

基于 Zoom-FFT 的改进 Rife 正弦波频率估计算法

赵强 侯孝民 廉昕

(装备学院光电装备系, 北京, 101416)

摘要: Rife 算法是正弦波频率估计的一种经典算法,但其根本缺陷在于低信噪比且被估计频率接近量化频率点时估计性能差。本文通过分析 Zoom-FFT 的基本原理,验证了其具有可控的局部频谱放大功能,进而提出了一种改进的 Rife 频率估计算法。通过对信号进行 Zoom-FFT 处理实现以被估计频率为中心的较窄频段频谱的大幅度细化和放大,然后利用 Rife 算法进行精确频率估计。仿真结果表明,该算法具有高于传统 Rife 及其改进算法的估计精度和抗噪声性能,且对真实频率与量化频率点的位置关系不敏感,但计算复杂度有一定增加。

关键词: 正弦信号; 频率估计; 频谱细化; Rife 算法; Zoom-FFT

中图分类号: TN971.6 **文献标志码:** A

Improved Rife Algorithm Based on Zoom-FFT for Frequency Estimation of Sinusoid Wave

Zhao Qiang, Hou Xiaomin, Lian Xin

(Department of Optoelectronic Equipment, Academy of Equipment, Beijing, 101416, China)

Abstract: Rife algorithm is a classical algorithm for frequency estimation of sine wave. Its drawback is that the estimation performance is poor when the true frequency is close to the frequency quantization points or the SNR is low. After analyzing the theory of Zoom-FFT, its amplification function for spectrum is verified. Furthermore, an improved frequency estimation algorithm based on Zoom-FFT is proposed. After the Zoom-FFT process, spectrum of a narrowband centered on true frequency is amplified, and then Rife algorithm is used to finish the accurate estimation of signal frequency. Simulation results indicate that the improved Rife algorithm has higher estimation accuracy and better anti-noise performance than Rife algorithm and some other improved algorithms. Moreover, it is insensitive to the position of the true frequency in the spectrum. However, to a certain extent, the computation load is improved.

Key words: sinusoidal signal; frequency estimation; spectrum amplification; Rife algorithm; Zoom-FFT

引言

正弦信号频率估计是数字信号处理的一个热点且应用广泛的问题。为了满足实时高精度处理需求,提高精度和速度是研究的出发点。根据正弦信号的特点,国内外学者对该问题的研究主要集中在时域估计和频域估计两个方面,时域估计算法对信噪比要求较高,同时不便于快速处理。频域估计算法主要利

用 FFT 技术对信号进行谱估计, 计算量小, 便于快速实现。Rife 算法^[1,2]是频域频率估计的经典算法, 通过谱线插值估计出了实际频率相对于谱线最大值的偏移量, 在一定条件下有较好的估计效果, 但是当实际频率位置接近量化频率时, 误差较大, 同时信号质量(信噪比)直接影响到了估计精度。文献[3~5]先对信号进行变频, 使新信号的频率位于两根谱线的中间位置附近, 然后利用 Rife 算法进行频率估计, 一定程度上消除了量化频率接近真实频率对估计性能的影响。文献[6]利用牛顿一次迭代方法对文献[3]进行改进, 使估计精度有了相应提高。文献[7]通过插值提高了 Rife 算法修正因子的估计精度。文献[8]综合使用了 Rife 算法和 IIN(迭代插值)算法, 通过提高插值的精度来提高估计精度。但是以上改进算法根本上仍然受制于频谱分辨率的大小, 且低信噪比仍然是估计性能的最根本影响因素。

Zoom-FFT 是一种频谱细化技术^[9-10], 通过对感兴趣频段的高频信号进行频谱搬移, 降低到低频段, 相应降低对采样频率的要求, 减小频率量化间隔, 可以实现对所需频段详细信息的获取。本文借鉴了 Zoom-FFT 的原理, 设计了一种基于 Zoom-FFT 和 Rife 算法的改进正弦波频率估计算法(以下简称 Z-Rife 算法), 将频率估计分为粗估计和精估计两个过程, 可以得到较高的估计精度, 抗噪声性能也有较大程度提升。

