

极化码与奇偶校验码的级联编码:面向 5G 及未来移动通信的编码方案

江涛 王涛 屈代明 王博

(华中科技大学电子信息与通信学院, 武汉, 430074)

摘要: 基于信道极化定理而提出的极化码是目前唯一被严格理论证明可以达到香农容量限的编码, 并被接受为第五代移动通信系统(5G)中短码控制信道的编码方案。本文首先给出极化码的编码和译码原理, 然后提出一种极化码与奇偶校验码级联的设计方案, 发送端编码器采用奇偶校验码作为外码, 极化码作为内码的级联编码结构。接收端译码器采用基于奇偶校验辅助的连续消除列表译码算法。相比于极化码与循环冗余校验码的级联方案, 本文提出的级联设计方案具有更加优良的纠错性能, 且没有提升编、译码的复杂度, 有能力满足 5G 移动通信控制信道对纠错性能的要求。

关键词: 极化码; 奇偶校验码; 级联码; 连续消除列表译码; 循环冗余校验码

中图分类号: TN929.5 **文献标志码:** A

Concatenated Coding of Polar Codes and Parity-Check Codes: Coding Scheme for 5G and Future Mobile Communications

Jiang Tao, Wang Tao, Qu Daiming, Wang Bo

(School of Electronic Information and Communications, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, China)

Abstract: Polar codes are the first coding schemes that probably achieve the Shannon capacity of memoryless symmetric channels with an explicit construction based on the channel polarization. Moreover, polar codes are adopted for control channels in the fifth generation mobile communication systems (5G). Here, the basic principle of polar codes is briefly introduced, including polar encoding and decoding. Furthermore, a concatenated coding scheme of polar codes and parity-check codes, called the parity-check-concatenated (PCC) polar codes is proposed. The information bits are encoded by an outer parity-check encoder and an inner polar encoder. At the receiver, the parity-check-aided successive cancellation list (PC-aided SCL) algorithm is applied for decoding. Simulation results show that PCC polar codes could have evident performance gains over the cyclic redundancy check-concatenated polar codes without increasing the complexity of encoding and decoding. Therefore, PCC polar codes could meet the requirements of 5G for the error correction performance.

Key words: polar codes; parity-check codes; concatenated codes; successive cancellation list decoding; cyclic redundancy check codes

引言

在移动互联网时代,新型移动设备不断增加,通信业务和网络流量出现爆炸性的增长,现有的移动通信技术已经无法满足未来应用场景的通信需求。为了满足未来移动互联网和移动物联网的业务需求,第五代移动通信系统(5G)逐渐成为移动通信领域的研究热点^[1-6]。高效的信道编码作为移动通信的核心技术之一,能够以尽可能小的代价换取通信可靠性的极大提高,同时还能扩大网络覆盖面和提高频谱利用率。因此,如何构造一种纠错性能可以达到或者逼近信道容量,并且具有低复杂度编、译码算法的编码方案一直都是信道编码领域追求的目标^[7-10],也是满足未来移动通信网络应用需求不断提高的关键。早在2009年,土耳其毕尔肯大学的 Erdal Arıkan 教授首次提出了一种新型的信道编码方法,即极化码^[10]。极化码是目前唯一被严格理论证明可以达到香农容量限的编码方案,并且具有低复杂度的编、译码算法,极大地增强了极化码的实用性。极化码的发明是信道编码领域的重大突破,已经成为信道编码领域备受瞩目的研究热点。中国 IMT-2020 (5G) 推进组对极化码进行了外场环境下的实际测试,结果表明极化码具有非常优良和稳定的性能,可以同时满足国际电信联盟提出的3种典型应用场景中高传输速率、低通信时延和海量终端连接的应用需求。目前,极化码已经被第3代合作伙伴计划(3rd generation partnership project, 3GPP) 采纳为5G增强移动宽带场景下控制信道的编码方案。连续消除(Successive cancellation, SC)译码算法是文献[10]中提出的一个有效的低复杂度极化码译码算法。此后, Tal I 等提出了连续消除列表(Successive cancellation list, SCL)译码算法和基于循环冗余校验(Cyclic redundancy check, CRC)辅助的连续消除列表(CRC-aided SCL)译码算法^[11],其纠错性能可超越 WiMAX 标准中低密度奇偶校验(Low-density parity-check, LDPC)码的纠错性能。在极化码与CRC码级联方案中^[12,13],发送端根据信息比特序列和CRC生成多项式,产生CRC比特,并将其附于信息比特序列的尾部,然后把组成的新序列作为极化码编码器的输入序列进行编码处理。接收端首先利用SCL算法对接收序列进行译码,然后对得到的 L 条备选路径进行CRC校验,从校验通过的路径中选择概率值最大的路径所对应的信息比特序列作为译码结果,若 L 条备选路径均不满足CRC校验,则直接输出概率值最大的路径所对应的信息比特序列作为译码结果。

