ISSN 1004-9037, CODEN SCYCE4
Journal of Data Acquisition and Processing Vol. 32, No. 2, Mar. 2017, pp. 258－265
DOI: 10.16337/j.1004-9037.2017.02.005

http://sjcj.nuaa.edu.cn
E-mail: sjcj@nuaa.edu.cn
Tel/Fax: +86-025-84892742

相干信号波达方向估计技术综述

叶中付　罗大为　韦进强　徐　旭

（中国科学技术大学信息科学技术学院，合肥，230027）

摘　要： 在信号的传输过程中，由于信号反射和折射，导致多径传输产生相干信号。此时信号协方差矩阵出现秩缺，导致传统的超分辨波达方向估计（Direction of arrival，DOA）算法失效。针对相干信号的DOA估计算法被提出，这些算法通过利用阵列导向矢量的特殊性质，对协方差矩阵的秩进行恢复，从而达到解相干的目的。围绕着减小阵列孔径损失、增加可处理信号数量和提高估计精度等目标，新的相干信号DOA估计算法不断被提出，成为阵列信号处理方向的一个研究热点。本文介绍了相干信号的产生和其对DOA估计的影响，给出了相干信号的阵列模型，根据解相干方式的不同，将各种相干信号的DOA估计算法进行分类，并逐类进行阐述，最后展望了相干信号DOA估计未来的研究方向。

关键词： 波达方向估计；相干信号；多径传播

中图分类号： TP957　　　**文献标志码：** A

Review for Coherent DOA Estimation Technique

Ye Zhongfu, Luo Dawei, Wei Jinqiang, Xu Xu

(Department of Electronic Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei, 230027, China)

Abstract: The received signals of array are coherent because of the reflection and refraction in the multipath propagation. The presence of coherent signals leads to the rank loss of signal covariance matrix, which results in the invalidity of conventional high-resolution direction of arrival (DOA) estimation methods. Therefore a variety of algorithms have been presented to solve this problem, which recover the rank of covariance matrix by utilizing the special property of steering vector. Recently, there has been a growing interest in deriving new algorithms that can reduce the loss of array aperture and increase the number of resolvable signals as well as the accuracy of DOA estimation. In this paper, the yield of coherent signals and their effect on DOA estimation are introduced, and the data models are established. Then, the coherent DOA estimation algorithms are presented class by class depending on their decorrelation approaches. Finally, the future research directions are prospected.

Key words: estimation of direction-of-arrival; coherent signal; multipath propagation

引　　言

波达方向（Direction of arrival，DOA）估计是阵列信号处理的一个重要分支，被广泛用于雷达、声呐、

基金项目： 国家自然科学基金（61671418）资助项目；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目；中国科学技术大学预研项目资助项目。

收稿日期： 2016-12-19；**修订日期：** 2017-02-10

通信、探测以及医学工程等领域。最开始研究 DOA 估计时,假设信号之间不相关,许多经典的超分辨子空间算法被提出,例如多重信号分类算法[1-2](Multiple signal classification,MUSIC)和旋转不变量信号参数算法[3-4](Estimation of signal parameters via rotational invariance,ESPRIT)。由于山脉、城市建筑的反射产生的多径效应,使得在现实生活中存在着大量的相干信号。如果信号之间相干,则信号协方差矩阵会产生秩缺,信号子空间会扩散到噪声子空间,导致信号子空间和噪声子空间不能正确划分,从而 MUSIC 等算法失效。针对均匀线阵相干信号的 DOA 估计问题,研究者们提出了许多解相干的算法,其中空间平滑算法应用最为广泛,如前向空间平滑[5](Forward spatial smoothing,FSS)算法和前后向空间平滑[6](Forward/backward spatial smoothing,FBSS)算法。文献[7]在前后向空间平滑的基础上,同时利用了子阵的自相关和互相关信息,提出了更为稳定的加权空间平滑算法。当存在非相干信号时,为减少空间平滑带来的孔径损失,常采用两步法来分别估计非相干信号和相干信号,文献[8-10]首先利用传统算法估计非相干信号,然后利用差分算法将非相干信号成分从协方差矩阵中去除,再估计相干信号 DOA。但是差分过程中相干信号成分也会受到损失,影响估计精度,基于斜投影矩阵[11-12]的方法可以避免这个问题。基于数据空间样本的矩阵束[13](Matrix pencil,MP)算法可以在不进行空间平滑的情况下实现对相干源的 DOA 估计,但是能处理的相干信号数量有限,且信噪比要求较高。基于矩阵重构的 Toeplitz 算法[14]也不需要空间平滑,且对信噪比要求不高,但孔径损失严重。随后,文献[15]提出同时利用前向和后向矢量的重构算法,有效减小了孔径损失。空间平滑和 Toeplitz 等算法损失了较大的阵列孔径,最大似然算法[16](Maximum likelihood,ML)可以在不损失阵列孔径的前提下解相干,但是由于多维搜索带来巨大的计算量,不利于实际工程的应用。文献[17~18]提出的求根加权子空间拟合(Root weighted subspace fitting,Root-WSF)算法是最大似然的一种解法,有计算量小和精度高的优点,广泛应用于相干信号的 DOA 估计,但是对于信号数过多的情形表现不佳。

