ISSN 1004-9037,CODEN SCYCE4
Journal of Data Acquisition and Processing Vol. 34,No. 6,Nov. 2019,pp. 992－1001
DOI:10. 16337/j. 1004-9037. 2019. 06. 005

http://sjcj. nuaa. edu. cn
E-mail:sjcj@nuaa. edu. cn
Tel/Fax:＋86-025-84892742

互质线阵中一种基于共轭增广的DOA估计算法

林新平　张小飞　沈金清

(南京航空航天大学电子信息工程学院,南京,211106)

摘　要:论文开展互质线阵下的空间谱估计研究。通过利用信号二阶统计量的共轭增广特性,提出互质阵下基于共轭增广的酉旋转不变性进行信号参数估计(Conjugate augmented unitary estimation of signal parameters via rotational invariance technique, CA-UESPRIT)波达方向(Direction of arrival, DOA)估计算法。该算法先利用不同时长间隔下接收信号的二阶统计量,构造共轭增广虚拟阵列以扩展阵列孔径和提高空间自由度。然后采用基于互质特性的联合UESPRIT算法实现DOA估计。相比于传统互质线阵下的联合UESPRIT算法,CA-UESPRIT算法DOA估计性能更优。此外,通过酉变换可以将ESPRIT算法的协方差矩阵从复数域转化到实数域,降低了复杂度的同时保证了测向精度。仿真结果证实了所提算法的有效性。

关键词:互质线阵;DOA估计;共轭增广特性;酉ESPRIT;复杂度

中图分类号:TN911.7　**文献标志码**:A

DOA Estimation Algorithm Based on Conjugate Augmentation for Coprime Linear Array

Lin Xinping, Zhang Xiaofei, Shen Jinqing

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 211106, China)

Abstract: The paper implements the research of spatial spectrum estimation for coprime linear array. By utilizing the conjugate augmented characteristic of the second-order statistic of the signals, a conjugate augmented unitary estimation of signal parameters via rotational (ESPRIT) (CA-UESPRIT) direction of arrival (DOA) estimation algorithm is proposed. By using the second-order statistics of the received signals with different time lags, the algorithm firstly constructs a conjugate augmented virtual array to expand the array aperture and improve degrees of freedom (DOFs), subsequently, achieves the DOA estimation by exploiting the coprime property based joint UESPRIT algorithm. Compared to the traditional joint UESPRIT algorithm for coprime linear array, better DOA estimation performance can be achieved by CA-UESPRIT algorithm. In addition, the covariance matrix of the ESPRIT algorithm can be transformed from the complex domain to the real domain by the unitary transform, which reduces the complexity but ensures the estimation accuracy. The simulation results verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: coprime linear array; DOA estimation; conjugate augmented characteristic; unitary ESPRIT; complexity

基金项目:江苏省研究生科研与实践创新计划(SJCX18_0103)资助项目;国家自然科学基金(61971217)资助项目。
收稿日期:2019-02-23;**修订日期**:2019-06-21

引　言

近年来,信号波达方向(Direction of arrival, DOA)估计被广泛应用于雷达、无线通信、声呐和生物医学等领域,是阵列信号处理中的一个研究热点[1-3]。经典的超分辨率DOA估计算法,例如多重信号分类(Multiple signal classification, MUSIC)算法[4]、借助旋转不变性进行信号参数估计(Estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT)算法[5]等,都是基于特征结构的子空间类方法。子空间类方法最初是针对传统满阵提出的,要求阵元间距严格小于等于电磁波半波长,以避免出现角度估计模糊。然而,传统满阵由于阵元间距过小,存在阵元间互耦严重、阵列孔径不足以及测向精度不高等缺点,已经无法满足许多航空航天以及军事民用领域的应用需求。

文献[6]提出了互质阵列的概念。它是一种阵元间距大于半波长的非均匀阵列,由两个阵元数与阵元间距存在互质关系的均匀子阵穿插拓扑构成。相比于传统满阵,互质阵列具有阵元互耦更低,阵列孔径更大,定位测向精度更高等优点。文献[6]中证明了一个具有$M+N-1$个阵元的互质线阵,能够获得$O\{MN\}$的空间自由度。因此,基于互质阵列的空间谱估计研究成为当下信号处理领域的热点问题之一。

文献[7]中提出了一种互质线阵下基于矢量化协方差矩阵的DOA估计方法,称之为虚拟化方法。该方法通过矢量化接收信号协方差矩阵进行数据重构,从而得到一个通过虚拟阵列接收到的单快拍信号。特别地,虚拟阵列能够提供比物理阵列更大的阵列孔径和更高的空间自由度。文献[8]中则提出了基于互质特性的联合MUSIC方法,该方法利用互质线阵的两个子阵单独估计DOA,通过比对子阵间的估计结果消除测向模糊,称之为解模糊方法。相比于虚拟化方法,解模糊方法实现简单,且DOA估计性能更优[9]。然而文献[8]中的MUSIC算法需要全局谱搜索,算法复杂度较高。文献[10]和文献[11]中分别提出了MUSIC部分空间谱搜索的方法和求根MUSIC算法,复杂度相对于文献[8]中的方法具有较大改善。相对于MUSIC算法,互质线阵下的ESPRIT算法[12]显然在算法复杂度上要低得多。文献[13-15]中通过对接收数据矩阵重构和实值化的方法达到降低互质阵列中ESPRTI算法角度估计复杂度的目的。然而,上述DOA估计方法只利用了接收信号的空域信息,并未对时域信息加以利用[16]。