极化码与CRC码的级联方案具有较为优良的纠错性能,但是需要额外的CRC校验电路,会带来一定的硬件开销。本文提出了一种极化码与奇偶校验码级联的设计方案,称为奇偶校验级联(Parity-check-concatenated, PCC)极化码,本方案与CRC级联方案主要有两点不同:(1)奇偶校验码比CRC码更容易进行级联编码构造;(2)CRC比特只能添加到信息比特的末尾,而奇偶校验比特可以分散在信息比特之间,这样有助于SCL译码器及时检测和删除错误路径。与前期工作^[14]相比,本文还增加了奇偶校验级联极化码在长码条件下的性能评估,验证了该级联极化码在长码条件下相比CRC级联极化码仍然具有纠错性能优势,如码长为8192时,提出的级联极化码相比CRC级联极化码在误帧率为 10^{-2} 时,仍然有0.1 dB的编码增益。奇校验码和偶校验码具有相同的性质和检错能力,因此,本文中的外码均以偶校验码为例进行说明。

1 极化码编、译码原理

极化码是基于信道极化现象提出的一种纠错性能优良的新型编码方式。根据信道极化定理可知,一组独立同分布的二元离散无记忆信道经过信道极化之后,得到的比特信道的信道容量将会出现两极分化现象:一部分比特信道的信道容量趋于1,而另一部分比特信道的信道容量趋于0。

1.1 编码原理

假设极化码的码长为 N ,发送的信息比特数量为 K 。经过信道极化之后,选择信道容量最高的 K

个比特信道发送信息比特,对应比特信道的索引集合记为 $A, A \subset \{1, 2, \dots, N\}$, 信息比特序列记为 \mathbf{u}_A , 也称为非固定比特序列。剩余的 $N - K$ 个比特信道上发送固定比特, 对应比特信道的索引集合记为 $A^c, A^c \subset \{1, 2, \dots, N\}$, 固定比特序列记为 \mathbf{u}_{A^c} , 并将固定比特设置为 0 (接收端已知), 由此得到极化码编码器的输入序列 $\mathbf{u}_1^N = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ 。极化码属于线性分组码。因此, 编码公式可以表示为

$$\mathbf{c}_1^N = \mathbf{u}_1^N \mathbf{G}_N \quad (1)$$

式中: \mathbf{G}_N 为极化码的生成矩阵; \mathbf{c}_1^N 为编码器的输出码字。生成矩阵 \mathbf{G}_N 表示为

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{B}_N \mathbf{F}^{\otimes n} \quad (2)$$

式中: $n = \log_2 N$, \mathbf{B}_N 为比特翻转排列矩阵, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为极化核矩阵, $\mathbf{F}^{\otimes n}$ 为矩阵 \mathbf{F} 的 n 阶 Kronecker 积, 当 $n \geq 1$ 时, 满足关系

$$\mathbf{F}^{\otimes n} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{\otimes (n-1)} \quad (3)$$