上述所有方法,虽然解相干的原理不同,但都是将所有相干信号一起处理,这会大大制约阵列能处理的相干信号数量和估计精度。文献[19~20]提出基于高阶统计量的分组 DOA 估计算法,但由于使用高阶统计量,其对快拍数要求很高,且对信号具有非高斯性的要求,实用性差。随后,基于二阶统计量的分组处理算法[21]被提出,其只利用二阶统计量,避免了对快拍数和信号非高斯性的要求,通过利用协方差的两个子阵实现相干信号的分组处理,再利用正交投影算法进一步提高估计精度。这种分组处理算法能大大增加可处理的相干信号数量和估计精度,但是存在理论误差,算法稳定性不佳。在此基础上,文献[22]提出了一种在协方差矩阵分解后得到的子空间上进行的分组处理算法,同时结合 Toeplitz 重构算法,对得到的组导向矢量进行矩阵重构从而进行 DOA 估计,上述处理方法在提高算法鲁棒性的同时也能提高估计精度。相对于文献[21],上述算法具有更好的估计效果,但是,其同样存在理论误差影响算法稳定性。文献[23]结合前向空间平滑算法和斜投影算法提出了一种序贯分组估计相干信号的算法,将多组相干信号按照信号个数从少到多依次估计,首先利用前向空间平滑算法估计出相干信号最少的那组,然后通过斜投影算子将该组信号从协方差矩阵去掉,进而估计信号数第 2 少的那组相干信号,再结合斜投影算子在协方差矩阵上去掉这组相干信号的成分,重复上述步骤直至所有组完成解相干,从而实现序贯的相干信号 DOA 估计。这种方法相对于所有相干信号一起处理的方法,既可以高效地利用阵列孔径提高估计精度,还可以处理不同组中出现相同 DOA 的情况。

1 信号模型

考虑入射信号为远场窄带信号,阵列为含有 N 个阵元的均匀线阵,阵元间距 d 。假设有来自 D 个相互独立的远场信源 $s_i(t)$,$i=1,2,\cdots,D$,多径效应产生 K 个信号入射,其中第 i 个相干组含有 k_i 个多径信号($\sum_{i=1}^{D} k_i = K$)分别来自方向 θ_{ij},$i=1,2,\cdots,D;j=1,2,\cdots,k_i$,对应衰落系数为 β_{ij},则 t 时刻阵列接收数据可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{k_i}\boldsymbol{a}(\theta_{ij})\beta_{ij}s_i(t)+\boldsymbol{n}(t)=\sum_{i=1}^{D}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{\beta}_i s_i(t)=\boldsymbol{A\Gamma s}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{N\times1}$ 为阵列接收数据；$\boldsymbol{a}(\theta_{ij})=[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta_{ij}},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(N-1)\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta_{ij}}]^{\mathrm{T}}$ 为阵列导向矢量，λ 为信号波长；$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_D]\in\mathbf{C}^{N\times K}$，$\boldsymbol{B}_i=[\boldsymbol{a}(\theta_{i1}),\boldsymbol{a}(\theta_{i2}),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_{ik_i})]$，$i=1,2,\cdots,D$ 为阵列流形，$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_D\}\in\mathbf{C}^{K\times D}$，$\boldsymbol{\beta}_i=[\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ik_i}]^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,D$ 为衰落系数矩阵；$\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots,s_D(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{D\times1}$ 为源信号；$\boldsymbol{n}(t)=[n_1(t),n_2(t),\cdots,n_N(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{N\times1}$ 为相互独立、功率同为 σ_n^2 的零均值平稳噪声。阵列协方差矩阵表示为

$$\boldsymbol{R}_x=E\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)\}=\boldsymbol{A\Gamma R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_N=\boldsymbol{AR}_u\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_N \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{R}_u=\boldsymbol{\Gamma R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{R}_s=\mathrm{diag}\{\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_D^2\}$ 为源信号 $\boldsymbol{s}(t)$ 自相关矩阵，$\boldsymbol{I}_N$ 为 N 维单位矩阵。