为了能够充分利用互质线阵接收信号的时域与空域信息,本文提出了一种基于共轭增广(Conjugate augmented)的DOA估计算法。算法首先通过利用不同时长间隔下阵元接收信号间互相关函数的共轭对称特性,构造一个共轭增广虚拟阵列接收信号,虚拟接收信号具有和实际信号相同的信号形式,但相比于原有的互质阵列,虚拟阵列中增加了近一倍的镜像虚拟阵元,阵列孔径更大,空间自由度更高。然后采用基于互质特性的联合酉ESPRIT(Unitary ESPRIT)算法[17]对虚拟信号实现DOA估计,称该算法为基于共轭增广的酉ESPRIT(CA-UESPRIT)算法。相比于传统互质线阵下的联合UESPRIT算法,CA-UESPRIT算法自由度更高,DOA估计性能更优。CA-UESPRIT算法通过引入酉变换矩阵降低了ESPRIT算法中的复乘运算次数,算法复杂度较低。

1　阵列结构与数据模型

考虑如图1所示互质线阵,它由两个均匀子阵重合第1个阵元拓扑而成,子阵结构如图2所示,其中子阵1和子阵2阵元数分别为M和N, 阵元间距为$d_1=N\lambda/2$和$d_2=M\lambda/2$,λ为电磁波波长且M和N互为质数。互质线阵总阵元数为$M+N-1$。

假设互质线阵置于x轴坐标系上,以图1虚线位置为坐标原点,那么互质线阵阵元位置与坐标原点距离可表示为

$$L=\{md_1|m=0,1,\cdots,M-1\}\cup\{nd_2|n=1,2,\cdots,N-1\} \tag{1}$$

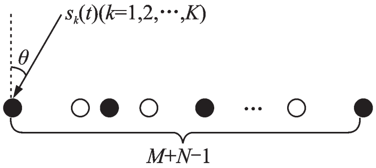

图1 互质线阵

Fig.1 Coprime linear array

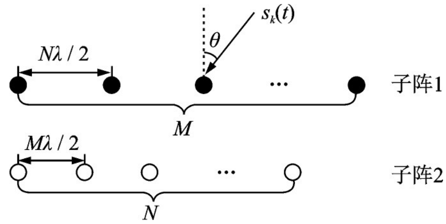

图2 子阵拓扑图

Fig.2 Topology of subarray

假设K个远场窄带独立平面波信号以角度$\theta=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_K]$入射到上述互质阵列中，信号快拍数为$J$。在$t$时刻，假设第$k$个入射信号表示为$s_k(t)=A_k e^{j\omega_k t}$，其中$A_k$为信号幅度，$\omega_k$表示信号频率，$k=1,2,\cdots,K$。那么互质线阵中第$p(p=1,2,\cdots,M+N-1)$个阵元接收信号可以表示为[18]

$$x_p(t)=\sum_{k=1}^{K}s_k(t)e^{-j2\pi l_p\sin(\theta_k)/\lambda}+n_p(t) \tag{2}$$

式中：$n_p(t)$表示加性噪声，l_p表示集合L的第p个元素，根据式(1)可知$l_1=0$。

阵列接收信号用矩阵形式可以表示为[19]

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots,s_K(t)]^{\mathrm{T}}$为信源矢量，$\boldsymbol{n}(t)$为均值为0的加性高斯白噪声，协方差均为$\sigma_n^2$，且噪声与信号间互不相关。$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_1),\boldsymbol{a}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_K)]\in\mathbf{C}^{(M+N-1)\times K}$为互质阵列的方向矩阵，第$k$列表示为

$$\boldsymbol{a}(\theta_k)=[e^{-j2\pi l_1\sin(\theta_k)/\lambda},e^{-j2\pi l_2\sin(\theta_k)/\lambda},\cdots,e^{-j2\pi l_{M+N-1}\sin(\theta_k)/\lambda}]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

2 基于共轭增广的DOA估计算法

CA-UESPRIT算法实现DOA估计主要包含两个步骤，先是利用不同时长间隔下阵元接收信号间互相关函数的共轭对称特性，构造一个共轭增广虚拟阵列接收信号，随后通过基于互质特性的联合UESPRIT算法[17]求解虚拟阵列的DOA估计结果。

2.1 共轭增广过程

本节通过构造共轭增广虚拟阵列以扩展互质线阵的阵列孔径及提高空间自由度。根据式(2)，互质线阵中第1个阵元接收信号与第p个阵元接收信号关于时长$\tau(\tau\neq 0)$的互相关函数可以表示为[16]

$$\begin{aligned}R_{x_px_1}(\tau)&=E\{x_p(t+\frac{\tau}{2})x_1^*(t-\frac{\tau}{2})\}=\\&R_{n_pn_1}(\tau)+\sum_{k=1}^{K}R_{s_ks_k}(\tau)e^{-j2\pi(l_p-l_1)\sin(\theta_k)/\lambda}\end{aligned} \tag{5}$$

式中，$R_{s_ks_k}(\tau)$表示成[16]

$$\begin{aligned}R_{s_ks_k}(\tau)&=E\{s_k(t+\frac{\tau}{2})s^*{}_k(t-\frac{\tau}{2})\}=\\&E\{A_k e^{j\omega_k(t+\frac{\tau}{2})}A_k e^{-j\omega_k(t-\frac{\tau}{2})}\}=A_k^2e^{j\omega_k\tau}\end{aligned} \tag{6}$$

