

基于自迭代主元抽取的工作模态参数识别

张天舒¹ 王成^{1,2} 官威¹ 王建英¹ 刘艳¹ 谢晓东¹

(1. 华侨大学计算机科学与技术学院, 厦门, 361021; 2. 西安交通大学机械强度与振动国家重点实验室, 西安, 710049)

摘要: 针对传统批处理主成分分析工作模态参数识别中存在的矩阵奇异值或特征值分解病态问题, 本文提出了一种基于自迭代主元抽取的工作模态参数识别方法。与传统批处理主成分分析通过矩阵分解一次获得所有主成分不同, 该方法通过自迭代逐一抽取主成分从而实现主要贡献工作模态的逐一识别。理论分析表明, 该方法的时间复杂度和空间复杂度比传统批处理主成分分析工作模态参数识别方法更低。在简支梁仿真数据集上的识别结果表明, 自迭代主元抽取算法可以从平稳随机响应信号中有效地识别出线性时不变结构的主要贡献模态振型和固有频率, 在响应测点和采样时间较多时其时间开销较传统方法也更小。

关键词: 工作模态参数识别; 自迭代; 主成分分析; 奇异值; 病态问题; 主元抽取

中图分类号: TP274 **文献标志码:** A

Operational Modal Analysis Based on Self-iterative Principal Component Extraction

Zhang Tianshu¹, Wang Cheng^{1,2}, Guan Wei¹, Wang Jianying¹, Liu Yan¹, Xie Xiaodong¹

(1. College of Computer Science and Technology, Huaqiao University, Xiamen, 361021, China; 2. State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China)

Abstract: Aiming at singular value of matrix decomposition and ill-posed problems in traditional batch processing principal component analysis (PCA) based operational modal analysis (OMA), an operational modal identification method based on self-iterative principal component extraction is proposed. Different from traditional batch processing PCA, which obtains all principal components by matrix decomposition one time, the proposed method can realize the identification of main contribution operational modals by self-iterative principal component extraction one by one. Theoretical analysis shows its lower time and spatial complexity than traditional batch processing PCA based OMA. The simulation results on simple beam datasets show that the self-iterative principal component extraction algorithm can identify effectively main contribution modals and natural frequency of linear time invariant structure from smooth and random response signals. And it has smaller time cost in the case of more response points and more sampling time in contrast with traditional methods.

Key words: operational modal analysis; self-iteration; principal component analysis; singular value of matrix decomposition; ill-posed problems; principal component extraction

引言

模态参数是决定结构动力学特性的重要参数,如模态固有频率、模态阻尼比及主振型等,是结构动力特性研究的一个重要的逆问题。此外,当系统振动处于固有频率时,模态振型为振动状态提供了数学描述。因此,模态参数识别在结构建模与模型修正、灵敏度分析、振动主被动控制、损伤识别和结构健康监测等领域起着至关重要的作用^[1-3]。不同于传统的实验模态分析(Experimental modal analysis, EMA),工作模态分析(Operational modal analysis, OMA)可以仅从测得的振动响应信号中识别出模态参数。近几年,OMA是机械振动研究领域的热点,并得到了广泛的应用^[4-6]。

主成分分析(Principal component analysis, PCA)算法作为一种重要的线性降维方法,最早于1901年被Pearson提出^[7]。现在PCA算法已经被广泛地应用于工作模态参数识别领域^[8,9]。传统的批处理主成分分析算法通过奇异值分解(Singular value decomposition, SVD)或者特征值分解(Eigenvalue decomposition, EVD)^[10]来获得线性变换矩阵和主成分。然而,在SVD和EVD方法中分别存在矩阵分解的奇异值问题和病态问题。由于这些缺陷,传统的批处理主成分分析算法可能不能够准确地识别出结构的模态振型和固有频率^[11]。

针对矩阵分解的奇异值问题,国内外专家学者提出了不同的解决方案^[12,13],而对于矩阵分解的病态问题,则可以通过正则化方法^[14]、神经网络^[15]和主元加权迭代法^[16]等方法来解决。为了克服在工作模态参数识别中可能存在的矩阵分解的奇异值问题和病态问题,本文提出了一种自迭代主元抽取算法。该算法通过迭代计算主成分,避免了矩阵分解所带来的缺陷,实现了根据需求进行主元抽取,具有更小的时间复杂度和空间复杂度。此外,算法精度可控,可以通过调节阈值来满足不同的实际需求。

1 基于传统批处理主成分分析的工作模态分析

1.1 PCA的数学模型

已知空间 \mathbf{R}^m 上有 m 个观测信号 $\mathbf{X}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T \in \mathbf{R}^{m \times T}$,该信号是由空间 \mathbf{R}^n 上的 n 个不相关变量 $\mathbf{Y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbf{R}^{n \times T}$ 通过线性变换矩阵 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 混叠得到,即

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Y}(t) \quad t=1, 2, \dots, T \quad (1)$$