1 Rife 算法原理

理想正弦信号可统一表示为

$$x(n) = Ae^{i(2\pi f_c n \Delta T + \theta_0)} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中: A 为幅度, f_c 为正弦波频率, θ_0 为初始相位, $\Delta T = \frac{1}{f_s}$ 为采样间隔, N 为采样点数。其离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{i(2\pi f_c n \Delta T + \theta_0)} e^{-i(\frac{2\pi}{N} kn)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)是离散傅里叶变换的快速算法, 可以提高运算速度, 得到信号幅频、相频等频域信息。对于正弦信号, 连续频谱的最大值所在位置便是其频率。但是由于“栅栏效应”, 在采样点没有落在信号最大值位置时, 其谱线最大值的位置与真正频率有所偏差, 偏差范围为 $\pm 0.5\Delta f$, Δf 为信号的频谱分辨率, 即 $\frac{f_s}{N}$ 。因此, 通过 FFT 运算只能粗略地估计信号的频率。正弦信号频谱与频率位置关系如图 1 所示。

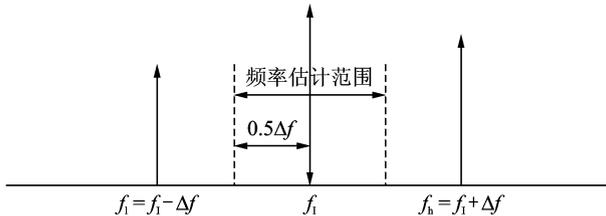


图 1 正弦信号频谱与频率位置关系

Fig. 1 Relationship between spectrum and frequency of sinusoid signal

信号频率位于最大谱线与次大谱线之间的 $0.5\Delta f$ 范围内, Rife 算法所做的工作就是估计出了真实频率在这个范围内的位置, 即有

$$L = \alpha \cdot \frac{|G_{k_0+\alpha}|}{|G_{k_0+\alpha}| + |G_{k_0}|} \quad (3)$$

式中: $|G_{k_0}|$ 表示在整数 k_0 处, 谱线取到最大值, $\alpha = \pm 1$, $|G_{k_0+\alpha}|$ 表示谱线的次大值, 当次大值对应频率大于最大值时, $\alpha = 1$, 反之, $\alpha = -1$ 。Rife 算法的频率估计公式为

$$\hat{f}_c = \Delta f \cdot \left(k_0 - 1 + \alpha \cdot \frac{|G_{k_0+a}|}{|G_{k_0+a}| + |G_{k_0}|} \right) \quad (4)$$

在没有噪声的理想情况下,利用式(4)可以获得较好的估计效果,但是在实际应用中,噪声是必须考虑的一项重要内容,Rife 算法存在的最大问题就是噪声易造成次大谱线的误判,而由此所引起的误差必然大于 $0.5\Delta f$,比直接利用 DFT 进行粗略估计的误差还要大。同时,在实际频率比较靠近量化频率时,算法的估计精度会急剧下降。

2 基于 Zoom-FFT 的改进 Rife 算法

2.1 Zoom-FFT 基本原理

Zoom-FFT 的基本处理过程是将高频信号搬移到低频段,经过低通滤波保留所需频段,然后以适当的采样频率进行重新采样。这样的最大优点是可以大幅度提高频谱分辨率,提取更多有效频域信息,其基本实现过程如图 2 所示^[10]。

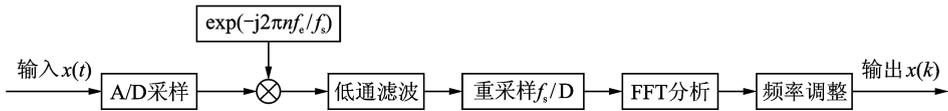


图 2 基于复调制的 Zoom-FFT 实现流程

Fig. 2 Realization of Zoom-FFT based on complex modulation

图 2 中 $f_c = \frac{f_l + f_h}{2}$, f_l 为细化段的起始频率, f_h 为细化段的截止频率。在频谱搬移后进行低通滤波可以有效避免频谱混叠。同时,分析带宽变小,根据奈奎斯特采样定律,所需采样频率也可以大大降低。若 f_s 降低 D 倍,FFT 点数 N 不变,则频率分辨率可相应提高 D 倍,这样就达到了对局部频谱进行放大的目的。其对频谱的放大效果如图 3 所示。

