10%	MF	29.071 4	0.884 6	—
	MM	27.845 9	0.884 4	—
	PCNN	30.645 3	<b>0.949 9</b>	33.828 1
	ATV	30.241 9	0.931 7	5.296 9
	ITV	30.495 8	0.945 9	5.250 0
	ITV- $L_p$	<b>30.920 6</b>	0.945 7	4.328 1
20%	MF	26.389 6	0.845 1	—
	MM	22.249 5	0.767 4	—
	PCNN	27.276 4	<b>0.928 8</b>	39.890 6
	ATV	27.784 2	0.889 3	4.734 4
	ITV	28.154 1	0.907 1	5.312 5
	ITV- $L_p$	<b>28.213 2</b>	0.908 2	3.328 1
50%	MF	14.687 6	0.289 1	—
	MM	12.032 1	0.221 8	—
	PCNN	19.847 5	0.690 6	59.046 9
	ATV	23.573 3	0.771 5	5.171 9
	ITV	24.223 6	0.736 8	5.406 3
	ITV- $L_p$	<b>24.312 2</b>	<b>0.819 4</b>	5.296 9

表 4 不同方法关于 House 图像的去噪性能对比

Table 4 Denoising performance of different methods with regard to House

Noise level	Method	PSNR	SSIM	Time
10%	MF	32.588 0	0.929 2	—
	MM	30.580 3	0.929 7	—
	PCNN	32.760 5	<b>0.982 4</b>	29.062 5
	ATV	37.083 9	0.947 5	3.546 9
	ITV	37.123 4	0.954 7	3.546 9
	ITV- $L_p$	<b>38.057 8</b>	0.977 5	4.625 0
20%	MF	27.185 1	0.874 9	—
	MM	21.370 3	0.777 1	—
	PCNN	29.043 1	<b>0.965 6</b>	33.718 8
	ATV	33.822 8	0.891 6	3.421 9
	ITV	34.039 1	0.905 7	3.546 9
	ITV- $L_p$	<b>34.731 0</b>	0.958 4	5.515 6
50%	MF	15.074 6	0.237 9	—
	MM	10.638 1	0.120 2	0.046 9
	PCNN	20.285 5	0.709 6	48.000 0
	ATV	27.413 6	0.696 9	3.421 9
	ITV	27.822 3	0.726 2	3.718 8
	ITV- $L_p$	<b>29.095 3</b>	<b>0.877 2</b>	5.296 9



图4—7分别给出对大小为512像素×512像素的House和Lena图像分别加入噪声水平为10%和50%的椒盐噪声后,用6种算法恢复的图像和细节放大对比图。从视觉效果来看,本文方法去噪效果最好。