全文中，符号 $(\cdot)^{\mathrm{T}}$，$(\cdot)^*$，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$，$(\cdot)^{\dagger}$ 和 $E\{\cdot\}$ 分别表示取转置、取共轭、取共轭转置、求 Moore-Penrose 逆矩阵和取期望，$\mathrm{diag}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k\}$ 代表由对角元素 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 组成的对角矩阵，$\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_k\}$ 代表由矩阵 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_k$ 组成的块对角矩阵，$\boldsymbol{A}(a:b,c:d)$ 则表示由 $\boldsymbol{A}$ 的 $a\sim b$ 行和 $c\sim d$ 列范围内元素构成的子矩阵。

2 相干信号波达方向估计

2.1 空间平滑算法

针对相干信号协方差矩阵秩亏的问题，文献[5]首先提出了前向空间平滑算法。该算法利用划分子阵的方式产生多个子阵的协方差矩阵，并加以平均，从而实现对信号协方差矩阵秩的恢复。将 N 个阵元的均匀线阵划分为 P 个相互交叠的子阵，其中第 l 个子阵包含的范围为第 l 阵元到第 $l+m-1$ 阵元，$m=N-P+1$。假设只有一组相干信号，即 $D=1$，$K=k_1$，则第 l 个子阵的输出协方差矩阵可以写为

$$\boldsymbol{R}_l^{\mathrm{f}}=E\{\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{f}}(t)[\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{f}}(t)]^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{A}_l^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Lambda}^{l-1}\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{\Lambda}^{l-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{H}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{f}}(t)=[x_l(t),x_{l+1}(t),\cdots,x_{l+m-1}(t)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_l=\boldsymbol{A}(l:l+m-1,:)$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_K\}$，$\nu_k=\exp(-\mathrm{j}2\pi\dfrac{d}{\lambda}\sin\theta_k)$。对所有子阵的协方差矩阵取平均，得到前向空间平滑处理后的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{f}}$ 为

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{f}}=\frac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{R}_l^{\mathrm{f}}=A_1\left[\frac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{\Lambda}^{l-1}\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{\Lambda}^{l-1})^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{f}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{f}}=\dfrac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{B}^{l-1}\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{B}^{l-1})^{\mathrm{H}}$，文献[5]中证明了 $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{f}}\}=\min\{K,P\}$，故当满足 $P\geqslant K$ 时，$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{f}}\}=K$ 实现解相干。随后利用传统的高分辨算法，如 MUSIC 和 ESPRIT，即可完成 DOA 估计。FSS 算法理论严谨，可以准确地实现信号协方差矩阵秩的恢复，但是由于只用了前向子阵，阵列孔径损失较大，导致阵列处理的相干源数量和估计精度都不足。具体而言，为达到解相干的需求，均匀线阵至少需要 $m+K-1$ 个阵元，且每个子阵阵元数 m 也至少为 $K+1$，所以至少需要 $2K$ 个阵元才能实现解相干，这意味着损失了约一半的阵列孔径。

文献[6]在前者的基础上，通过增加后向子阵，从而达到减小阵列孔径损失的目的。第 l 个后向子阵的输出协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R}_l^{\mathrm{b}}=E\{\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{b}}(t)[\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{b}}(t)]^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Lambda}^{l-1}\boldsymbol{R}_{\bar{u}}(\boldsymbol{\Lambda}^{l-1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{b}}(t)=[x_{N-l+1}^*(t),x_{N-l}^*(t),\cdots,x_{N-m-l+2}^*(t)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{R}_{\bar{u}}=\boldsymbol{\Lambda}^{-(N-1)}\boldsymbol{R}_u^*(\boldsymbol{\Lambda}^{-(N-1)})^{\mathrm{H}}$。同样，对后向子阵协方差矩阵取平均，得到后向平滑协方差矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{b}}$ 为

