

低复杂度递推信道估计联合均衡算法

戚业龙 杨育红 朱义君

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州, 450002)

摘要: 精确的信道状态信息对单载波频域均衡 (Single carrier frequency domain equalization, SC-FDE) 非常重要, 本文基于高斯消息传递 (Gaussian message passing, GMP) 提出了一种递推最小二乘 (Least squares, LS) 信道估计算法。借助于因子图, 根据广义分配率思想, 将估计函数分为多个局部函数, 每个局部函数做多利处理, 然后通过定义辅助变量使其成递推关系。根据 turbo 原理, 迭代交换软信息, 使得估计、均衡及译码联合进行。在此基础上, 分析并推导出无偏简化方法, 然后借助于快速傅里叶变换, 使得算法复杂度随观察向量长度的增加呈对数上升。仿真表明该简化算法具有较好的信道估计性能和误码率特性的同时, 显著降低了计算量。

关键词: 单载波频域均衡; 联合处理; 递推 LS 信道估计; 软信息

中图分类号: TN92 **文献标志码:** A

Low Complexity Jointed Iterative Domain Channel Estimation and Equalization Algorithm

Qi Yelong, Yang Yuhong, Zhu Yijun

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, 450002, China)

Abstract: Since accurate channel state information plays an important role in single carrier frequency domain equalization (SC-FDE), a frequency domain state-space approach to the least squares (LS) estimation is proposed with the aid of Gaussian message passing. Based on the generalized distribution law, the likelihood function is divided into several blocks in Forney-style factor graphs (FFG), and then a recursive algorithm is developed by defining an auxiliary matrix. Through exchanging soft information on code bits, channel estimation can be performed jointly with frequency equalization on the basis of turbo principle. Due to the special forms of the state transition matrix, an unbiased recursive estimators is obtained by properly forcing a covariance matrix in the recursive algorithm to be diagonal. The complexity of the proposed approach avoids matrix inversion and grows logarithmically with the length of the observation vector. Simulation results show that the new algorithm can achieve good performance with low computational complexity.

Key words: single carrier frequency domain equalization; joint processing; iterative least squares channel estimation; soft information

引 言

随着无线多媒体及因特网等宽带无线应用的增长,高速率通信技术引起人们的广泛关注。但是由于多径效应引起的码间干扰(Inter symbol interference, ISI)严重影响通信的可靠性,使系统性能恶化。因此有必要寻找一种有效的抵抗多径衰落影响的传输技术。虽然 OFDM(Orthogonal frequency division multiplexing)抗多径能力强,但存在峰均功率比较大、易产生非线性失真^[1]等问题,限制了其应用。近年来结合了 OFDM 与传统单载波系统优点的单载波频域均衡引起了人们的兴趣。文献[2]通过研究指出单载波频域均衡(Single carrier frequency domain equalization, SC-FDE)系统可以达到与 OFDM 相近的性能,并且复杂度与 OFDM 近似,同时,由于 SC-FDE 采用单载波传输,峰均功率比低,故在宽带无线通信领域有着广阔的应用前景^[3]。

文献[4-6]在假设获得理想信道信息的前提下,研究了 turbo 频域均衡,结果表明通过迭代处理软信息可以带来显著的性能提升。传统的 SC-FDE 系统利用独特字(Unique word, UW)作为导频进行信道估计,准确度较低。文献[7,8]研究了基于软信息交换的迭代信道估计算法,但估计部分都在时域进行,复杂度较高。本文提出一种频域递推 LS 信道估计算法,通过在估计器、均衡器、译码器之间迭代交换软信息,使得估计、均衡及译码联合进行,然后对所提算法进一步化简,将复杂度降为 $(2N-L)\log L$ (L 为信道阶数,)并推导证明这种简化是无偏的(在本文中取对数运算都是以 2 为底)。