由第1节中假设的信号模型可以得知，$R_{s_ks_k}(\tau)$可以看作是幅度变成平方倍的第k个入射信号在τ时刻的信号值。式(5)中$R_{n_pn_1}(\tau)$可以表示为[16]

$$R_{n_p n_1}(\tau)=E\{n_p(t+\frac{\tau}{2})n_1^*(t-\frac{\tau}{2})\}=\sigma_n^2\delta(\tau)\delta(p-1)=0 \tag{7}$$

根据式(7),可以将式(5)重写为

$$R_{x_p x_1}(\tau)=\sum_{k=1}^{K}R_{s_k s_k}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi l_p\sin(\theta_k)/\lambda} \tag{8}$$

构造矢量 $\boldsymbol{R}_s(\tau)=[R_{s_1s_1}(\tau),R_{s_2s_2}(\tau),\cdots,R_{s_ks_k}(\tau)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{R}(\tau)=[R_{x_1x_1}(\tau),R_{x_2x_1}(\tau),\cdots,R_{x_{M+N-1}x_1}(\tau)]^{\mathrm{T}}$,可以得到

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s(\tau) \tag{9}$$

根据式(6)可知 $\boldsymbol{R}_s(\tau)=\boldsymbol{R}_s^*(-\tau)$,因此可以得到 $(\boldsymbol{R}(-\tau))^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{R}_s(\tau)$。令矩阵 $\boldsymbol{A}_{(2)}$ 和矢量 $\boldsymbol{R}_{(2)}(\tau)$ 分别表示矩阵 A 和矢量 $\boldsymbol{R}(\tau)$ 的第 $2\sim M+N-1$ 行,那么 $\boldsymbol{R}_{(2)}(\tau)=\boldsymbol{A}_{(2)}\boldsymbol{R}_s(\tau)$,构造为

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(\tau)=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{R}(-\tau))^*\\ \boldsymbol{R}_{(2)}(\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{A}_{(2)}\end{bmatrix}\boldsymbol{R}_s(\tau)=\boldsymbol{A}_e\boldsymbol{R}_s(\tau) \tag{10}$$

式中:$\boldsymbol{A}_e=[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{A}_{(2)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。$\widetilde{\boldsymbol{R}}(\tau)$ 可以看作是一个虚拟阵列的接收信号值,$\boldsymbol{A}_e$ 为这个虚拟阵列的方向矩阵,$\boldsymbol{R}_s(\tau)$ 可以看作是由 K 个虚拟入射信号组成的单快拍信号矢量,其中第 k 个虚拟入射信号表示为 $A_k^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k\tau}$,$k=1,2,\cdots,K$。参考图1所示的互质线阵,图3给出了虚拟阵列的示意图。

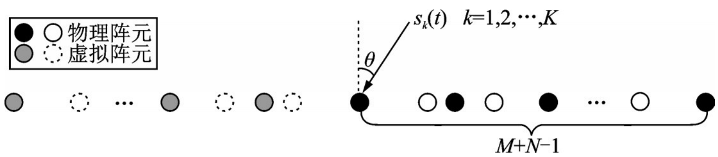

图3 虚拟互质线阵

Fig.3 Virtual coprime linear array

设图3中虚线位置为坐标原点,可以看出,虚拟阵列关于原点镜像对称,称之为共轭增广虚拟阵列。其中,虚拟阵列阵元总数为 $2(M+N-1)-1$。根据式(10),构造伪快拍数据矩阵

$$\boldsymbol{y}=[\widetilde{\boldsymbol{R}}(T_{\mathrm{s}}),\widetilde{\boldsymbol{R}}(2T_{\mathrm{s}}),\cdots,\widetilde{\boldsymbol{R}}(J_wT_{\mathrm{s}})]=\boldsymbol{A}_e[\boldsymbol{R}_s(T_{\mathrm{s}}),\boldsymbol{R}_s(2T_{\mathrm{s}}),\cdots,\boldsymbol{R}_s(J_wT_{\mathrm{s}})]=\boldsymbol{A}_e\tilde{\boldsymbol{s}} \tag{11}$$

式中:T_{s} 为伪采样间隔,伪快拍数 $J_w=J/2$,$\tilde{\boldsymbol{s}}=[\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}(T_s),\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}(2T_s),\cdots,\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}(J_wT_{\mathrm{s}})]$ 为伪信号矩阵。那么 $\boldsymbol{y}$ 可以看作是虚拟互质阵列的虚拟接收信号值。

2.2 DOA估计

本节利用基于互质特性的联合UESPRIT算法求解虚拟信号 $\boldsymbol{y}$ 的DOA估计结果。将图3中虚拟阵列拆分为两个均匀子阵,如图4所示。

图4中子阵1和子阵2阵元数分别为 $2M-1$ 和 $2N-1$,阵元间距分别为 $d_1=N\lambda/2$ 和 $d_2=M\lambda/2$。设 $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$ 分别为子阵1和子阵2的接收信号值,那么 $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$ 可以表示成