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{b}}=\frac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{R}_l^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{A}_1\left[\frac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{\Lambda}^{l-1}\boldsymbol{R}_{\bar{u}}(\boldsymbol{\Lambda}^{l-1})^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{b}}=\dfrac{1}{P}\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{\Lambda}^{l-1}\boldsymbol{R}_{\bar{u}}(\boldsymbol{\Lambda}^{l-1})^{\mathrm{H}}$。平均 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{f}}$ 和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{b}}$ 得到前后向平滑矩阵，即有

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{fb}}=\frac{\boldsymbol{R}^{\mathrm{f}}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{b}}}{2}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{fb}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_m \tag{7}$$

文献[6]已经证明,当 $2P\geqslant K$ 并且 $\left\{\varepsilon_{ij}=\frac{\beta_{ij}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)\pi\sin\theta_{ij}}}{\beta_{ij}},j=1,\cdots,k_j\right\}$ 中的相同元素不超过 P 时,$\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{fb}}$ 的秩为 K,实现解相干。此算法中,均匀线阵至少需要的阵元数为 $m+\lceil K/2\rceil$,而每个子阵的阵元数 m 至少为 $K+1$,所以总的阵元数至少为 $\lceil 3K/2\rceil$ 就可以实现解相干,其中 $\lceil x\rceil$ 表示取大于 x 的最小整数。

空间平滑类算法是处理相干信号的经典算法,处理简单,解相干效果较好,但是由于是所有信号一起处理,即使使用前后向平滑算法,其处理的信号数量依然有限,有较大的孔径损失。

2.2 Toeplitz 重构算法

文献[14]提出基于 Toeplitz 矩阵重构的解相干算法,假设只有一组相干信号,即 $D=1,K=k_1$,对于阵元数为 $2M+1$ 的均匀线阵,取数据协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_x$ 的任一行 $\boldsymbol{r}_m=[r_{m,-M},\cdots,r_{m,0},\cdots,r_{m,M}]$ 排列成 Toeplitz 矩阵,有

$$\boldsymbol{R}_m=\begin{bmatrix} r_{m,0} & r_{m,1} & \cdots & r_{m,M}\\ r_{m,-1} & r_{m,0} & \cdots & r_{m,M-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{m,-M} & r_{m,-M+1} & \cdots & r_{m,0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{D}_m\boldsymbol{A}_r^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{M+1} \tag{8}$$

其中:$\boldsymbol{A}_r$ 为长度为 $M+1$ 的导向矢量矩阵,$\boldsymbol{D}_m$ 的秩为 K,所以当 $M+1\geqslant K$ 时,可以实现解相干。文献[14]中的 Toeplitz 重构算法可以实现较高的估计精度,但是对阵元数有奇数的限制,并且类似于 FSS,其阵列孔径损失较大。文献[15]提出了联合前后向矢量的 Toeplitz 重构算法。其首先利用协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_x$ 的特征矢量或者一些列得到前向矢量 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}}$,对 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}}$ 进行 Toeplitz 重构得到 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{f}}$,对前向矢量 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}}$ 进行共轭翻转得到后向矢量 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}$,同样对 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}$ 进行 Toeplitz 重构得到 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{b}}$,联合 $\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{f}}$ 和 $\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{b}}$ 得到 $p\times 2q$ 新矩阵,即

$$\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{fb}}=[\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{f}},\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{b}}] \tag{9}$$

在去除噪声的情况下,$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{fb}}\}=\min\{p,2q,K\}$,概率为 1 成立,所以当 $\min\{p,2q\}\geqslant K$ 时,$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{R}_D^{\mathrm{fb}}\}=K$,实现解相干后利用 ESPRIT 算法实现 DOA 估计。p 和 q 受到阵元数 N 的限制,即 $N=q+p-1$,对比直接前向重构算法需满足 $\min\{p,q\}\geqslant K$,联合前后向重构矩阵的算法要求更低,阵列孔径损失更小。

Toeplitz 重构算法利用了均匀线阵导向矢量的特性,将导向矢量的线性组合进行 Toeplitz 重排,从而达到解相干的目的,其计算精度较高,鲁棒性好,但是也存在阵列孔径损失较大的问题。