1 系统描述

迭代频域联合处理模型如图 1 所示,发送端将经过卷积编码、随机交织和星座映射的数据符号以长度 J 分段,然后在每段数据符号前加入采用 CHU 序列的导频。

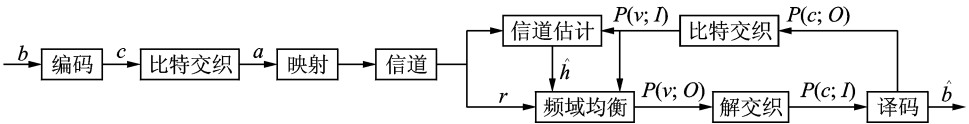


图 1 迭代频域联合处理系统模型

Fig. 1 Block diagram of the proposed channel estimation

接收机主要由 3 部分组成:信道估计器、均衡器和译码器,这里信道估计和均衡都在频域进行,三者通过迭代交换软信息实现联合估计、均衡和译码。第一次信道估计时,信道估计器利用训练序列获得初始信道参数,均衡器利用获得的信道信息对接收序列进行处理,得到发送数据的似然外信息 $P(v; o)$, $P(v; o)$ 经过解交织后送到译码器,译码器的软输出 $P(c; o)$ 经过比特交织后同时送给均衡器和信道估计器,信道估计器利用 $P(v; I)$ 和接收序列对信道参数进行再次估计,获得信道参数软信息 m_h ,均衡器利用 m_h 及 $P(v; I)$ 对接收数据进行再次处理,这样迭代若干次后,得到最终结果^[9]。

2 频域联合迭代信道估计均衡算法

在频域联合处理算法中迭代进行信道估计、均衡及译码,三者迭代交换软信息从而实现联合处理。信道估计器可以得到译码器获得的软信息,改善估计的准确度,从而提高系统性能。传统的 LS 信道估计算法虽然较为准确,但涉及到 $N \times N$ 的复杂矩阵求逆等运算,复杂度高。本文将估计和均衡都放在频域进行,推导出一种递推 LS 估计算法,借助 FFT 进行运算,大大降低计算复杂。

2.1 频域递推 LS 估计算法

接收到的数据段移除 UW 后可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{J-1}]^T$ 为长度为 J 的发送数据, 多径信道阶数为 L , $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]^T$ 为要估计的信道系数, $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T$ 为长度是 $N = J + L - 1$ 的接收数据段, \mathbf{n} 为均值为 0、方差为 $2\sigma^2$ 的高斯白噪声向量。

定义 F 为 $N \times N$ 的离散傅里叶变换矩阵, 即 $F(m, n) = N^{-1/2} e^{-i2\pi mn/N}$, 将式(1)变换到频域得

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{D}(\sqrt{N}\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{h}) + \mathbf{w} \tag{2}$$

这里 $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{F}\mathbf{x})$, $\mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{n}$, $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{S}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L \times L} \\ \mathbf{0}_{(N-L) \times L} \end{bmatrix}$ 。

假设 $N = KL$, 将 r_k 分为 K 块, 每块长度为 L , 这样第 k 块可以表示为 $\mathbf{r}_k = [r_{0 \times K+k}, r_{1 \times K+k}, \dots, r_{L \times K+k}]^T, k = 0, \dots, K-1$ 。定义相应的变量 $\mathbf{D}_k = \text{Diag}([d_{0 \times K+k}, d_{1 \times K+k}, \dots, d_{L \times K+k}])$, $\mathbf{w}_k = \text{Diag}([\omega_{0 \times K+k}, \omega_{1 \times K+k}, \dots, \omega_{L \times K+k}])$, 这里 r_j, ω_j, d_j 为 \mathbf{R}, \mathbf{W} 及对角矩阵 \mathbf{T} 的第 j 个元素。定义 $L \times L$ 的对角矩阵

$$\mathbf{P} = \text{Diag}([1, e^{i2\pi/N}, \dots, e^{i2\pi(L-1)/N}]) \tag{3}$$

$\tilde{\mathbf{f}}_j^T$ 为矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}$ 的第 j 列, 有

$$\sqrt{L}\mathbf{F}_L(\mathbf{P}^H)^K = \sqrt{N} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{0 \times K+k}^T \\ \tilde{\mathbf{f}}_{1 \times K+k}^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{L \times K+k}^T \end{bmatrix} \tag{4}$$

根据 r_j, ω_j, t_j 的定义和式(4), 可以将式(3)分为 K 个子块

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{T}_k(\sqrt{L}\mathbf{F}_L(\mathbf{P}^H)^k\mathbf{h}) + \mathbf{w}_k \tag{5}$$

定义 K 个长度为 L 的辅助向量

$$\mathbf{c}_k = \sqrt{L}\mathbf{F}_L(\mathbf{P}^H)^k\mathbf{h}, \quad k = 0, \dots, K-1 \tag{6}$$