式中: 符号“ \otimes ”表示 Kronecker 积运算。如图 1 所示, 发送端根据 A 和 A^c 将信息比特序列 \mathbf{u}_A 和固定比特 \mathbf{u}_{A^c} (比特 0) 依次映射到编码器输入序列 \mathbf{u}_1^N 的相应位置, 然后经过极化码编码器得到码字 \mathbf{c}_1^N 。在接收端, 接收序列 \mathbf{y}_1^N 经过极化码译码器后得到输出的信息比特判决序列 $\hat{\mathbf{u}}_A$ 。

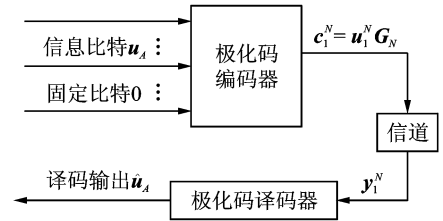


图 1 极化码的编码和译码流程图

Fig. 1 Encoding and decoding of polar codes

1.2 译码原理

极化码最经典的译码算法是 SC 译码算法, 该算法充分利用信道极化的递归结构实现信息比特的有效译码。SCL 译码算法是 SC 译码算法的推广算法, 该算法能够以较低的运算复杂度实现最大似然译码的纠错能力^[11]。SCL 译码算法在译码过程中会保留最有可能的 L 条译码路径。当译码信息比特时, 对译码路径向下进行分支扩展, 为 0 或者为 1, 由此得到 $2L$ 条备选路径, 然后从中选择概率较大的 L 条路径。当译码固定比特时, 直接判决为已知的比特 0。完成 N 个比特的译码判决之后, 从最终保留的 L 条路径中选择概率最大的路径所对应的译码序列, 得到 SCL 译码器的译码输出 $\hat{\mathbf{u}}_A$ 。

2 极化码与偶校验码的级联编码

极化码与偶校验码的级联编码器由偶校验编码器(外码)和极化码编码器(内码)组成。码长为 N , 信息比特数量为 K , 偶校验方程数量为 M 的级联系统^[14]如图 2 所示。

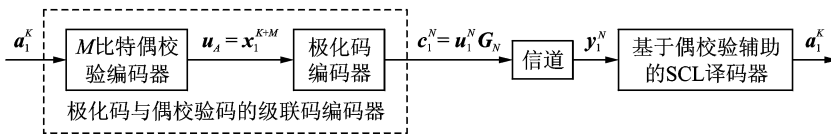


图 2 极化码与偶校验码级联的编译码系统

Fig. 2 Block diagram of encoding and decoding of PCC polar codes

(1) 偶校验编码。信息序列 $\mathbf{a}_1^K = (a_1, a_2, \dots, a_K)$ 经过 M 比特偶校验编码器编码, 得到外码码字 $\mathbf{x}_1^{K+M} = (x_1, x_2, \dots, x_{K+M})$ 。

(2) 外码码字映射。将外码码字中的 $K + M$ 个比特依次映射到极化码非固定比特的位置, 得到极化码编码器的输入比特序列 \mathbf{u}_1^N 。此时, 将 \mathbf{x}_1^{K+M} 认为是 \mathbf{u}_1^N 中的非固定比特, 即 $\mathbf{u}_A = \mathbf{x}_1^{K+M}$ 。

(3) 极化码编码。根据生成矩阵对编码器的输入序列 \mathbf{u}_1^N 进行极化码编码, 得到级联码字 \mathbf{c}_1^N 。

如图 3 所示, x_1^{K+M} 中的 M 个偶校验比特的位置 $P = (p_1, p_2, \dots, p_M) \subset (1, 2, \dots, K+M)$ 基本没有任何限制^[14]。图 3(a) 表示校验比特集中在序列尾部, 此时 $P = \{K+1, K+2, \dots, K+M\}$; 图 3(b) 表示校验比特等间隔分布在 x_1^{K+M} 之中, 即 $P = \{m \times \lfloor \frac{K+M}{M} \rfloor\}, m=1, 2, \dots, M$; 图 3(c) 表示校验比特不等间隔分布。