且 \mathbf{W} 满足

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}_{n \times n} \quad (2)$$

PCA算法的目标是仅通过观测信号 $\mathbf{X}(t)$ 得到线性变换矩阵 \mathbf{W} 和 n 个不相关特征变量 $\mathbf{Y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ 。这 n 个不相关特征变量 $\mathbf{Y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ 被称作观测信号 $\mathbf{X}(t)$ 的主成分。

1.2 基于PCA的工作模态参数识别

对于 m 自由度的小阻尼线性时不变结构,其位移响应可以用模态坐标表示为

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\psi}\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\psi}_i q_i(t) \quad t=1, 2, \dots, T \quad (3)$$

式中:矩阵 $\mathbf{X}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T \in \mathbf{R}^{m \times T}$ 是由位移向量 $x_i(t) \in \mathbf{R}^{1 \times T}$ 组成的位移矩阵, $\boldsymbol{\psi}=[\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_m] \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是由模态振型向量 $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 组成的模态振型矩阵, $\mathbf{Q}(t)=[q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)]^T \in \mathbf{R}^{m \times T}$ 是由模态响应向量 $q_k(t) \in \mathbf{R}^{1 \times T}$ 组成的模态响应矩阵。只要结构各阶模态固有频率不相等,则模态振型向量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 满足

$$\boldsymbol{\psi}_i^\top \boldsymbol{\psi}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4)$$

式中各阶模态响应向量 $\mathbf{q}_k(t)$ 之间相互独立,且 $\mathbf{Q}(t)$ 满足

$$E[\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^\top(t)] = \mathbf{\Lambda}_{m \times m} \quad (5)$$

固有频率 f_i 和阻尼系数 ξ_i 可以通过类似于 FFT 的单自由度 (Single degree of freedom, SDOF) 拟合技术从模态响应向量 $\mathbf{q}_k(t)$ 中得到。如果模态响应向量 $\mathbf{q}_k(t)$ 为平稳随机信号,那么经 FFT 变换后其峰值处对应的频率即为模态固有频率。图 1 为基于 PCA 的 OMA 流程图。

1.3 矩阵分解的奇异值问题和病态问题

定义 1 对于 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ 的非负平方根是矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 的奇异值。

定理 1 对于矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 存在正交矩阵

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbf{R}^{m \times m}$$

和

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

使得

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\Sigma}_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, σ_i 为 \mathbf{A} 的奇异值, r 是非零奇异值的个数。

定理 2 对于矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 为矩阵 \mathbf{A} 的奇异值,并且存在 $\sigma_1 \geq |\lambda_i| \geq \sigma_m (i=1, 2, \dots, m)$ [12]。因此, 奇异值不等于特征值。

定义 2 如果输入数据存在一个很小的误差, 那么输出数据的相应误差会很大, 该问题被称为病态问题 [17]。

对于观测信号矩阵 $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)]^\top \in \mathbf{R}^{m \times T}$, 存在

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m] \in \mathbf{R}^{m \times m}$$

和

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

使得

$$\mathbf{U} \mathbf{X}(t) \mathbf{V}^\top = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \quad (7)$$

式中: $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_m$ 为矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 的奇异值。实际上, 矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 的奇异值是协方差矩阵 $\frac{1}{m}(\mathbf{X}(t)^\top \mathbf{X}(t))$ 的平方根, 即

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{\lambda_1} \\ \sigma_2 &= \sqrt{\lambda_2} \\ &\vdots \\ \sigma_m &= \sqrt{\lambda_m} \end{aligned}$$

定理 2 表明, 通过 SVD 获得的奇异值是一估计值, 它并不等于真实的特征值, 因此通过 SVD 分解得到的主成分也存在误差 [18]。

对于观测信号矩阵 $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)]^\top \in \mathbf{R}^{m \times T}$, 存在如下的变换

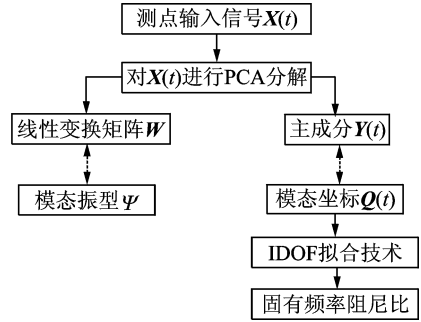


图 1 基于 PCA 的 OMA 流程图

Fig. 1 Flowchart of OMA based on traditional PCA procedure

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}(t) \in \mathbf{R}^{n \times T} \quad n \leq m \quad (8)$$

假设存在线性变换 $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{Y}(t)$, 从原始的 m 维特征空间到 n 维特征空间。

观测信号矩阵均值为 0, 即

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

自相关矩阵 $\mathbf{C}_{XX} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 可以通过下列方式得到

$$\mathbf{C}_{XX} = \frac{1}{T} (\mathbf{X}(t)^T \mathbf{X}(t)) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_2^T(t) & \cdots & \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_m^T(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_2(t) \mathbf{x}_2^T(t) & \cdots & \mathbf{x}_2(t) \mathbf{x}_m^T(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_m(t) \mathbf{x}_1^T(t) & \mathbf{x}_m(t) \mathbf{x}_2^T(t) & \cdots & \mathbf{x}_m(t) \mathbf{x}_m^T(t) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{T} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T x_1(t) x_1(t) & \sum_{t=1}^T x_1(t) x_2(t) & \cdots & \sum_{t=1}^T x_1(t) x_m(t) \\ \sum_{t=1}^T x_2(t) x_1(t) & \sum_{t=1}^T x_2(t) x_2(t) & \cdots & \sum_{t=1}^T x_2(t) x_m(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T x_m(t) x_1(t) & \sum_{t=1}^T x_m(t) x_2(t) & \cdots & \sum_{t=1}^T x_m(t) x_m(t) \end{bmatrix}$$