2.3 求根加权子空间拟合算法

在文献[17~18]中,Stoica 等提出了一种近似解最大似然估计的快速算法,即求根加权子空间拟合算法(Root-WSF),该算法可用于估计相干信号。Root-WSF 是最大似然估计的多项式参数估计解法,由于阵列接收数据 $\boldsymbol{x}(t)$ 服从一个特殊的 ARMA 模型,其特征多项式为

$$b(z)=b_0z^K+b_1z^{K-1}+\cdots+b_K \tag{10}$$

它表示信号成分的空域特性,求出它的根就可以得到信号的 DOA,定义该多项式的系数向量为 $\boldsymbol{b}=[b_0,b_1,\cdots,b_K]^{\mathrm{T}}$,构造一个 $N\times(N-K)$ 的 Toeplitz 的矩阵,即

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} b_K^{*} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & b_K^{*} & \ddots & \vdots\\ b_0^{*} & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & b_0^{*} & \vdots & b_K^{*}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b_0^{*}\end{bmatrix} \tag{11}$$

Root-WSF 算法可表示为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}=\arg\min_{\theta}\{\mathrm{tr}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{ao}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}]\} \\ &\mathrm{s.t.}\quad \|\boldsymbol{b}\|^2=1 \text{ 且 } b_i=b_{K-i}^{*} \end{aligned} \tag{12}$$

其中：$\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}$ 为信号子空间的估计，$\boldsymbol{W}_{\mathrm{ao}}=\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}$，$\boldsymbol{\Omega}^2=\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{s}}-\sigma_n^2\boldsymbol{I}_D$，$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{s}}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_D\}$，$\sigma_n^2=\dfrac{1}{N-D}\sum_{i=D+1}^{N}\lambda_i$，定义 $\tilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{ao}}^{\frac{1}{2}}$，则 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{ao}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}=\tilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{s}}\tilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}=\sum_{d=1}^{D}\tilde{\boldsymbol{u}}_d\tilde{\boldsymbol{u}}_d^{\mathrm{H}}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{u}}_d$ 为 $\tilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{s}}$ 的列，可将式(12)表示为

$$J(\boldsymbol{b})=\mathrm{tr}\left[\sum_{d=1}^{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{u}}_d\tilde{\boldsymbol{u}}_d^{\mathrm{H}}\right]=\mathrm{tr}\left[\sum_{d=1}^{D}\tilde{\boldsymbol{u}}_d^{\mathrm{H}}F(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{u}}_d\right] \tag{13}$$

定义矩阵

$$\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{u}}_d(K+1) & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(K) & \cdots & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(1)\\ \tilde{\boldsymbol{u}}_d(K+2) & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(K+1) & \cdots & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{u}}_d(N) & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(N-1) & \cdots & \tilde{\boldsymbol{u}}_d(N-K)\end{bmatrix} \tag{14}$$

则有 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{u}}_d=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{b}$，且 $J(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}\left[\sum_{d=1}^{D}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{A}_d\right]\boldsymbol{b}$。令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{T}$ 为 $(K+1)\times(K+1)$ 变换矩阵，即有

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & j & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & j\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -j\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -j & \cdots & 0 & 0\\ 1 & -j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\quad K\text{ 为奇数} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & j & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -j\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -j & \cdots & 0 & 0\\ 1 & -j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\quad K\text{ 为偶数} \tag{16}$$

计算 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_D=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\left[\sum_{d=1}^{D}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{A}_d\right]\boldsymbol{T}$，$\hat{\boldsymbol{c}}$ 即为 $\mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_D\}$ 最小特征值对应的特征向量，从而可以求得 $\hat{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{c}}$，求其根即可估计得到信号的 DOA，该算法可以通过文献[24]迭代提高估计精度。求根加权子空间算法计算效率高，估计精度高，是相干信号 DOA 估计的高效算法，但是当信号数过多的情形下表现不佳，为解决信号数多的情形应该可以分组估计的算法。

2.4 基于二阶统计量的分组处理算法

为了进一步提高 DOA 估计精度和能处理的相干信号数目，文献[21]提出了一种基于二阶统计量的相干信号分组处理算法，将来自不同信号源的信号，即不同组信号，分开处理。首先，取除去噪声后的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Lambda}_s-\sigma_n^2\boldsymbol{I}_D)\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}$ 的两个子矩阵

$$\boldsymbol{R}'_1=\boldsymbol{R}_0(1:N-1,1:N-1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{R}'_2=\boldsymbol{R}_0(2:N,1:N-1)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

式中:$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}(1:N-1,:)$,$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_K\}$,$\nu_k=\exp(-\mathrm{j}2\pi\dfrac{d}{\lambda}\sin\theta_k)$。构造新矩阵

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{new}}=\boldsymbol{R}'_2\boldsymbol{R}'^{\dagger}_1=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}})^{\dagger} \tag{19}$$