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{A}_{e,1}\tilde{\boldsymbol{s}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}_{e,2}\tilde{\boldsymbol{s}} \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{A}_{e,1}=[\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_1),\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_K)]\in\mathbf{C}^{(2M-1)\times K}$ 和 $\boldsymbol{A}_{e,2}=[\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_1),\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_K)]\in\mathbf{C}^{(2N-1)\times K}$ 分别表示子阵1和子阵2的方向矩阵,$\boldsymbol{A}_{e,1}$ 和 $\boldsymbol{A}_{e,2}$ 第 k 列分别表示为

$$\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_k)=[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(-M)d_1\sin(\theta_k)/\lambda},\cdots,1,\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Md_1\sin(\theta_k)/\lambda}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

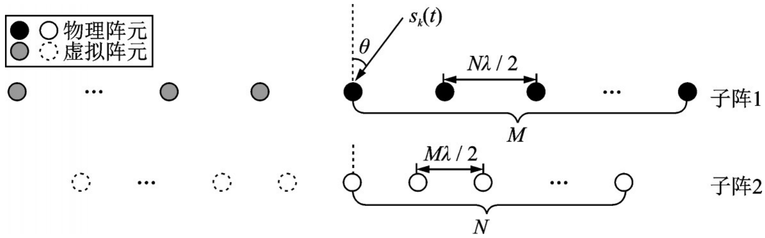

图4 虚拟阵列子阵拓扑图

Fig. 4 Subarray topology of virtual array

$$\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_k)=[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(-N)d_2\sin(\theta_k)/\lambda},\cdots,1,\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi Nd_2\sin(\theta_k)/\lambda}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

式中：$k=1,2,\cdots,K$。可以得到虚拟子阵1和子阵2的接收信号协方差矩阵分别为$\boldsymbol{R}_1=E\{\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{H}}\}$和$\boldsymbol{R}_2=E\{\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{H}}\}$。

虚拟子阵中阵元间距均大于半波长，因此先利用UESPRIT算法分别得到两个子阵的模糊DOA估计结果，再利用互质特性联合子阵DOA估计值消除测向模糊。

2.2.1 UESPRIT算法

两个虚拟子阵具有相似的阵列结构，因此，以子阵1为例详细阐述UESPRIT算法过程，然后推广至子阵2同理得到子阵2的DOA估计结果。

对于子阵1，引入酉矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_{2M-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{M-1} & \boldsymbol{0} & \mathrm{j}\boldsymbol{I}_{M-1}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{M-1} & \boldsymbol{0} & -\mathrm{j}\boldsymbol{\Pi}_{M-1}\end{bmatrix} \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{\Pi}_{M-1}$为反对角矩阵。酉矩阵满足$\boldsymbol{\Pi}_{2M-1}\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{*}=\boldsymbol{Q}_{2M-1}$，$\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}_{2M-1}=\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{T}}$。对协方差矩阵$\boldsymbol{R}_1$进行酉变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{1,u}=&\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{\Pi}_{2M-1}\boldsymbol{R}_1^{*}\boldsymbol{\Pi}_{2M-1})\boldsymbol{Q}_{2M-1}=\\ &\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{Q}_{2M-1}+\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{*}\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{*})=\\ &\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{Q}_{2M-1})\end{aligned} \tag{17}$$

式中：Re(•)表示取实值操作。酉变换后虚拟子阵1协方差矩阵变为实数矩阵，方向矩阵由$\boldsymbol{A}_{e,1}$变为$\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{e,1}$。

可知方向矩阵$\boldsymbol{A}_{e,1}$满足旋转不变关系式

$$\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{A}_{e,1}\boldsymbol{\varphi}_x=\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{A}_{e,1} \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{\varphi}_x=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_1\sin(\theta_1)/\lambda},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_1\sin(\theta_2)/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_1\sin(\theta_K)/\lambda})$，$\boldsymbol{J}_1=[\boldsymbol{I}_{(2M-2)\times(2M-2)},\boldsymbol{0}_{(2M-2)\times 1}]$和$\boldsymbol{J}_2=[\boldsymbol{0}_{(2M-2)\times 1},\boldsymbol{I}_{(2M-2)\times(2M-2)}]$。$\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{A}_{e,1}$和$\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{A}_{e,1}$分别表示选取方向矩阵$\boldsymbol{A}_{e,1}$的前$(2M-2)$行和后$(2M-2)$行。根据文献[20]，酉变换后，方向矩阵由$\boldsymbol{A}_{e,1}$变为$\boldsymbol{\Omega}_1$，因此式(18)变为

$$\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\varphi}_u=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Omega}_1 \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{K}_1=\mathrm{Re}(\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{Q}_{2M-1})$，$\boldsymbol{K}_2=\mathrm{Im}(\boldsymbol{Q}_{2M-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{Q}_{2M-1})$为新的实数选取矩阵，$\boldsymbol{\varphi}_u=diag(\tan(\pi d_1\sin(\theta_1)/\lambda),\tan(\pi d_1\sin(\theta_2)/\lambda),\cdots,\tan(\pi d_1\sin(\theta_K)/\lambda))$为实数对角矩阵，包含角度信息。

对式(17)中实数协方差矩阵进行特征分解，取最大K个特征值对应的特征矢量构成信号子空间$\boldsymbol{E}_{s1}$，可知$\boldsymbol{E}_{s1}$与实数方向矩阵$\boldsymbol{\Omega}_1$间满足关系式$\boldsymbol{E}_{s1}=\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{T}$，其中$\boldsymbol{T}$是一个维度为$K\times K$的非奇异矩阵，将