\mathbf{C}_{XX} 相应的特征向量 \mathbf{v}_k 和特征值 λ_k 可通过式(10)得到, 即

$$\mathbf{C}_{XX} \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

将特征值按降序排序

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m \quad (11)$$

将特征值对应的 n 个特征向量按式(11)顺序排列得到矩阵 \mathbf{W} , 即

$$\mathbf{W} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \quad (12)$$

因为 EVD 方法仅仅适用于方阵, 所以原始信号矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 必须通过计算它的自相关矩阵 \mathbf{C}_{XX} 来得到其特征值。在计算协方差矩阵的过程中, 原始信号矩阵中存在的误差可能会被放大。从 \mathbf{C}_{XX} 求解过程可以看出误差被放大的原因, 因此在矩阵的 EVD 分解过程中存在病态问题^[14, 16, 19]。

1.4 基于传统批处理 PCA 的工作模态参数识别

传统批处理主成分分析主要是通过对响应信号 $\mathbf{X}(t)$ 进行 SVD 或 EVD 来实现, 因此其工作模态参数识别具有 SVD 和 EVD 方法中矩阵分解奇异值或特征值分解病态的缺陷。

工作模态参数识别仅需要从振动响应信号中识别出占主要贡献的前几个模态, 识别所有的模态既无可能, 也无必要。而传统批处理主成分分析通过矩阵分解一次获得所有主成分, 不仅增加了计算时间, 而且需要消耗大量内存来存贮大型矩阵。

2 基于自迭代主元抽取算法的工作模态参数识别

2.1 自迭代主元抽取方法

自迭代主元抽取的精髓是 NIPALS 算法^[20], 之后有国内外学者对该算法的计算过程进行了有效的改进, 将特征向量的更新转化为小尺寸辅助向量的更新, 在满足一定精度更新特征值和特征向量的同时, 有效地提高了计算速度^[21, 22]。从原始信号矩阵 $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{m \times T} (t = 1, 2, \dots, T)$ 中任意抽取 1 列, 通过迭代方法计算第 1 个主成分向量 $\mathbf{y}_1(t) \in \mathbf{R}^{1 \times T}$ 和第 1 个矩阵变换向量 $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 。然后将它们从 $\mathbf{X}(t)$

中减去, 所得到的结果是第 1 个误差矩阵 $\mathbf{E}_1(t) \in \mathbf{R}^{m \times T}$ 。将 $\mathbf{E}_1(t)$ 取代 $\mathbf{X}(t)$, 然后计算第 2 个主成分向量 $\mathbf{y}_2(t)$ 和第 2 个变换矩阵向量 \mathbf{w}_2 , 即

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(t) &= \mathbf{X}(t) - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{E}_2(t) &= \mathbf{E}_1(t) - \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{y}_2(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{E}_{m-1}(t) &= \mathbf{E}_{m-2}(t) - \mathbf{w}_{m-2} \cdot \mathbf{y}_{m-2}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

基于自迭代主元抽取方法步骤为:

(1) 初始化 $i=1$;

(2) 从信号矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 中任意选择第 L 列数据向量 $\mathbf{x}_l(t)$, 并且令 $\mathbf{y}_i^{(j)}(t) = \mathbf{x}_l(t)$, $j=1$;

(3) 计算 $\mathbf{w}_i^{(j)} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$: $\mathbf{w}_i^{(j)} = (\mathbf{X}(t) \mathbf{y}_i^{(j)T}(t)) / (\mathbf{y}_i^{(j)T}(t) \mathbf{y}_i^{(j)T}(t))$;

(4) 将向量 $\mathbf{w}_i^{(j)}$ 的长度归一化 $\mathbf{w}_i^{(j)} = \frac{\mathbf{w}_i^{(j)}}{\|\mathbf{w}_i^{(j)}\|}$;

(5) 更新 $\mathbf{y}_i^{(j+1)}(t)$: $\mathbf{y}_i^{(j+1)}(t) = \mathbf{w}_i^{(j)T} \mathbf{X}(t) / \mathbf{w}_i^{(j)T} \mathbf{w}_i^{(j)}$;

(6) 将步骤(5)中的 $\mathbf{y}_i^{(j+1)}(t)$ 与步骤(2)中的 $\mathbf{y}_i^{(j)}(t)$ 进行比较, 定义 $\beta_i^{(j+1)} = \frac{\|\mathbf{y}_i^{(j+1)}(t) - \mathbf{y}_i^{(j)}(t)\|}{\|\mathbf{y}_i^{(j)}(t)\|}$, α 为