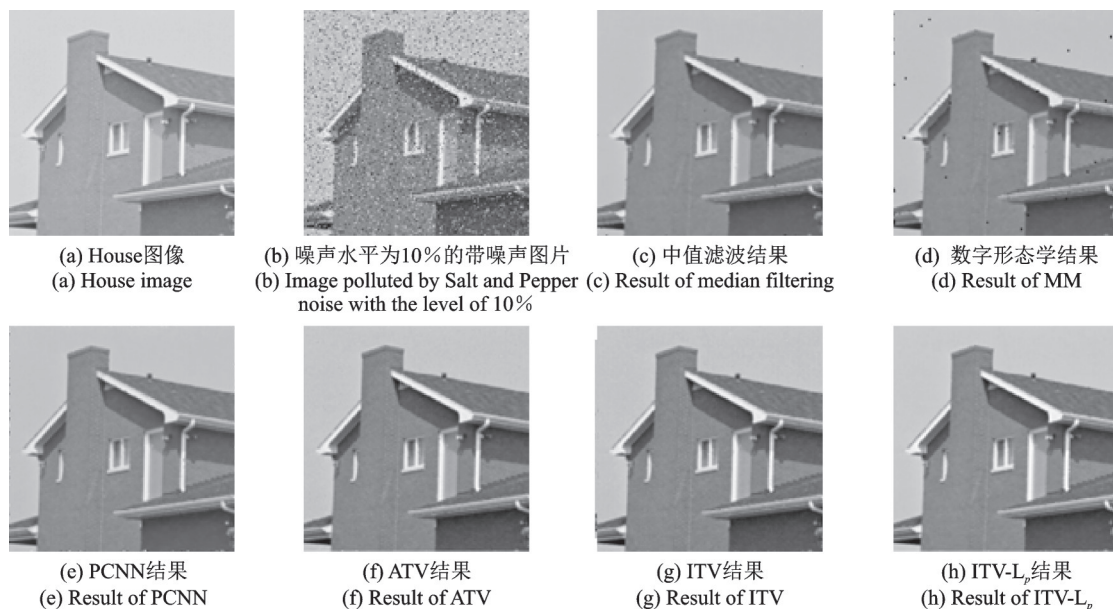


图4 不同算法对House图像恢复效果对比结果

Fig.4 Comparison of recovered images of House by different methods

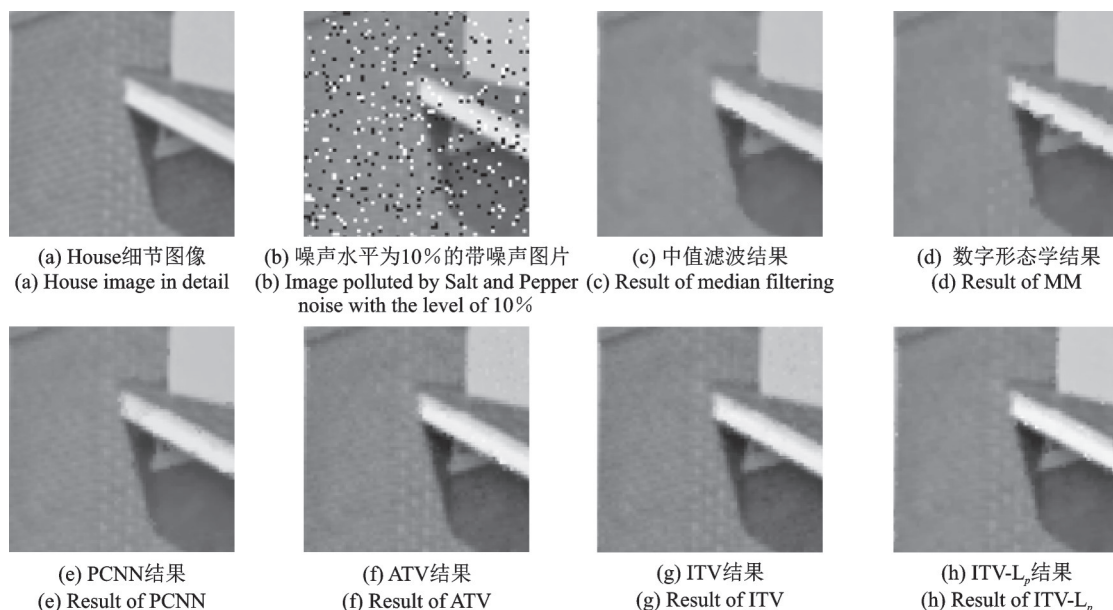


图5 不同算法对House细节图恢复效果对比结果

Fig.5 Comparison of recovered images in detail of House by different methods



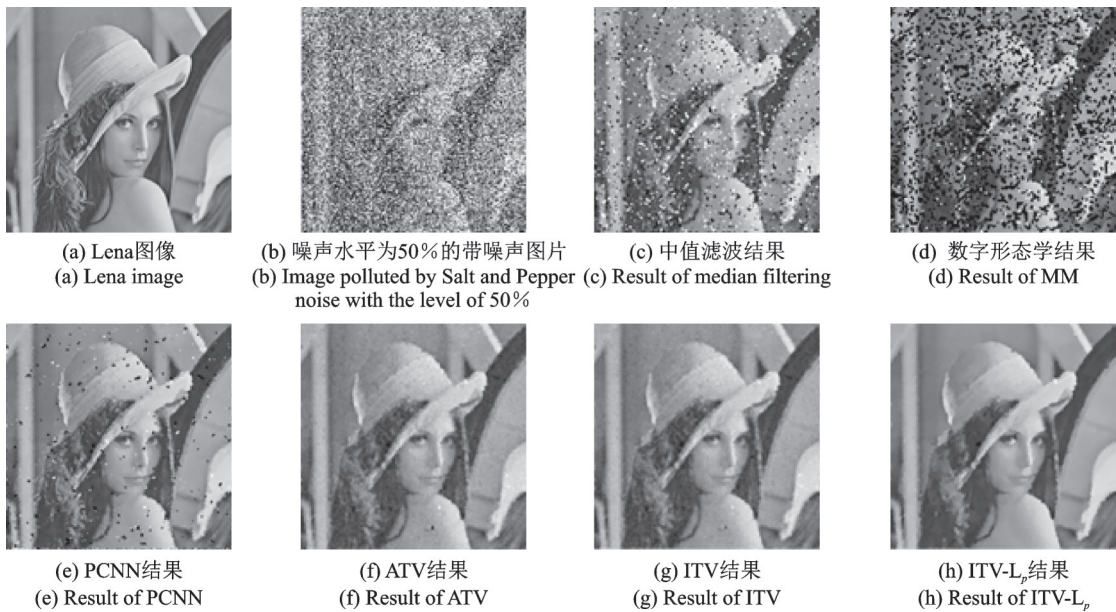


图6 不同算法对Lena图像恢复效果对比结果