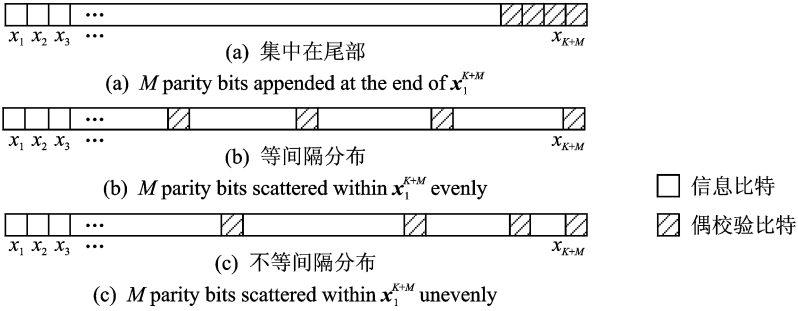


图 3 外码码字中的 M 个偶校验比特位置

Fig. 3 Locations of M parity bits within x_1^{K+M}

外码码字 x_1^{K+M} 中的 M 个偶校验比特为

$$x_{p_m} = \left(\sum_{i \in S_m, i \neq p_m} x_i \right) \bmod 2 \quad m=1, 2, \dots, M \quad (4)$$

式中: S_m 为求取第 m 个偶校验比特 x_{p_m} 的偶校验方程中用到的比特的索引集合, $p_m \in S_m$, 并且 p_m 是 S_m 中最大的值, 即 $S_m \subset \{1, 2, \dots, p_m\}$ 。

3 基于偶校验辅助的 SCL 译码算法

基于偶校验辅助的 SCL 译码算法与原始的 SCL 译码算法最主要的不同在于: 译码校验比特时, 是根据校验比特所在的偶校验方程中信息比特的判决结果得到, 而不是根据概率进行判决^[14]。具体译码步骤为:

- (1) 初始化输入, $i=1$, 保留路径数量 L 。
- (2) 判断 i 是否小于等于 N , “是”→进入步骤(3); “否”→进入步骤(8)。
- (3) 判断 u_i 是否为固定比特, “是”→进入步骤(4); “否”→进入步骤(5)。
- (4) 将当前每条路径上 u_i 的判决值设置为 0, 然后令 $i=i+1$ 并返回步骤(2)。
- (5) 判断 u_i 是否为校验比特, “是”→进入步骤(6); “否”(即 u_i 是信息比特)→进入步骤(7)。
- (6) 当前每条路径上 u_i 的判决值通过该路径上判决的信息比特得到, 公式为

$$\hat{u}_i = \left(\sum_{j \in S_i, j \neq i} \hat{u}_j \right) \bmod 2 \quad j=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

式中: S_j 为求取 u_i 的偶校验方程中用到的比特的索引集合, 然后令 $i=i+1$ 并返回步骤(2)。公式中变量 S_m 和 S_j 的区别为 $S_m \subset \{1, 2, \dots, M\}$, $S_j \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 。

(7) 统计当前路径数量 L' 并对其进行分支扩展。当前每条路径在 u_i 处可取值 0 或 1, 从而得到 $2L'$ 条备选路径, $2L'$ 条路径的度量值分别为该路径在 u_i 处取值 0 或 1 的概率。判断 $2L'$ 和 L 的大小, $2L' \leq L$ 则保留 $2L'$ 条路径; $2L' > L$ 则保留 L 条度量值最大的路径; 然后令 $i=i+1$ 并返回步骤(2)。