$\boldsymbol{E}_{s1}=\boldsymbol{\Omega}_1 T$代入式(19)可得

$$T^{-1}\boldsymbol{\varphi}_u T=(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{E}_{s1})^{+}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{E}_{s1} \tag{20}$$

对式(20)中$T^{-1}\boldsymbol{\varphi}_u T=(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{E}_{s1})^{+}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{E}_{s1}$进行特征分解,可得特征值为$\boldsymbol{\varphi}_u$的对角元素,记第$k$个特征值为$\alpha_k$,$k=1,2,\cdots,K$,那么虚拟子阵1的角度估计值可以表示为

$$\sin(\hat{\theta}_k^{(1)})=\arctan(\alpha_k)\lambda/(\pi d_1) \tag{21}$$

式中:$\hat{\theta}_k^{(1)}$为第1个子阵的第k个角度估计值,$k=1,2,\cdots,K$。

同理,对于虚拟子阵2,对协方差矩阵$\boldsymbol{R}_2$进行酉变换后得到$\boldsymbol{R}_{2,u}$,参考式(18—21),可以得到虚拟子阵2的角度估计结果$\hat{\theta}_k^{(2)}$,$k=1,2,\cdots,K$。注意到虚拟子阵1和虚拟子阵2阵元间距均大于半波长,因此得到的角度估计值均为模糊值,需要解模糊处理。

2.2.2 角度解模糊

对于第k个入射信源θ_k,假设虚拟子阵1和子阵2中分别存在估计模糊角度值θ_k'和θ_k'',并有以下关系式[8]

$$\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_k)=\boldsymbol{a}_{e,1}(\theta_k') \tag{22}$$

$$\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_k)=\boldsymbol{a}_{e,2}(\theta_k'') \tag{23}$$

式中:θ_k为第k个入射信源的真实值,$k=1,2,\cdots,K$。根据$d_1=N\lambda/2$和$d_2=M\lambda/2$,将式(14)和(15)分别代入式(22)和(23),可以得到

$$\sin(\theta_k)-\sin(\theta_k')=\frac{2k_1}{N} \tag{24}$$

$$\sin(\theta_k)-\sin(\theta_k'')=\frac{2k_2}{M} \tag{25}$$

式中:k_1,k_2为整数,因为$|\sin(\theta_k)-\sin(\theta_k')|<2$,$|\sin(\theta_k)-\sin(\theta_k'')|<2$,所以$k_1$和$k_2$的取值范围分别为$k_1=-(N-1),\cdots,0,\cdots,(N-1)$和$k_2=-(M-1),\cdots,0,\cdots,(M-1)$。考虑式(24)和(25)中$\theta_k'$,$\theta_k''$和$\theta_k''$可互换,因此虚拟子阵1和子阵2关于$\theta_k$的模糊值个数分别为$N$和$M$(包含真实值)。其中,联立式(24)和(25)可以得到

$$\frac{2k_1}{N}=\frac{2k_2}{M} \tag{26}$$

因为M和N互为质数,当且仅当$k_1=k_2=0$时上式成立,也就是说,当且仅当$\theta_k=\theta_k'=\theta_k''$时,式(26)成立。可以得出结论,虚拟子阵1和子阵2中关于θ_k的所有模糊值中只有一个是相等的,也就是真实估计值。

根据上述结论,将UESPRIT算法得到的角度估计值$\hat{\theta}_k^{(1)}$和$\hat{\theta}_k^{(2)}$分别代入式(24)和式(25),对于第k个入射信源θ_k,可以得到虚拟子阵1的N个模糊值,其中第n个模糊值记为$\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}(n=1,2,\cdots,N)$。同理可以得到虚拟子阵2的$M$个模糊值,其中第$m$个模糊值记为$\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}(m=1,2,\cdots,M)$。在无噪声情况下,可知$\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}$和$\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}$中有且只有一对值相等,且为$\theta_k$的真实估计值。因此构造表达式

$$\gamma=\left|\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}-\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}\right| \quad \forall n\in[1,N],m\in[1,M] \tag{27}$$

求得$\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}$和$\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}$中的一对值使得γ最小,记为$\hat{\theta}_{k,t}^{(1)}$和$\hat{\theta}_{k,p}^{(2)}$,$1\leqslant t\leqslant N$,$1\leqslant p\leqslant M$。可以得出θ_k的真实估计值为$\hat{\theta}_k=(\hat{\theta}_{k,t}^{(1)}+\hat{\theta}_{k,p}^{(2)})/2$,$k=1,2,\cdots,K$。

2.3 所提DOA估计算法步骤

本文提出的CA-UESPRIT算法步骤如下:

(1) 得到互质线阵中第$p(p=1,2,\cdots,M+N-1)$个阵元接收信号$x_p(t)$,利用不同时长间隔τ求阵

元接收信号间的互相关函数$R_{x_p x_1}(\tau)$。

(2) 根据式(8—11)得到共轭增广虚拟阵列接收信号$\boldsymbol{y}$。

(3) 利用UESPRIT算法分别对虚拟子阵1和子阵2接收信号$\boldsymbol{y}_1$和$\boldsymbol{y}_2$进行DOA估计，步骤如式(16—21)，得到两个子阵的模糊角估计值$\hat{\theta}_k^{(1)}$和$\hat{\theta}_k^{(2)}$，$k=1,2,\cdots,K$。