Fig.6 Comparison of recovered images of Lena by different methods

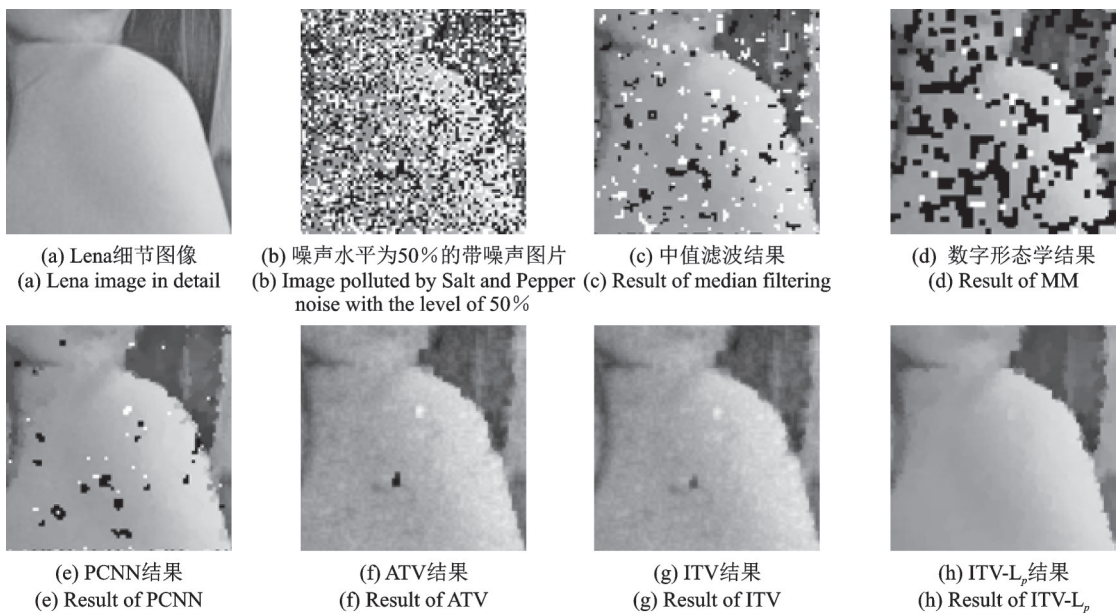


图7 不同算法对Lena细节图恢复效果对比结果

Fig.7 Comparison of recovered images in detail of Lena by different methods

#### 4 结束语

本文提出一种新的基于 $L_p$ 伪范数和ITV的图像去噪方法ITV- $L_p$ 。为求解该去噪模型,ITV- $L_p$ 方法在ADMM算法中引入快速傅里叶变换,用点除运算代替空域算法,从而避免大型矩阵运算,提高运算效率。不仅如此,ITV- $L_p$ 方法还能避免占用大量内存的大型矩阵相乘运算。与ATV和ITV方法以