通过对 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{new}}$ 进行特征分解,得到特征向量 $\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2,\cdots,\boldsymbol{u}'_D$,文献[21]通过分析说明每个特征向量都对应于一组相干信号的混合导向矢量,$\boldsymbol{u}_i'$ 经过重新排列后,即有

$$\boldsymbol{u}_i'\approx\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{\beta}_i\quad i=1,2,\cdots,D \tag{20}$$

上式不是严格相等,是由于存在交叉项效应,即各组成分的混叠。利用 $\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2,\cdots,\boldsymbol{u}'_D$ 构造对应各组 $(N-1)\times(N-1)$ 的矩阵 $\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}'^{\mathrm{H}}_i$,$i=1,2,\cdots,D$,并通过对这些矩阵进行前后向空间平滑进行解相干,从而得到各组 DOA 估计。为了减小交叉项效应对估计的影响,利用正交投影技术进行再次处理,进一步提高估计精度。上述算法对各组相干信号分开处理,大大提高了阵列可处理的相干信号数量和估计精度,其需要的阵元数 N 只需要满足 $N>\max\{D,\left\lceil\dfrac{3}{2}\max\limits_{i\in\{1,2,\cdots,D\}}k_i\right\rceil\}$,与空间平滑、Toeplitz 重构等算法相比,大大减小了阵元数的需求。同时,直接利用二阶统计量,避免了高阶统计量对于快拍的巨大需求,但是,由于存在理论误差,使得算法稳定性较差。

在此基础上,文献[22]提出了一种在子空间分解后再估计混合导向矢量的算法。首先对协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_x$ 进行特征分解,得到信号子空间 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}\widetilde{\boldsymbol{T}}$,其中 $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ 为满秩的转换矩阵,并取 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}$ 的两个子阵

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}(1:N-1,:)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Gamma}\widetilde{\boldsymbol{T}} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}(2:N,:)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\widetilde{\boldsymbol{T}} \tag{22}$$

然后,构造新矩阵 $\boldsymbol{U}_{12}=\boldsymbol{U}_1^{\dagger}\boldsymbol{U}_2=\widetilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\widetilde{\boldsymbol{T}}$,并对其进行特征分解得到特征矢量矩阵 $\boldsymbol{G}$,则矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{G}$ 的任意一列都对应一组相干信号的混合导向矢量,需要注意的是,这其中仍然存在交叉项效应。对 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的各列进行 Toeplitz 重构,得到各组信号的 DOA 估计。上述算法,基于信号子空间,更为鲁棒,但是仍然存在理论误差,影响算法稳定性。

2.5 序贯分组处理算法

虽然前文已经介绍了基于二阶统计量的相干源分组处理算法,但其存在理论误差,文献[23]在斜投影和空间平滑算法的基础上,提出了一种序贯分组处理相干信号的算法。文献[23]中已经证明,在前向平滑算法中,使用的子阵数对应其能解相干的能力,即若只有一组两个相干的信号,只需要两个前向子阵平均就可以实现秩的完全恢复,实现解相干,而此时另一组 3 个相干信号则无法完全实现解相干。利用这个原理,从两个子阵开始,逐次增加子阵数量,并用每次平滑后的协方差矩阵进行 MUSIC 谱估计,得到当前阶所有完全解相干信号的 DOA 估计,再利用斜投影技术在协方差矩阵中消除这些相干组的影响,然后在新的协方差矩阵上重复上述步骤,就可以实现逐层序贯的分组解相干。具体而言,第 Q 次前向平滑,即使用 $Q+1$ 个前向子阵,得到的空间平滑协方差矩阵有

$$\boldsymbol{R}_Q^{\mathrm{f}}=\sum_{q=0}^{Q}\boldsymbol{W}_{N-Q,m}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{W}_{N-Q,m}^{\mathrm{H}}=\sum_{i=1}^{D}\sum_{q=0}^{Q}\boldsymbol{W}_{N-Q,m}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Z}_{0i}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{W}_{N-Q,m}^{\mathrm{H}} \tag{23}$$