精度要求, 如果 $\beta_i^{(j+1)} \leq \alpha$, 即误差在规定范围内(算法收敛), 转向步骤(7), 否则 $j = j+1$ 并返回步骤(3);

(7) 计算 $\lambda_i = \left\| \frac{1}{T} \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^T(t) \mathbf{w}_i \right\| / \mathbf{w}_i$;

(8) 计算误差矩阵

$$\mathbf{E}_i(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{y}_i(t) \quad (14)$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{E}_i(t) \quad (15)$$

(9) 定义 $\epsilon_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{s=1}^i \lambda_s}$, η 为截断误差, 如果 $\epsilon_i > \eta$, $i = i+1$, 则返回步骤(2), 计算 $\mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t), \dots$,

$\mathbf{y}_i(t)$ 与 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i$;

步骤(7)是为了计算所对应主成分的最大贡献量, 因此 λ_i 可以近似看成第 i 主成分的贡献量

$$\sigma_i^2 = \lambda_i \quad (16)$$

已计算所有主成分的方差累计贡献量

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^i \lambda_j \quad (17)$$

定义

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^i \lambda_j} \quad (18)$$

式中 ϵ_i 为当前主成分的方差贡献量占有所有已算出的主成分方差贡献量的比例。

设定截断误差 η , 如果 $\epsilon_i < \eta$, 则表明当前主成分已经不足够重要, 因此停止迭代, 主元抽取的过程结束。

在自迭代主元抽取算法的步骤中, $\mathbf{y}_i(t)$ 是第 i 个残差矩阵的第一主成分。比较步骤(5)中的 $\mathbf{y}_i(t)$, 判断 $\mathbf{y}_i(t)$ 是否满足需求, 如果满足, 更新误差矩阵, 并得到新的误差矩阵的第一主成分。从而得到一系列主成分向量 ($\mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t), \dots, \mathbf{y}_i(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)$)。式(14, 15)表明 $\mathbf{y}_i(t)$ 的方差贡献量比 $\mathbf{y}_{i+1}(t)$ 要大。总之, 第 1 个误差矩阵迭代产生的第一主成分向量 $\mathbf{y}_i(t)$ 便是原始信号矩阵的第一主成分, 主成分向量 $\mathbf{y}_2(t)$ 是第二主成分, 依次类推。其流程图如图 2 所示。

2.2 算法性能分析和比较

(1) SVD 需要计算并存储矩阵 U, V 和 $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$, 而 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 和特征向量矩阵 V . 因为原始观测信号矩阵 $X(t)$ 非常大, 所以矩阵 $U, V, \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m), C_{XX}, \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 和 V 也都非常大. 因此相比较传统的批处理 PCA 算法, 自迭代主元抽取算法的空间复杂度更小.

(2) 不同于传统的批处理 PCA 算法一次计算得到所有的特征值以及特征向量, 自迭代主元抽取算法每次迭代只得到一个主成分. 因此可以依据模态参数识别的现实需求迭代产生有限个主成分, 从而相比较传统的批处理 PCA 算法大大降低了时间复杂度.

(3) 自迭代主元抽取方法的精度是指在工作模态参数识别中识别的模态固有频率和模态振型的精度, 其具体评判标准包括振型的模态置信准则 (Modal confidence criterion, MAC) 值、固有频率值和傅里叶变换的主峰高度、次峰的个数和高度. 自迭代主元抽取可以通过迭代直接获得主成分, 精度只取决于设定的阈值, 能有效地避免矩阵分解的奇异值问题和特征值分解的病态问题.

自迭代主元抽取算法与传统 PCA 算法性能比较如表 1 所示, 其中 m 为观测信号矩阵维度, T 为观测信号采样点个数, r 为自迭代主元抽取算法根据需求所抽取的阶数, T_{\max} 为自迭代主元抽取算法内循环所设置的最大迭代次数. 因为在实际应用中原始观测数据量很大, 故表 1 中的比较均以观测信号矩阵较大为前提.

表 1 自迭代主元抽取算法与传统 PCA 算法性能比较

Tab. 1 Algorithm performance comparison between self-iterative principal component extraction and traditional PCA

算法	时间复杂度	空间复杂度 (所需存储的大型矩阵)	算法鲁棒性	算法精度
基于 SVD 的批处理 PCA	$O(m^2)$ 较高	$\mathbf{R}^{m \times m} \times 2 + \mathbf{R}^{T \times T} + \mathbf{R}^{m \times T}$	奇异值问题	相对较低
基于 EVD 的批处理 PCA	$O(m^2)$ 较高	$\mathbf{R}^{m \times m} \times 2 + \mathbf{R}^{m \times T} \times 2$	病态问题	受观测信号精度的影响较大
自迭代主元抽取算法	$O(rT_{\max})$ 较低	$\mathbf{R}^{m \times T}$	避免奇异值和病态问题	由参数 α 决定