(8) 从 L 条路径中选择度量值最大的路径, 并输出该路径对应的判决序列 \hat{u}_1^N 。

(9) 结束。

根据 \hat{u}_1^N 得到外码码字的译码结果为

$$\hat{x}_1^{K+M} = \hat{u}_1 \quad (6)$$

式中: $\hat{\mathbf{u}}_A$ 为 $\hat{\mathbf{u}}_1^N$ 中非固定比特集合 A 所对应的比特。进而得到发送的信息比特的译码结果为

$$\hat{\mathbf{a}}_1^K = \hat{\mathbf{x}}_I \quad (7)$$

式中: $I = \{i | i = 1, 2, \dots, M + K, i \notin P\}$ 。虽然偶校验比特的译码是通过所在偶校验方程中的信息比特的判决结果得到,但是它仍然具有纠错功能。假设 u_i 为偶校验比特,当其偶校验方程中的某个信息比特的译码结果发生错误时,根据公式可知 \hat{u}_i 的判决值错误,导致该路径的度量值比较小,在后续的路径选择中该条错误的译码路径很容易被删掉,从而达到纠错的目的。根据上述分析可知,基于偶校验辅助的 SCL 译码算法与传统的 SCL 译码算法具有近似的复杂度,只是略微多出偶校验方程的异或操作。而 CRC-aided SCL 译码算法相比于传统的 SCL 译码算法,只是略微多出 CRC 校验操作,也具有近似的复杂度。因此,在保留路径数 L 相同的情况下,基于偶校验辅助的 SCL 译码算法与 CRC-aided SCL 译码算法具有近似的复杂度。

4 仿真与分析

本节在加性高斯白噪声信道下对比了极化码与 CRC 码的级联方案以及极化码与偶校验码的级联方案的纠错性能。根据文献[15]构造极化码,译码过程中保留路径 $L = 32$,最后根据译码判决结果统计两种级联方案的帧误帧率(Frame error rate, FER),如图 4 所示。需要注意,仿真中的码率 $R = K/N$,而不是 $(K + M)/N$,即有效码率等于真实的信息比特个数与级联码长的比值。只要两种级联方案的有效码率相同,那么性能对比就公平。从图 4 中可以很明显地发现:(1) 级联码的码长越长,纠错性能越好。因为码长越长,信道的极化效果越好,进而级联码的纠错性能越好。(2) 在各种码长和码率的情况下,极化码与偶校验码的级联方案的纠错性能都超越了传统的极化码与 CRC 码的级联方案。在码长 $N = 256$, $\text{FER} = 10^{-3}$ 情况下,极化码与偶校验码的级联方案能够产生大约 0.2 dB 的性能增益;在码长 $N = 1\ 024$, $\text{FER} = 10^{-2}$ 情况下,能够产生大约 0.2 dB 的性能增益;在码长 $N = 8\ 192$, $\text{FER} = 10^{-2}$ 情况下,能够产生大约 0.1 dB 的性能增益。极化码与 CRC 码的级联方案中,CRC 比特只能添加到信息比特序列的末尾,导致这种方案的级联编码不能在译码过程中及时利用校验比特提升纠错性能,而在本文提出的级联方案中,奇偶校验比特的位置没有限制,可以集中在信息比特序列的尾部,也可以分散在信息比特序列之间,因此,能够更加灵活地设计级联结构,使获得的级联码具有更加优良的纠错性能。上述优势说明:相比于极化码与 CRC 码的级联编码方案,本文提出的级联编码方案在未来移动通信中将具有更广泛的应用前景。

5 结束语

作为第五代移动通信控制信道编码标准,极化码具有非常优良和稳定的性能。本文根据极化码的编、译码原理,提出一种极化码与奇偶校验码级联的设计方案,即:发送端编码器采用奇偶校验码作为外码,极化码作为内码的编码结构;接收端译码器采用基于奇偶校验辅助的连续消除列表译码算法。仿真结果表明,本文提出的级联设计方案的纠错性能比极化码与 CRC 码级联方案更加优良,且没有编、译码复杂度的提升,有能力满足第五代移动通信控制信道对纠错性能的要求。