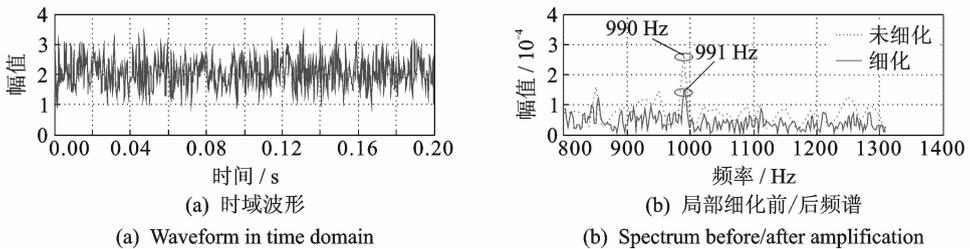


图 3 Zoom-FFT 对频谱放大效果

Fig. 3 Amplification of spectrum by Zoom-FFT

图 3 仿真中,输入信号为标准正弦信号, $f_c = 991.6$ Hz, 噪声类型为 AWGN, SNR = 10 dB, $f_s = 5120$ Hz, $t = 0.2$ s, $N = 1024$, 则 $\Delta f = 5$ Hz。若 $D = 5$,重采样后 FFT 点数为 $N' = 512$, $\Delta f' = 1$ Hz,细化频段为 800~1312 Hz。从图中可以看出,频谱经细化后,谱线间隔变密,频域信息更加丰富,在此基础上进行频率估计能获得更高的精度。

2.2 基于 Zoom-FFT 的改进 Rife 算法

在频率分辨率较大的情况下,一般的频率估计算法难以有较高的估计精确度。对于正弦信号的频率估计问题,信号的真实频率必然处于图 1 所示 f_l 和 f_h 之间,所以真实的分析范围实际上只有 $2\Delta f$ 。如果对包含这一频段的较小范围进行细化,其他频段予以滤除,便可以更加准确地估计出信号的频率。

基于 2.1 节的分析可知, Zoom-FFT 具有局部频谱放大的功能, 且放大倍数可调节。本文借鉴 Zoom-FFT 的思想对 Rife 算法进行改进, 实现过程如图 4 所示。

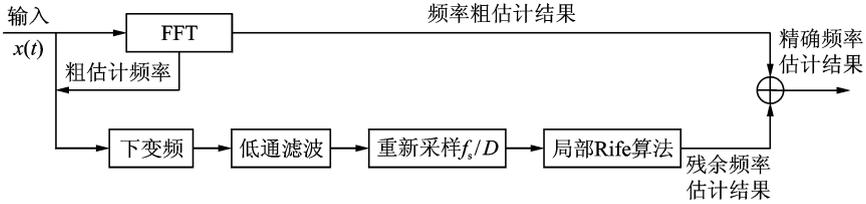


图 4 基于 Zoom-FFT 的改进 Rife 算法原理图

Fig. 4 Schematic diagram of improved Rife algorithm based on Zoom-FFT

Z-Rife 算法分为粗估计和精估计两个过程。其基本流程及参数选择和确定方法如下。

(1) 粗估计。直接对信号做 FFT, 确定最大谱线对应频率即为粗估计频率 f_1 。此过程同时确定了细化频带的范围和下变频本振频率。此过程理论上可达到的最优估计误差在 $\pm 0.5\Delta f$ 以内, 此误差即为残余频率。

(2) 精估计。利用 Rife 算法对重采样后的细化频带进行频率估计, 得到下变频后的残余频率估计结果 f_s , f_s 理论上可达到的最优估计误差在 $\pm 0.5 \frac{\Delta f}{D}$ 以内, 那么频率估计结果即为 $\hat{f}_c = f_1 + f_s$ 。

3 算法计算量及性能分析

3.1 计算机仿真及性能分析

对于 Rife 算法, 文献[1]给出了在信号参数完全未知时, 频率估计方差的克拉美罗下界 (Gramer-Rao low bound, CRLB) 为

$$\text{var} \{ \hat{\omega} \} = \frac{12\sigma^2}{[A^2 \Delta T^2 N(N^2 - 1)]} \quad (5)$$

式中: σ^2 为噪声功率, $\Delta T = \frac{1}{f_s}$ 为采样间隔, N 为采样点数。由于进行了 Zoom-FFT 处理, 改变了采样频率, 因此 Z-Rife 算法并不受式(5)的限制, 本文将仿真结果与其进行对比来验证算法性能。

仿真中正弦信号为 $x(n) = Ae^{i(2\pi f_c n \Delta T + \varphi)}$, $A=1$ ($n=0, 1, \dots, N-1$)。设定 $f_s = 1e^6$ Hz, $N=2048$, 频率分辨率 $\Delta f = \frac{f_s}{N} = 488.28$ Hz, $f_c = (310+r)\Delta f$, $r=[0.1:0.1:0.4]$ (偏离最大谱线位置)。信噪比取值范围为 $\text{SNR}=[-10:1:20]$ 。Zoom-FFT 重采样频率 $f'_s = \frac{f_s}{100}$, FFT 点数不变, 则频谱细化倍数 $D=100$, 细化方法同上文 2.1 节。不同信噪比以及偏离最大谱线位置不同条件下, 进行 2000 次 Monte Carlo 仿真得到各种算法对频率的估计性能如图 5 所示。