(4) 将$\hat{\theta}_k^{(1)}$和$\hat{\theta}_k^{(2)}$代入式(24)和式(25)解出虚拟子阵1和子阵2所有模糊值$\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}(n=1,2,\cdots,N)$和$\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}(m=1,2,\cdots,M)$，通过式(27)求解$\hat{\theta}_{k,n}^{(1)}$和$\hat{\theta}_{k,m}^{(2)}$中的一对值$\hat{\theta}_{k,t}^{(1)}$和$\hat{\theta}_{k,p}^{(2)}$使$\gamma$最小，得到第$k$个入射信源$\theta_k$的估计值为$\hat{\theta}_k=(\hat{\theta}_{k,t}^{(1)}+\hat{\theta}_{k,p}^{(2)})/2$，$k=1,2,\cdots,K$。

3 性能分析

3.1 最大可辨识信源数

根据文献[1,2]，一个具有N个传感器的阵列最多能辨识$N-1$信源。因此，互质阵列解模糊方法下最大可辨识信源数取决于传感器数较小的子阵。令$T=\mathrm{Min}(M,N)$，其中$\mathrm{Min}(M,N)$表示取M和N中的最小值。根据文献[17]，传统互质线阵下基于互质特性的联合UESPRIT算法，最大可辨识信源数为$T-1$。然而，根据2.2节描述，本文提出的CA-UESPRIT算法通过共轭增广特性使得虚拟子阵阵元数分别达到$2M-1$和$2N-1$，因此CA-UESPRIT算法的最大可辨识信源数为$\mathrm{Min}(2M-1,2N-1)-1$，也就是$2T-2$。

3.2 复杂度分析

以复乘次数来评估DOA估计算法的复杂度，CA-UESPRIT算法主要运算复杂度包括：构造虚拟阵列接收信号$\boldsymbol{y}$所需复杂度为$O\{J_w(2(M+N-1)-1)\}$，其中J_w为伪快拍数；得到虚拟子阵1和子阵2协方差矩阵$\boldsymbol{R}_1$和$\boldsymbol{R}_2$的复杂度分别为$O\{J_w(2M-1)^2\}$和$O\{J_w(2N-1)^2\}$；得到实数协方差矩阵$\boldsymbol{R}_{1,u}$和$\boldsymbol{R}_{2,u}$的复杂度分别为$O\{2(2M-1)^3\}$和$O\{2(2N-1)^3\}$。因此，总运算复杂度为$O\{J_w(2M+2N-3+(2M-1)^2+(2N-1)^2)+2(2M-1)^3+2(2N-1)^3\}$。本文利用UESPRIT算法实现DOA估计，不需要计算协方差矩阵特征分解以及后续总体最小二乘法的复杂度，因此复杂度相比于ESPRIT算法要低。

3.3 优点总结

本文提出的CA-UESPRIT算法具有如下优点：

(1) 相比于传统互质线阵下基于互质特性的联合UESPRIT算法，CA-UESPRIT算法空间自由度更高。

(2) CA-UESPRIT算法具有比联合UESPRIT算法更优的DOA估计性能。

(3) CA-UESPRIT算法通过引入酉变换矩阵降低了ESPRIT算法中的复乘运算次数，算法复杂度较低。

4 仿真结果

本文采用1 000次蒙特卡洛仿真的求根均方误差(Root mean squares error, RMSE)评估DOA估计算法性能，定义RMSE为

$$\mathrm{RMSE}=\sum_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{1}{1\,000}\sum_{q=1}^{1\,000}(\theta_{k,q}^{\mathrm{est}}-\theta_k)^2} \tag{28}$$

式中：$\theta_{k,q}^{\mathrm{est}}$为第$q$次蒙特卡洛仿真中第$k$个信号源的DOA估计结果，假设远场空域有$K$个入射信源，入射

角为θ,J为快拍数,虚拟阵列伪快拍数为$J_w = J/2$。

图5为本文DOA估计算法在信噪比SNR=0 dB条件下角度估计图。图5中横坐标为仿真次数,纵坐标为估计出的角度值。仿真参数设置为阵元数$M=3$,$N=5$,快拍数$J=200$。其中图5(a)入射信源数$K=3$, $\theta=[25°,30°,35°]$,图5(b)入射信源数$K=4$, $\theta=[25°,30°,35°,40°]$。从图5中可以看出,本文提出的CA-UESPRIT算法可以准确估计出信源角度值,且仿真结果验证了3.1节中提出的本文算法可辨识信源数能达到$2T-2=4$,其中$T=\mathrm{Min}(M,N)$。而根据文献[17],传统互质线阵下基于互质特性的联合UESPRIT算法,可辨识信源数仅能达到$T-1=2$。此外,对比图5(a)和图5(b),可以看出随着信源数的增加,算法估计角度精确性变差,图5(a)中RMSE值对应于不同仿真次数分别为0.084 2,0.083 1,0.083 8,0.086 6,0.082 7,如图5(b)所示, RMSE值分别为0.133 0,0.129 5,0.137 2,0.127 6,0.137 2。可以得出信源数增加使得RMSE性能降低。