及其他方法相比,ITV- $L_p$ 方法能获得最大的PSNR和SSIM值,这说明该方法不仅在误差方面,在结构相似性方面也能获得明显优于其他方法的图像结果。

#### 参考文献:

- [1] RAHIMI S, AGHAGOLZADEH A, SEYEDARABI H. Human detection and tracking using new features combination in particle filter framework[J]. *Machine Vision and Image Processing*, 2014, 72(7): 349-354.
- [2] PENG Y, WU T, WANG S, et al. Motion-blurred particle image restoration for on-line wear monitoring[J]. *Sensors*, 2015, 15(4): 8173-8191.
- [3] 高振清, 庄建军. 基于参数自调整开关中值滤波的图像去噪方法研究[J]. *激光杂志*, 2015, 36(10): 50-54.  
GAO Zhenqing, ZHUANG Jianjun. Research of image denoising methods based on parameter self-adjusting switch median filtering[J]. *Laser Technology*, 2015, 36(10): 50-54.
- [4] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica Section D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.
- [5] GOLDSTEIN T, OSHER S. The split Bregman method for L1 regularized problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323-343.
- [6] 高浩军, 杜宇人. 中值滤波在图像处理中的应用[J]. *电子工程师*, 2004, 30(8): 35-36.  
GAO Haojun, DU Yuren. The application of median filtering on image processing[J]. *Electronic Engineer*, 2004, 30(8): 35-36.
- [7] 肖大雪. 浅析数学形态学在图像处理中的应用[J]. *科技广场*, 2013, 2(5): 10-19.  
XIAO Daxue. Study on the application of mathematical morphology in image processing[J]. *Science Mosaic*, 2013, 2(5): 10-19.
- [8] 张燕, 陆晓飞. 脉冲耦合神经网络在图像处理中的应用[J]. *信息化研究*, 2015, 27(3): 47-52.  
ZHANG Yan, LU Xiaofei. The pulse coupled neural network and its application in image processing[J]. *Informatization Research*, 2015, 27(3): 47-52.
- [9] CHAN T, SHEN J. Mathematical models for local nontexture inpaintings[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, 62(3): 1019-1043.
- [10] VOGEL C, OMAN M. Iterative methods for total variation denoising[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, 17(1): 227-238.
- [11] 王满, 文有为, 陈智斌. 全变差噪声消除问题的半光滑牛顿法[J]. *激光技术*, 2017, 41(3): 289-295.  
WANG Man, WEN Youwei, CHEN Zhibin. Semi-smooth Newton method for total variation noise removal[J]. *Laser Technology*, 41(3): 289-295.
- [12] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2010, 3(1): 1-12.
- [13] 陈颖颖, 彭真明, 李美惠, 等. 基于交叠组稀疏广义全变分的地震信号随机噪声衰减[J]. *石油地球物理勘探*, 2019, 54(1): 24-35.  
CHEN Yingpin, PENG Zhenming, LI Meihui, et al. Seismic random noise attenuation based on improved total generalized variation by using overlapping group sparsity[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2019, 54(1): 24-35.
- [14] WANG L, CHEN Y, LIN F, et al. Impulse noise denoising using total variation with overlapping group sparsity and  $L_p$ -pseudo-norm shrinkage[J]. *Applied Sciences*, 2018, 8(11): 2317.
- [15] 崔艳萌. 联合空域和频域的图像去噪算法及其应用研究[D]. 郑州: 河南师范大学, 2016.  
CUI Yanmeng. Research on image denoising algorithm based on spacial and frequency domains and the application[D]. Zhengzhou: Henan Normal University, 2016.
- [16] CHENG Z, CHEN Y, WANG L, et al. Four-directional total variation denoising using fast fourier transform and ADMM[C]// *Proceedings of International Conference on Image Vision and Computing*. [S.l.]: IEEE, 2018: 379-383.

- [17] 彭真明, 陈颖频, 蒲恬, 等. 基于稀疏表示及正则约束的图像去噪方法综述[J]. 数据采集与处理, 2018, 33(1): 1-11.  
PENG Zhenming, CHEN Yingpin, PU Tian, et al. Image denoising based on sparse representation and regularization constraint: A review[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2018, 33(1): 1-11.
- [18] WOODWORTH J, CHARTRAND R. Compressed sensing recovery via nonconvex shrinkage penalties[J]. Inverse Problems, 2016, 32(7): 075004.
- [19] LI S, HE Y, CHEN Y, et al. Fast multi-trace impedance inversion using anisotropic total  $p$ -variation regularization in the frequency domain[J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2018, 15(5): 2171-2182.
- [20] LIU X, CHEN Y, PENG Z. Infrared image super-resolution reconstruction based on quaternion fractional order total variation with  $L_p$  quasinorm[J]. Applied Sciences, 2018, 8(10): 1864.
- [21] CHARTRAND R. Shrinkage mappings and their induced penalty functions[C]//Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. [S.l.]: IEEE, 2014: 1026-1029.
- [22] RAJMIC P, NOVOSADOVÁ M, DAŇKOVÁ M. Piecewise-polynomial signal segmentation using convex optimization[J]. Institute of Information Theory and Automation, 2017, 53(6): 1131-1149.
- [23] CHEN Y, PENG Z, GHOLAMI A, et al. Seismic signal sparse time-frequency representation by  $L_p$ -quasinorm constraint[J]. Digital Signal Processing, 2019, 87: 43-59.
- [24] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.

**作者简介:**

许基隆(1997-),男,硕士研究生,研究方向:图像恢复技术, E-mail: disanrenceng12-3@163.com。



陈颖频(1986-),男,讲师,研究方向:信号的稀疏表示、时频分析、图像处理等, E-mail: 110500617@163.com。

(编辑:张黄群)