3 工作模态参数识别仿真

3.1 仿真数据的产生和参数设置

对无阻尼的简支梁施加正弦激励; 将长为 1 m 的无阻尼简支梁等间隔均分成 1 000 等份, 产生 1 001

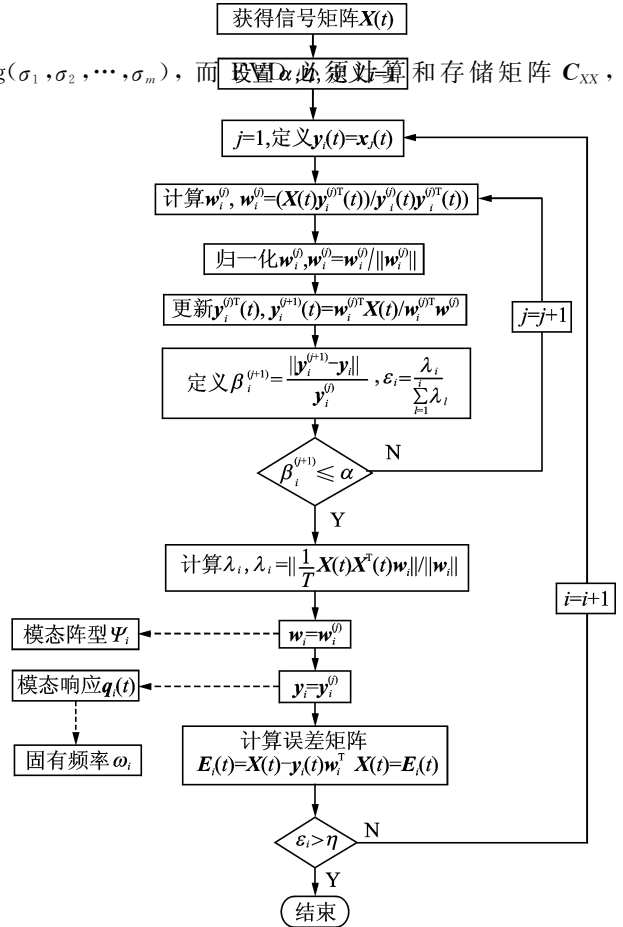


图 2 基于自迭代主元抽取算法识别主要工作模态的流程

Fig. 2 Process of OMA based on self-iterative principal component extraction

个响应测点;在 0.2 m 处集中施加多频正弦激励并得到响应数据;采样频率为 4 096 Hz,时域采样点 $T=20\ 481$ 。以上数据通过 Matlab 7.0 仿真得到,以有限元求解得到的无阻尼结果作为真正的模态振型和模态固有频率。

计算机配置为操作系统 Windows 7 旗舰版 64 位(6.1,版本 7601);制造商 Dell Inc.;型号 Inspiron N5110;处理器 Intel(R) Core(TM) i5-2430M;CPU @2.40 Hz(4 CPUs),~2.4 GHz;内存 4 096 MB RAM。

使用模态振型评价标准(MAC)来比较自迭代主元抽取算法识别的线性变换向量与真实模态振型,其计算方式为^[5]

$$\text{MAC}_{\varphi_i\phi_i} = \frac{(\varphi_i^T \phi_i)^2}{(\varphi_i^T \varphi_i)(\phi_i^T \phi_i)} \quad (19)$$

式中: φ_i 为识别的振型, ϕ_i 表示真实的振型, $(\varphi_i^T \phi_i)$ 表示两个向量的内积。MAC 取值范围为 $0 \leq \text{MAC}_{\varphi_i\phi_i} \leq 1$,当 MAC 值越接近 1,识别振型越接近真实振型。

精度和截断参数设置如下:精度要求 $\alpha=0.000\ 001$;截断误差 $\eta=0.001$;最大迭代次数 $T_{\max}=100$ 。

3.2 工作模态参数识别仿真结果

图 3 为自迭代主元抽取 PCA 算法识别的主成分 FFT 变化的结果。表 2 为识别出的模态频率与真实模态固有频率的定量比较。图 4 和表 3 为该算法识别的线性变换向量与真实模态振型的比较。