式中:$\boldsymbol{W}_{a,b}=[\boldsymbol{O}_{a,b},\boldsymbol{I}_a,\boldsymbol{O}_{a,(N-a-b)}]$,$\boldsymbol{O}_{a,b}$ 表示 $a\times b$ 的零矩阵,$\boldsymbol{Z}_{0i}=\sigma_i^2\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{H}}$,$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Lambda}_s-\sigma_n^2\boldsymbol{I}_D)\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{H}}$ 为去除噪声的协方差矩阵。在 $\boldsymbol{R}_Q^{\mathrm{f}}$ 上使用 MUSIC 算法,所有信号数量满足 $k_i\leqslant Q+1$,$i=1,2,\cdots,D$ 的相干组都会被完全解相干。但是,在低信噪比和低快拍数的环境下,没有完全解相干的组会使得 MUSIC 谱中存在伪峰,因此,需要将真实信号的 DOA 和伪峰辨别开。由于各组相干信号数量已知,从所有的待选角度值中选择所有对应真实相干信号数量的角度组合,利用文献[25]中的算法估计这些角度对应的衰落系数,并组成待选的混合导向矢量 $\tilde{\boldsymbol{a}}$,如果选择的角度组合正确,就可以得到正确的混合导向矢量估计,而正确的混合导向矢量与 $\boldsymbol{R}_x$ 的噪声子空间 $\boldsymbol{U}_n$ 正交。通过对各种角度组合得到的矢量 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 与 $\boldsymbol{U}_n$ 正交性进行比较即可选出正确的角度组合,即计算 $g=\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{a}}$。得到正确的混合导向矢量后,在 $\boldsymbol{R}_0$ 上使用斜投影算法,使用新的 $\boldsymbol{R}_0$ 矩阵代入式(23),重复上述步骤,直到所有组信号完全解相干。此外,利用文

献[25]中的算法进一步提高估计精度。序贯分组的解相干算法不存在理论误差,按照相干组信号数从少到多依次估计,能够很好解决信号数多的情形,且充分地利用了阵列的孔径,在低信噪比和低快拍的条件下表现良好,但是计算较为复杂,并且需要已知各组相干信号的数量。

3 结束语

为更清晰地展示相干信号DOA估计的发展历程和研究现状,对文中提及的相干信号DOA估计算法进行总结。(1)空间平滑算法。此类算法通过在原有阵列数据的基础上取连续子阵,使用多个子阵平均来恢复协方差矩阵的秩,是常用的解相干算法,但是孔径损失较大。(2)Toeplitz重构算法。此类算法取相干信号导向矢量的线性组合,并对其进行Toeplitz排列重构矩阵,也能达到消除秩亏的目的,类似于空间平滑算法,此类算法也有较大的孔径损失。(3)求根加权子空间拟合算法。此算法为求根DOA估计算法,能够较为高效地进行相干信号DOA估计,并且其精度接近ML算法,但是其仍然难以处理相干信号过多的场景。(4)基于二阶统计量的分组处理算法。不同于前述算法,其对于各个相干组分开处理,从而大大减少了阵元的需求,可以处理更多的相干信号。同时,由于在孔径基本不变的情况下,处理的信号变少,其估计精度也能大大提高,但是此类算法目前都存在理论误差,影响算法的稳定性。(5)序贯分组处理算法。此算法同样是期望将各组相干信号分开处理,但其根据组内相干信号的数量对各组进行分离,由小及大逐次处理。其理论完善、精度高且较为鲁棒,但是需要较多的先验信息。多径传播在实际应用场景中十分常见,相干信号DOA估计仍是当前阵列信号处理的热点,在移动通信和雷达系统等方面应用广泛。如前文的介绍,目前已经取得了丰硕的研究成果,但依然存在一些问题值得进一步深入研究:(1)目前的相干信号DOA估计算法主要针对窄带信号,随着目前越来越多实际应用中使用宽带信号,甚至超宽带信号,如何有效地利用宽带信号的特点,研究适用于宽带信号的相干信号DOA估计算法,仍是一个需要解决的问题。(2)不同的应用场景中,信号具有不同的性质,而有些特殊的信号特性可以用来提高DOA估计的效果,例如信号的非圆特性就被用来提升阵列孔径。如何在相干信号DOA估计中有效利用信号特殊性质仍有待进一步的研究。(3)目前的解相干算法主要基于均匀线阵的结构特性,但是实际应用中存在各种不同的阵列形式,如何利用不同的阵列结构实现解相干也值得进一步探讨。(4)文中介绍基于二阶统计量对相干信号分组处理的算法表现出许多优良的性质,但同时也存在许多问题,如交叉项效应,如何有效地解决这些问题,提出更加高效的分组处理算法是一个亟待突破的方向。

参考文献:

[1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [C]// Proceedings of RADC Spectrum Estimation Workshop. Griffiss Air Force Base, NY:[s. n.], 1979: 243-258.