由于 M-Rife 算法主要是对 $r \leq \frac{1}{3}$ 时的误差进行修正, 因此 $\frac{1}{3} < r \leq \frac{1}{2}$ 时其性能与 Rife 算法差异不大, 因此仿真中当 $r=0.4$ 时只与 Rife 算法进行了比较。从图 5 中可以看出, 在信号质量较好时, Rife 算法有较为理想的估计效果, 趋近于 CRLB 下限, 但是在信噪比较低而且真实频率靠近量化频率位置时, 估计精确度能明显下降, M-Rife 算法对这个问题进行了改进, 效果比较明显 (如图 5(a) 和 (b)), 但是在偏离位置接近 $\frac{1}{3}$ 且信噪比小于 4 dB 时, 估计性能严重恶化 (如图 5(c))。Z-Rife 算法通过大幅度提高局部频谱分辨率, 减小了误差基底, 使得估计性能有了大幅提升。

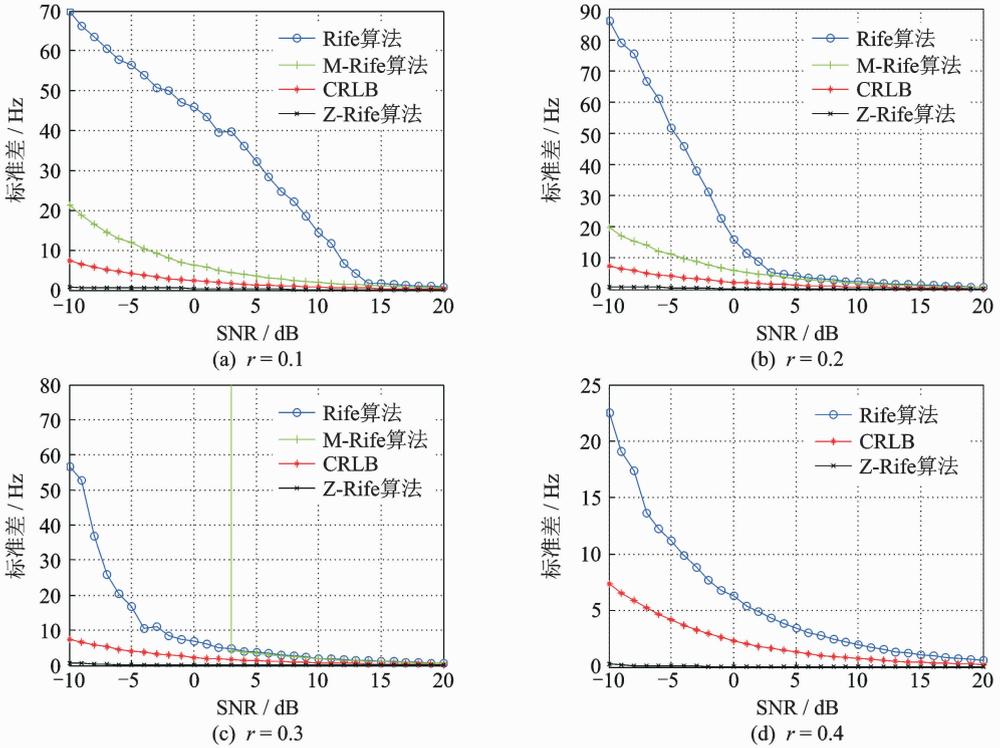


图 5 不同信噪比下各算法性能比较

Fig. 5 Performance comparison under different SNR

3.2 计算量分析

与 Rife 算法相比,Z-Rife 算法实质上多了一次 Zoom-FFT 的过程。设 FFT 点数 $N=2^m$, 频谱细化倍数 $D=2^n$, 低通滤波器阶数为 M , 则对 DN 点采样信号 $x(n)$ 直接进行 FFT 与 N 点 Zoom-FFT 的运算量如表 1 所示。

表 1 直接 FFT 和 Zoom-FFT 计算量比较

Tab. 1 Comparison of computation between FFT and Zoom-FFT

算法	移频(复数乘)	滤波(复数乘)	复数乘	复数加
DN 点 FFT	0	0	$(m+n)DN/2$	$(m+n)DN$
N 点 Zoom-FFT	DN	MN	$mN/2$	mN