根据精度和截断参数的设置,该算法在抽取第 8 主成分后停止。因为剩下的 992 阶主成分的方差

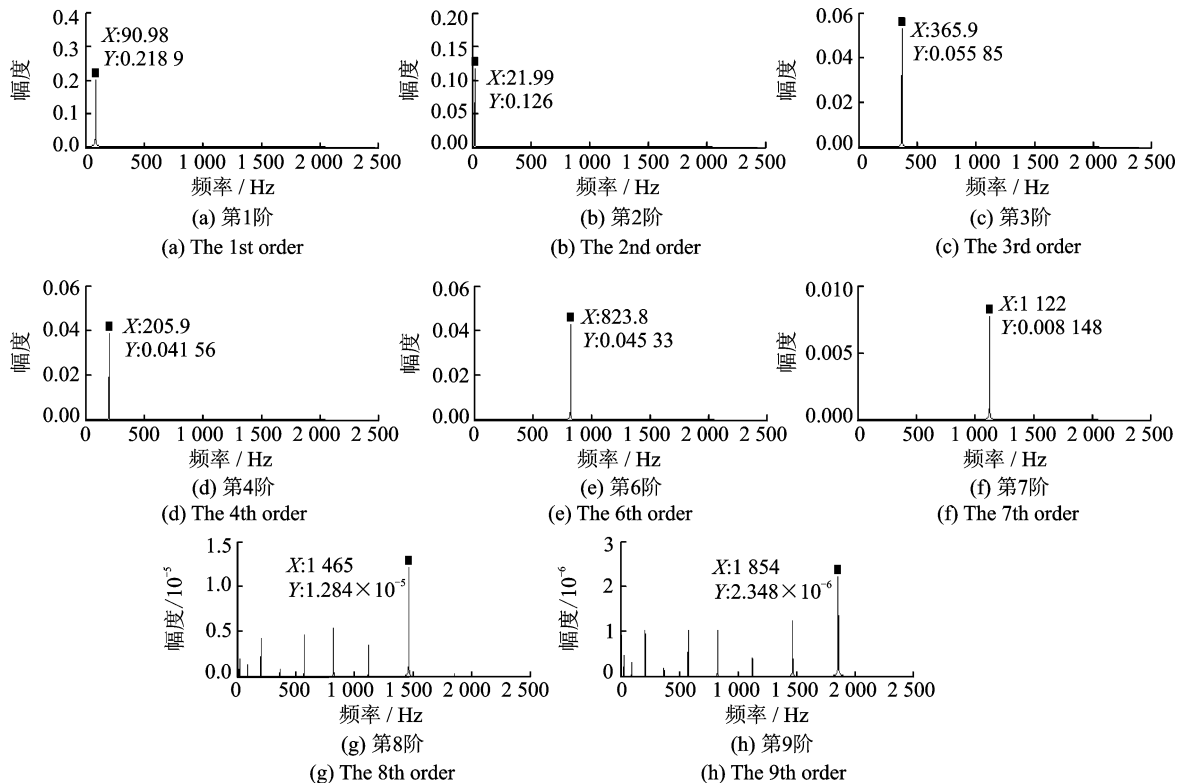


图 3 自迭代主元抽取算法识别的主成分 FFT 变换结果

表 2 识别频率与真实固有频率的定量比较

Tab. 2 Quantitative comparison between actual frequency and identification frequency

阶数	真实固有频率/Hz	识别的固有频率/Hz	相对误差/%
1	22.89	23	0.48
2	91.55	92	0.49
3	205.99	207	0.49
4	366.23	367	0.21
6	824.00	825	0.12
7	1 121.60	1 122	0.04
8	1 464.90	1 466	0.01
9	1 854.00	1 855	0.01