图6为互质线阵下不同DOA估计算法随信噪比SNR变化下的RMSE性能对比图,仿真参数均设置为阵元数$M=3$,$N=5$和$K=2$,$\theta=[20°,40°]$。算法包括基于共轭增广的CA-UESPRIT算法、CA-ESPRIT算法和CA-PM算法以及传统互质线阵下基于互质特性的联合UESPRIT算法[17]、ESPRIT算法[9]和PM算法。从图6可以看出,随着信噪比的增加,所提CA-UESPRIT算法的RMSE性能逐步变优,也就是说,信噪比的增加带来角度估计精度的提升。对比不同的DOA估计算法性能,可以看出,所提的CA-UESPRIT算法DOA估计性能与CA-ESPRIT算法十分相近,但CA-UESPRIT算法将协方差矩阵从复数域转化到实数域,所以算法复杂度更低,且CA-UESPRIT算法DOA估计性能要优于CA-PM算法。此外,相比于互质线阵下基于互质特性的联合DOA估计算法[9,17],本文提出基于共轭增广特性DOA估计算法由于构造的虚拟阵列信号具有更大的空间自由度,因此在RMSE性能全面占优。

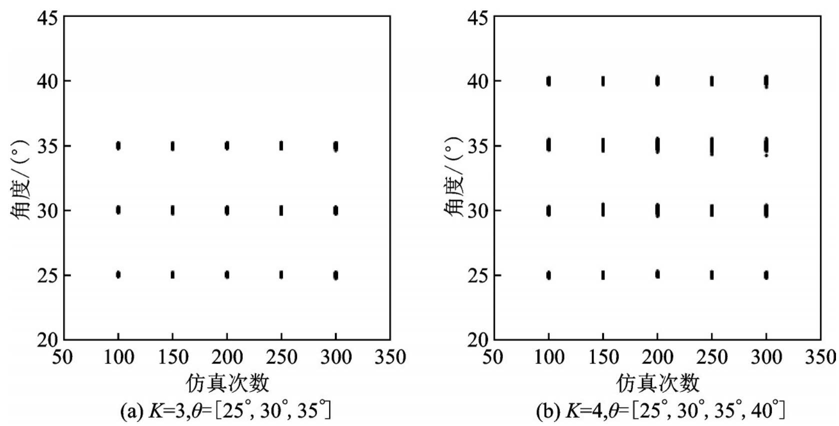

图5 DOA估计结果散点图

Fig.5 Scatter of DOA estimation results

图7为互质线阵下不同DOA估计算法随快拍数J变化下的RMSE性能对比图,仿真参数均设置为阵元数$M=3$,$N=5$和$K=2$,$\theta=[20°,40°]$,算法类型与图6中相同。从图7可以看出,随着快拍数的增加,所提的CA-UESPRIT算法DOA估计性能提升。此外,对比不同的DOA估计算法,可以看出基于共轭增广类的DOA估计算法具有更优的RMSE性能。此外,所提的CA-UESPRIT算法DOA估计性能优于CA-PM算法且接近于CA-ESPRIT算法,但CA-UESPRIT算法复杂度较低(具体分析参考图6分析结果)。

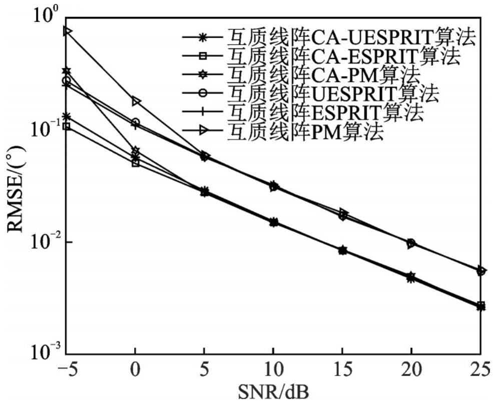

图6 互质阵列下不同算法RMSE性能对比图($J=200$)

Fig.6 Comparison of RMSE performance with different algorithms for coprime array ($J=200$)

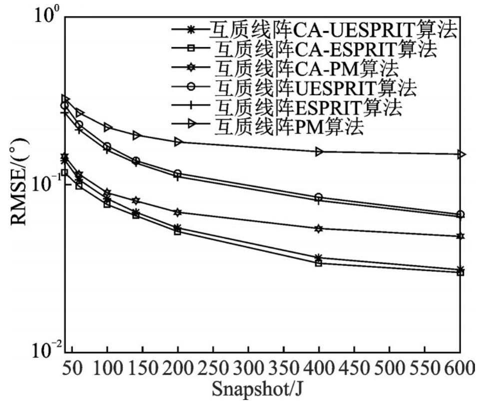

图7 互质阵列下不同算法RMSE性能对比图(SNR=0 dB)

Fig.7 Comparison of RMSE performance with different algorithms for coprime array (SNR=0 dB)

图8为本文提出的CA-UESPRIT算法下RMSE随信噪比SNR和快拍数J变化的性能对比图，仿真参数均设置为阵元数$M=3$，$N=5$和$K=2$，$\theta=[20°,40°]$。从图8中可以看出，随着信噪比SNR和快拍数J的增大，所提的DOA估计算法角度估计性能变优。

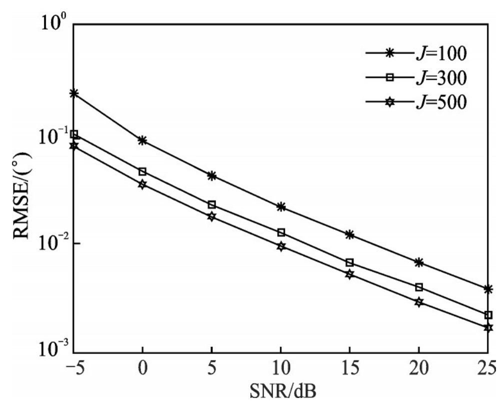

图8 不同快拍数条件下本文DOA估计算法RMSE性能对比图

Fig.8 Comparison of RMSE performance of DOA estimation algorithm under different snapshots