对于 DN 点采样信号,由表 1 可进而计算出各种频率估计算法的计算量对比如表 2 所示。从表 2 中可以看出,Rife 算法的计算量最小,这取决于细化程度和滤波器阶数选择等因素,Z-Rife 算法的复数乘次数相比文献[3]算法可能有一定增加,但复数加次数一般会小于文献[3]算法。

表 2 各频率估计算法计算量比较

Tab. 2 Computation of different algorithms

算法	复数乘	复数加
Rife 算法 ^[1]	$(m+n)DN/2$	$(m+n)DN$
M-Rife 算法 ^[3]	$(m+n)DN/2+2DN$	$(m+n)DN+\frac{4}{3}DN$
Z-Rife 算法	$(m+n)DN/2+DN+MN+mN/2$	$(m+n)DN+mN$

4 结束语

本文分析了 Rife 算法误差产生原因,结合 Zoom-FFT 的原理和其频谱放大细化作用,提出了基于 Zoom-FFT 的改进 Rife 算法。通过移频(下变频)降低采样率进而提高频率分辨率,由此大幅度消除了频率分辨率对频率估计精度的限制,在此基础上利用 Rife 算法对正弦信号进行精确频率估计。计算机仿真表明,该算法具有比 Rife 算法及其改进算法更高的估计精度和低信噪比适应性,且对真实频率与量化频率点的位置关系不敏感。Z-Rife 算法虽然提高了估计精度,受制于 Zoom-FFT 的工作原理,算法计算量比 Rife 算法有所增加,估计性能的提升以计算量的增加为代价,但相比于文献[3],M-Rife 等改进算法,计算量增加幅度可以容忍。

参考文献:

- [1] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation [J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 1974, 20(5): 591-598.
- [2] Rife D C, Boorstyn R R. Multiple tone parameter estimation from discrete-time observation [J]. *Bell SystTech*, 1976, 55(9): 1389-1410.
- [3] 邓振森, 刘渝, 王志忠, 等. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. *数据采集与处理*, 2006, 21(4): 473-477.
Deng Zhenmiao, Liu Yu, Wang Zhizhong. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2006, 21(4): 473-477.
- [4] 王旭东, 刘渝, 刘振森. 基于修正 Rife 算法的正弦波频率估计及 FPGA 实现[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(4): 621-624.
Wang Xudong, Liu Yu, Deng Zhenmiao. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid and implementation in FPGA[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(4): 621-624.
- [5] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. *信号处理*, 2010, 26(10): 1573-1576.
Wang Hongwei, Zhao Guoqing. Improved Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. *Signal Processing*, 2010, 26(10): 1573-1576.
- [6] 邓振森, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. *电子学报*, 2007, 35(1): 104-107.
Deng Zhenmiao, Liu Yu. The starting point problem of sinusoid frequency estimation based on Newton's method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(1): 104-107.
- [7] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. *电子学报*, 2004, 32(4): 625-629.
Qi Guoqing, Jia Xinle. Accuracy analysis of frequency estimation of sinusoid based on interpolated FFT[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(4): 625-629.
- [8] 周龙健, 罗景青, 房明星. 基于 IIN 算法和 Rife 算法的正弦波频率估计算法[J]. *数据采集与处理*, 2013, 28(6): 839-842.
Zhou Longjian, Luo Jingqing, Fang Mingxing. Frequency estimation of sinusoid wave on IIN algorithm and Rife algorithm [J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2013, 28(6): 839-842.
- [9] 丁康, 谢明, 杨志坚. 离散频谱分析校正理论与技术[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 119-122.
Ding Kang, Xie Ming, Yang Zhijian. *The theory and technology of discrete spectrum correction*[M]. Beijing: Science Press, 2008: 119-122.
- [10] 江波, 唐普英. 基于复调制的 ZoomFFT 算法在局部频谱细化中的研究与实现[J]. *大众科技*, 2010, 131(7): 48-49.
Jiang Bo, Tang Puying. Study of ZoomFFT based on complex modulation for amplifying the spectrum locally[J]. *Popular Science & Technology*, 2010, 131(7): 48-49.

作者简介:



赵强(1990-),男,博士研究生,研究方向:航天测控信号处理, E-mail: zqaniu@163.com.



侯孝民(1968-),男,教授,博士生导师,研究方向:航天测控信号处理等。



廉昕(1988-),男,博士研究生,研究方向:航天测控信号处理。