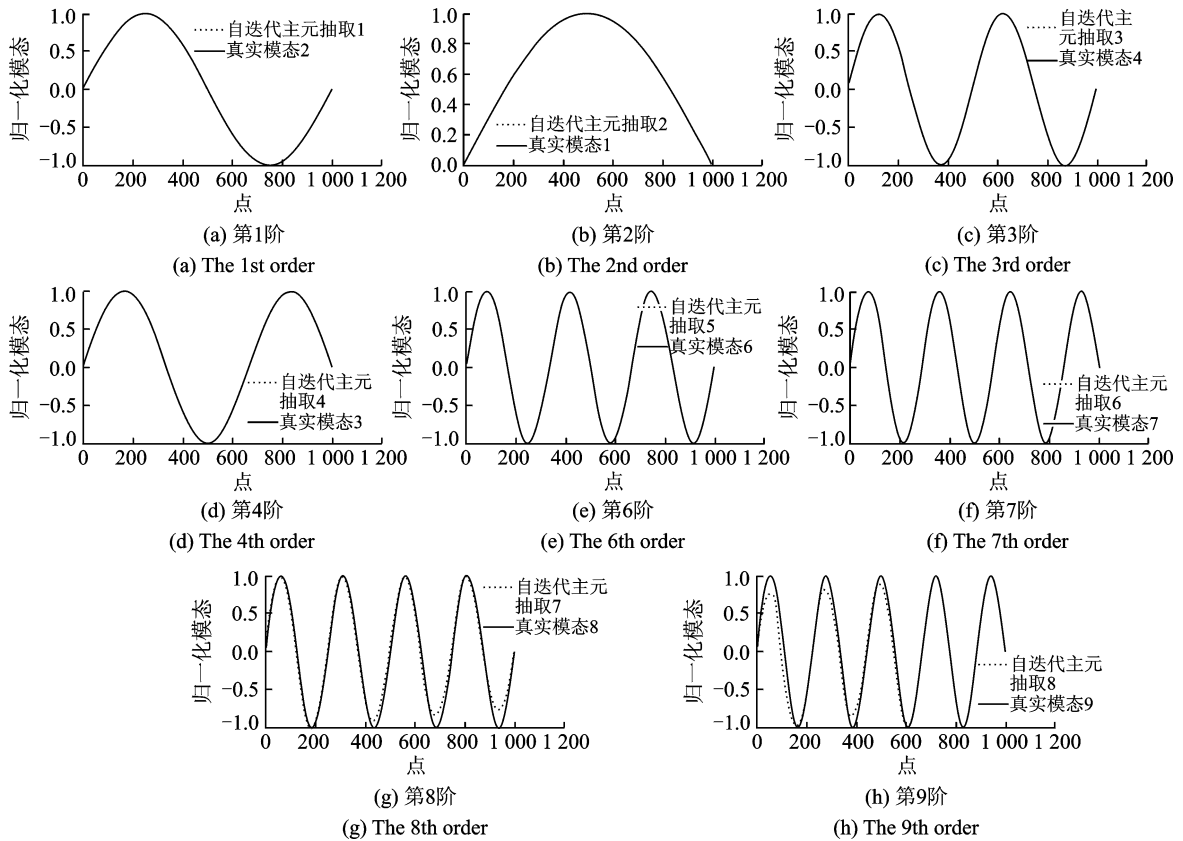


图 4 自迭代主元抽取算法识别的模态振型与真实模态振型的比较

Fig. 4 Comparison of modal shapes identified by self-iterative and principal component extraction algorithm with real modal shapes

贡献率之和小于 0.001, 因此图 5 可以近似地看成方差贡献率的帕累托图。传统 PCA 算法平均时间花费 0.949 s。当设置精度要求 $\alpha = 0.01$ 时, 迭代得到的振型 MAC 值各阶均大于 0.8, 固有频率识别不受影响, 从而满足了工作模态参数识别的精度需求。

3.3 结果分析

(1) 从图 3, 图 4 和表 2、表 3, 可以得到, 自迭代主元抽取算法仅通过位移响应数据便可以准确地识别模态振型和模态固有频率。固有频率识别之所有存在误差, 是受 FFT 分辨率不足的影响。

表 3 识别模态振型的 MAC 值

Tab. 3 MAC values of identified modal shapes

线性变换 向量	有限元模态 振型	K_{MAC}
1	2	1.000 0
2	1	1.000 0
3	4	1.000 0
4	3	1.000 0
5	6	1.000 0
6	7	1.000 0
7	8	0.980 0
8	9	0.950 0

表 4 自迭代主元抽取算法的时间花费

($\alpha=0.01, T_{max}=100$)

Tab. 4 Time cost of self-iterative principal component extraction algorithm ($\alpha=0.01, T_{max}=100$)

设置的截断误差 η	识别阶数	平均时间花费/s
1	1	0.038
0.4	2	0.093
0.2	3	0.280
0.1	4	0.330
0.08	5	0.421
0.05	6	0.480
0.01	7	0.543
0.001	8	0.732

(2) 从表 4 可以看出, 自迭代主元抽取算法的绝对运行时间花费随所设置的阈值所变化。当根据需求抽取的模态个数较少或精度不高时, 该算法的绝对运行时间花费明显低于传统 PCA 算法。

(3) 基于 SVD 的传统 PCA 算法必须计算和存储 3 个大型矩阵: $U \in \mathbf{R}^{1001 \times 1001}$, $V \in \mathbf{R}^{20481 \times 20481}$ 和 $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in \mathbf{R}^{1001 \times 1001}$, 而基于 EVD 的传统 PCA 算法必须计算和存储矩阵 $C_{XX} \in \mathbf{R}^{1001 \times 1001}$, $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{1001 \times 1001}$ 和特征向量矩阵 $V \in \mathbf{R}^{1001 \times 20481}$, 其空间复杂度比 SVD 方法还要高。然而对于自迭代主元抽取算法, 由于需要计算和存储大型矩阵, 因此有着较低的空间复杂度。

4 结束语

相比传统的批处理主成分分析工作模态参数识别方法, 本文提出的自迭代主元抽取方法可以避免矩阵分解的奇异值问题和特征值分解的病态问题, 并且具有更低的空间与时间复杂度。模态参数识别结果表明, 该算法可以准确地从平稳随机响应信号中有效地识别出线性时不变结构的主要贡献模态振型和固有频率, 在响应测点和采样时间较多时其时间开销较传统方法也更小。

进一步的研究方向包括自适应调整迭代步长、利用先验知识来设置线性变换向量的初值以加快收敛和利用神经网络实现主元的并行抽取。由于该算法拥有很低的时间和空间复杂度, 可利用嵌入软硬件技术, 将其开发成为便携式装置。

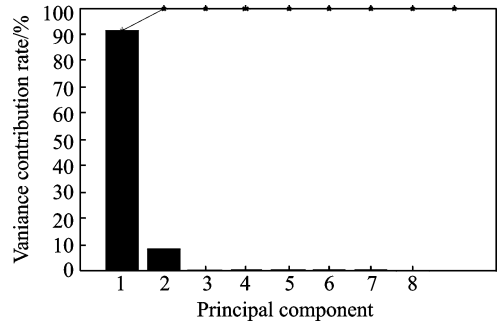


图 5 方差贡献率的帕累托图

Fig. 5 Pareto chart of cumulative variance contribution rate

参考文献:

- [1] Goursat M, Döhler M, Mevel L, et al. Crystal clear SSI for operational modal analysis of aerospace vehicles[J]. *Structural Dynamics*, 2010, 3: 1421-1430.
- [2] 秦世强. 桥梁健康监测与工作模态分析的理论和应用及系统实现 [D]. 成都:西南交通大学, 2013.
Qin Shiqiang. Bridge health monitoring and operational modal analysis: Theory, application and implementation [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013.
- [3] 张睿. 基于 ICA 的工作模态参数识别及故障诊断方法研究 [D]. 太原:中北大学, 2014.
Zhang Rui. Operational modal analysis and fault diagnosis methods based on ICA [D]. Taiyuan: North University of China, 2014.
- [4] Cara F J, Juan J, Alarcón E, et al. Modal contribution and state space order selection in operational modal analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 38(2): 276-298.
- [5] Yang Yongchao, Nagarajaiah S. Time-frequency blind source separation using independent component analysis for output-only modal identification of highly damped structures[J]. *Journal of Structural Engineering Asce*, 2012, 139(10): 1780-1793.
- [6] Wang Qiang, Xiao Jianfu. Modal analysis for the framework of beam pumping unit based on solidworks simulation[J]. *Applied Mechanics and Materials*. 2013, 318: 39-43.
- [7] Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space[J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1901, 2(11): 559-572.
- [8] 王成, 缙锦, 白俊卿, 等. 利用主成分分析的模态参数识别[J]. *西安交通大学学报*, 2013, 47(11): 97-104.
Wang Cheng, Gou Jin, Bai Junqing, et al. Modal parameter identification with principal component analysis[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2013, 47(11): 97-104.
- [9] 白俊卿, 闫桂荣, 王成. 利用局部线性嵌入的模态识别[J]. *西安交通大学学报*, 2013, 47(1): 85-89.
Bai Junqing, Yan Guirong, Wang Cheng. Modal identification method following locally linear embedding [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2013, 47(1): 85-89.
- [10] Lei B, Soon Y, Tan E L. Robust SVD-based audio watermarking scheme with differential evolution optimization[J]. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, 2013, 21(11): 2368-2378.
- [11] Mishra A K, Motaung T. Application of linear and nonlinear PCA to SAR ATR[C]//2015 25th International Conference Radioelektronika. Pardubice:IEEE, 2015:349-354.
- [12] 吴太旗, 邓凯亮, 黄漠涛, 等. 一种改进的不适问题奇异值分解法[J]. *武汉大学学报: 信息科学版*, 2011, 36(8): 900-903.
Wu Taiqi, Deng Kailiang, Huang Motao, et al. An improved singular values decomposition method for ill-posed problem [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(8): 900-903.
- [13] 付玉立, 李全海. 病态问题中奇异值修正法初探[J]. *海洋测绘*, 2011, 31(2): 42-44.
Fu Yuli, Li Quanhai. Discussion on modified SVD in the ill-posed problems[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2011, 31(2): 42-44.
- [14] 马成业, 杨胜良, 黎锁平. 求解病态线性方程组的一个正则化方法[J]. *甘肃科学学报*, 2010, 22(4): 33-35.
Ma Chengye, Yang Shengliang, Li Suoping. A regularization method of ill-conditioned linear equations [J]. *Journal of Gansu Sciences*, 2010, 22(4): 33-35.
- [15] 陈内萍. 一种解病态线性方程组的神经网络算法[J]. *湖南师范大学自然科学学报*, 2007, 30(3): 38-41.
Chen Neiping. A neural-network algorithm for So Ling singular linear systems[J]. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, 2007, 30(3): 38-41.
- [16] 唐丽, 李鹏飞. 主元加权迭代法求解病态线性方程组[J]. *科学技术与工程*, 2012 (2): 381-383.
Tang Li, Li Pengfei. A pivot element weighting iterative method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Science*

Technology and Engineering, 2012(2):381-383.

- [17] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. New York, USA: Cambridge University Press, 1991.
- [18] Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve[J]. Siam Review, 1992, 34(4): 561-580.
- [19] Wold S, Esbensen K, Geladi P. Principal component analysis[J]. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1987, 2(1/3): 37-52.
- [20] Wold H. Nonlinear estimation by iterative least squares procedures[C]//F. David, Research Papers in Statistics. New York: Wiley, 1966: 411-444.
- [21] 李喆, 谢磊, 孙培, 等. 基于滑窗 QR 和快速 PCA 算法的自适应子空间辨识[J]. 上海交通大学学报, 2015, 49(11): 1690-1695.
Li Zhe, Xie Lei, Sun Pei, et al. Adaptive subspace identification based on movingwindow QR decomposition and rapid PCA [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2015, 49(11): 1690-1695.
- [22] Kruger U, Xie L. Statistical monitoring of complex multivariate processes: With applications in industrial process control [J]. Journal of Quality Technology, 2012, 47(4): 318-335.

作者简介:



张天舒(1993-),男,硕士研究生,研究方向:信号处理, E-mail:hqzts@163.com。



王成(1984-),男,副教授,研究方向:机器学习在机械振动信号处理中的应用、智能电子商务、数据挖掘。



官威(1991-),男,硕士研究生,研究方向:信号处理。



王建英(1992-),女,硕士研究生,研究方向:信号处理。



刘艳,女,讲师,研究方向:信号处理。



谢晓东,男,副教授,研究方向:信号处理。

(编辑:王静)