[2] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.

[3] Roy R, Kailath T. ESPRIT-a subspace rotation approach to estimation of parameters of cissoids in noise [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, 34(10): 1340-1342.

[4] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.

[5] Shan T J, Wax M, Kailath T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1985, 33(4): 806-811.

[6] Pillai S U, Kwon B H. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(1): 8-15.

[7] 吴向东,马仑,梁中华.一种改进的加权空间平滑算法[J].数据采集与处理,2015,30(4): 824-829.
Wu Xiangdong, Ma Lun, Liang Zhonghua. Improved weighted spatial smoothing algorithm [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2015, 30(4): 824-829.

[8] Ye Zhongfu, Zhang Yufeng, Xu Xu, et al. Direction of arrival estimation for uncorrelated and coherent signals with uniform

linear array[J]. IET Radar, Sonar Navigation, 2009, 3(2): 144-154.
[9] Qi Chongying, Wang Yongliang, Zhang Yongshun, et al. Spatial difference smoothing for DOA estimation of coherent signals[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2005, 12(11): 800-802.
[10] Liu Fulai, Wang jinkuan, Sun Changyin, et al. Spatial differencing method for DOA estimation under the coexistence of both uncorrelated and coherent signals[J]. IEEE Transactions Antennas Propagation, 2012, 60(4): 2052-2062.
[11] Xu Xu, Ye Zhongfu, Zhang Yufeng, et al. A deflation approach to direction of arrival estimation for symmetric uniform linear array[J]. IEEE Antennas Wireless Propagation Letter, 2006, 50(1): 486-489.
[12] Xu Xu, Ye Zhongfu, Peng Jianhui. Method of direction-of-arrival estimation for uncorrelated, partially correlated and coherent sources[J]. IET Microwave Antennas Propagation, 2007, 1(4): 949-954.
[13] Yilmazer N, Koh J, Sarkar T K. Utilization of a unitary transform for efficient computation in the matrix pencil method to find the direction of arrival [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(1): 175-181.
[14] Han Fangming, Zhang Xianda. An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005, 4(1): 443-446.
[15] Choi Y H. ESPRIT-based coherent source localization with forward and backward vectors [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(12): 6416-6420.
[16] Stoica P, Ottersten B, Viberg M, et al. Maximum likelihood array processing for stochastic coherent sources [J]. IEEE Transactions Signal Process, 1996, 44(1): 96-105.
[17] Stoica P, Sharman K C. Novel eigenanalysis method for direction estimation [J]. Proc Inst Elect Eng F, 1990, 137(1): 19-26.
[18] Stoica P, Sharman K C. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(7): 1132-1143.
[19] Yuen N, Friedlander B. DOA estimation in multipath: An approach using fourth-order cumulants [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(5): 1253-1263.
[20] Gonen E, Mendel J M. Applications of cumulants to array processing III Blind beamforming for coherent signals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(9): 2252-2264.
[21] Ye Zhongfu, Zhang Yufeng, Liu Chao. Direction-of-arrival estimation for uncorrelated and coherent signals with fewer sensors [J]. IET Microwaves Antennas & Propagation, 2009, 3(3): 473-482.
[22] Gan Lu, Luo Xiaoyu. Direction-of-arrival estimation for uncorrelated and coherent signals in the presence of multipath propagation [J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2013, 7(9): 746-753.
[23] Wei Jinqiang, Xu Xu, Luo Dawei, et al. Sequential DOA estimation method for multi-group coherent signals [J]. Signal Processing, 2017, 130: 169-174.
[24] Li Jian, Stoica P, Liu Zhengshe. Comparative study of IQML and MODE direction-of-arrival estimators [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(1): 149-160.
[25] Zhang Yufeng, Ye Zhongfu, Liu Chao. Estimation of fading coefficients in the presence of multipath propagation [J]. IEEE Transactions Antennas Propagation, 2009, 57(7): 2220-2224.

作者简介:

叶中付(1959-),男,教授,博士生导师,研究方向:信号与信息处理,E-mail:yezf@ustc.edu.cn。

罗大为(1993-),男,硕士研究生,研究方向:信号与信息处理。

韦进强(1990-),男,硕士研究生,研究方向:信号与信息处理。

徐　旭(1975-),女,讲师,研究方向:信号与信息处理。