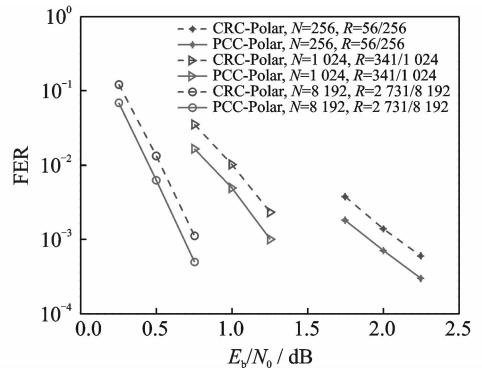


图 4 两种级联方案的 FER 性能曲线
Fig. 4 FER performance of CRC-concatenated polar codes and PCC polar codes

参考文献:

- [1] Fettweis G P. The tactile internet: Applications and challenges[J]. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2014, 9(1): 64-70.
- [2] Yaacoub E, Hussein M, Ghaziri H. An overview of research topics and challenges for 5G massive MIMO antennas[C]// *IEEE Middle East Conference on Antennas and Propagation*. Beirut: IEEE, 2016: 1-4.
- [3] Benisha M, Prabu R T, Bai V T. Requirements and challenges of 5G cellular systems[C]// *2nd International Conference on Advances in Electrical Electronics Information. Communication and Bio-Informatics*. Chennai: [s. n.], 2016: 251-254.
- [4] Al-Ogaili F, Shubair R M. Millimeter-wave mobile communications for 5G: Challenges and opportunities[C]// *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*. Fajardo: IEEE, 2016: 1003-1004.
- [5] 周一青, 潘振岗, 翟国伟. 第五代移动通信系统 5G 标准化展望与关键技术研究[J]. *数据采集与处理*, 2015, 30(4): 714-724. Zhou Yiqing, Pan Zhengang, Zhai Guowei. Standardization and key technologies for future fifth generation of mobile communication systems[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2015, 30(4): 714-724.
- [6] 杨绿溪, 何世文, 王毅, 等. 面向 5G 无线通信系统的关键技术综述[J]. *数据采集与处理*, 2015, 30(3): 469-485. Yang Lǔxi, He Shiwen, Wang Yi, et al. Key technologies for 5G wireless communication system[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2015, 30(3): 469-485.
- [7] Shannon C E. A mathematical theory of communication[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1948, 27(3): 379-423.
- [8] Bennatan A, Burshtein D. On the application of LDPC codes to arbitrary discrete memoryless channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(3): 417-438.
- [9] 朱宏鹏, 程磊, 张剑. 可变码长 LDPC 码的 GAU 构造算法[J]. *数据采集与处理*, 2015, 30(6): 1240-1245. Zhu Hongpeng, Cheng Lei, Zhang Jian. GAU algorithm for construction of variably long LDPC codes[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2015, 30(6): 1240-1245.
- [10] Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(7): 3051-3073.
- [11] Tal I, Vardy A. List decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(5): 2213-2226.
- [12] Balatsoukas-Stimming A, Parizi M B, Burg A. LLR-based successive cancellation list decoding of polar codes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(19): 5165-5179.
- [13] Guo J, Shi Z, Liu Z, et al. Multi-CRC polar codes and their applications[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(2): 212-215.
- [14] Wang T, Qu D, Jiang T. Parity-check-concatenated polar codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(12): 2342-2345.
- [15] Tal I, Vardy A. How to construct polar codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(10): 6562-6582.

作者简介:



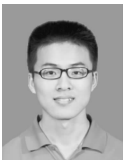
江涛(1970-),男,教授,研究方向:移动通信系统与理论,E-mail: taojiang@hust.edu.cn.



王涛(1991-),男,博士研究生,研究方向:信道编码。



屈代明(1972-),男,教授,研究方向:多载波通信、大规模多天线等。



王博(1992-),男,硕士研究生,研究方向:信道编码。