5 结束语

本文提出了互质线阵中基于共轭增广的DOA估计算法。该算法首先利用不同时长间隔下物理阵元接收信号间互相关函数的共轭对称特性，构造虚拟阵列接收信号以扩展阵列孔径和提高空间自由度。然后采用基于互质特性的联合UESPRIT算法实现DOA估计。相比于传统互质线阵下联合的UESPRIT算法，本文提出的基于共轭增广的UESPRIT(CA-UESPRIT)算法角度估计性能更优，空间自由度更高。此外，相比于ESPRIT算法，CA-UESPRIT算法通过引入酉变换矩阵降低复乘运算次数，算法复杂度较低。探索更高效的DOA估计算法将会是下一步的研究方向。

参考文献：

[1] 张小飞，沈金清，汪云飞. 电磁矢量互质阵中基于降维Capon的DOA和极化估计算法[J]. 数据采集与处理，2018，33(6): 13-21.

Zhang Xiaofei, Shen Jinqing, Wang Yunfei. DOA and polarization estimation of electromagnetic vector sensors coprime array via reduced-dimension capon [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2018, 33(6): 13-21.

[2] 徐友根，刘志文，龚晓峰. 极化敏感阵列信号处理[M].北京:北京理工大学出版社，2013.

Xu Yougen, Liu Zhiwen, Gong Xiaofeng. Polarization sensitive array signal processing [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013.

[3] 殷冰洁，徐友根，刘志文. 基于COLD阵列的联合稀疏重构信号DOA估计方法[J]. 数据采集与处理，2018，33(1): 85-92.

Yin Bingjie, Xu Yougen, Liu Zhiwen. DOA estimation with COLD array using joint sparse reconstruction [J]. Journal of Data

Acquisition and Processing, 2018, 33(1): 85-92.

[4] Stoica P, Arye N. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound [J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1989, 37(5): 720-741.

[5] Roy R, Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Trans ASSP, 1986, 37(7): 984-995.

[6] Vaidyanathan P P, Pal P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 573-586.

[7] Pal P, Vaidyanathan P P. Coprime sampling and the music algorithm [C]// Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop.[S.l.]: IEEE, 2011: 289-294.

[8] Zhou C, Shi Z, Gu Y, et al. DECOM: DOA estimation with combined MUSIC for coprime array [C]// International Conference on Wireless Communications & Signal Processing. [S.l.]:IEEE, 2013: 1-5.

[9] 张小飞,林新平,郑旺,等.互质阵中空间谱估计研究进展[J].南京航空航天大学学报,2017,49(5): 635-644.
Zhang Xiaofei, Lin Xinping, Zheng Wang, et al. Research progress on spatial spectrum estimation based on coprime array [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 49(5): 635-644.

[10] Sun F, Lan P, Gao B. Partial spectral search-based DOA estimation method for co-prime linear arrays [J]. Electronics Letters, 2015, 51(24): 2053-2055.

[11] Zhang D, Zhang Y, Zheng G, et al. Improved DOA estimation algorithm for co-prime linear arrays using root-MUSIC algorithm [J]. Electronics Letters, 2017,53(18): 1277-1279

[12] Li J, Shen M, Jiang D. DOA estimation based on combined ESPRIT for co-prime array[C]// Antennas and Propagation. [S. L.]:IEEE, 2017: 117-118.

[13] Li J, Jiang D, Zhang X. DOA estimation based on combined unitary ESPRIT for coprime MIMO radar[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 21(1): 96-99.

[14] Sun F, Gao B, Chen L, et al. A low-complexity ESPRIT-Based DOA estimation method for Co-Prime linear arrays [J]. Sensors, 2016, 16(9): 1367.

[15] Li J, Wang F, Jiang D. DOA estimation based on real-valued cross correlation matrix of coprime arrays.[J]. Sensors, 2017, 17(3): 638.

[16] Shan Z, Yum T S P. A conjugate augmented approach to direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(11): 4104-4109.

[17] Li J, Jiang D, Zhang X. DOA estimation based on combined unitary ESPRIT for coprime MIMO radar[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(1): 96-99.

[18] Sun F, Lan P, Gao B, et al. An efficient dictionary learning-based 2-D DOA estimation without pair matching for Co-prime parallel arrays[J]. IEEE Access, 2018,6: 1.

[19] Zheng W, Zhang X, Xu L, et al. Unfolded coprime planar array for 2D direction of arrival estimation: An aperture-augmented perspective[J]. IEEE Access, 2018, 6: 22744-22753.

[20] Li J, Zhang X. Unitary subspace-based method for angle estimation in Bistatic MIMO radar[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2014, 33(2): 501-513.

作者简介:

林新平(1994-),男,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理,E-mail: Hymanlin_0624@163.com。

张小飞(1977-),男,教授,博士生导师,研究方向:阵列信号处理、移动通信技术,E-mail:zhangxiaofei @nuaa.edu.cn。

沈金清(1995-),女,硕士研究生,研究方向:阵列信号处理,E-mail: sjq_nuaa@163.com。

(编辑:陈珺)