由式(6)可以得到以下递推关系

$$\mathbf{c}_{k-1} = \mathbf{F}_L\mathbf{P}\mathbf{F}_L^H\mathbf{c}_k, \quad k = K-1, K-2, \dots, 1 \tag{7}$$

综合上述推导, 式(7)可以写成以下递推形式

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{k-1} = \mathbf{F}_L\mathbf{P}\mathbf{F}_L^H\mathbf{c}_k & k \neq 0 \\ \hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{F}_L^H\mathbf{c}_0 & k = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{D}_k\mathbf{c}_k + \mathbf{w}_k, \quad k = K-1, K-2, \dots, 0$$

最近发展的 GMP 技术以消息传递的观点对信号处理算法进行描述, 信息以均值向量和方差矩阵的形式传递^[10]。借助于因子图, 可以将全局估计函数划分为 K 个独立的局部函数, 局部函数做独立处理后递推传递发送数据的高斯消息, 因子图如图 2 所示。

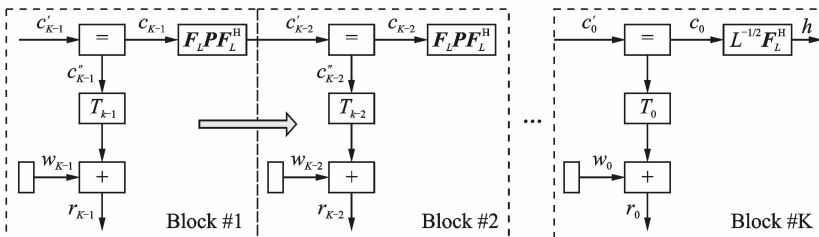


图 2 迭代信道估计因子图

Fig. 2 Forney-style factor of iterative channel estimation algorithm

通过图中箭头所示方向递推,可以得到对信道参数 \mathbf{h} 的估计。在第 1 个子块中对 $\mathbf{r}_{K-1} = \mathbf{D}_{K-1}\mathbf{c}_{K-1} + \mathbf{w}_{K-1}$ 进行 MMSE 估计,然后将估计结果 $\mathbf{m}_{c_{K-1}}, \mathbf{V}_{c_{K-1}}$ 传递到第 2 子块。在第 2 个子块中,利用式(7)将获得的信息转换为 \mathbf{C}_{K-1} 的先验均值 $\mathbf{m}_{c_{K-1}}$ 和自相关矩阵 $\mathbf{V}_{c_{K-1}}$,基于 $\mathbf{r}_{K-2} = \mathbf{D}_{K-2}\mathbf{c}_{K-2} + \mathbf{w}_{K-2}$ 进行估计,之后将获得的 $\mathbf{m}_{c_{K-2}}, \mathbf{V}_{c_{K-2}}$ 传递到第 3 个子块。以此类推,最终在第 K 块获得 $\mathbf{m}_{c_k}, \mathbf{V}_{c_k}$,然后利用式(8)将其转换为最终估计结果 $\hat{\mathbf{h}}, \mathbf{V}_h$ 。由于最初没有先验信息可用,故 $\mathbf{m}_{c_{K-1}} = \mathbf{0}, \mathbf{V}_{c_{K-1}}^{-1} = \mathbf{0}$ 。该算法简述如下。

(1) 初始化令 $\mathbf{m}_{c_{K-1}} = \mathbf{0}, \mathbf{V}_{c_{K-1}}^{-1} = \mathbf{0}$ 。

(2) For $k=K-1, K-2, \dots, 0$

(a) 计算 $\mathbf{V}_{c_k}, \mathbf{m}_{c_k}$

$$\mathbf{V}_{c_k} = \left(\mathbf{V}_{c_{k+1}}^{-1} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_k^H \mathbf{D}_k \right)^{-1} \quad (9)$$

$$\mathbf{m}_{c_k} = \mathbf{V}_{c_k} \left(\mathbf{V}_{c_{k+1}}^{-1} \mathbf{m}_{c_{k+1}} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_k^H \mathbf{r}_k \right) \quad (10)$$

(b) If $k \neq 0$, 计算 $\mathbf{V}_{c_{k-1}}, \mathbf{m}_{c_{k-1}}$

$$\mathbf{m}_{c_{k-1}} = \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \mathbf{m}_{c_k} \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_{c_{k-1}} = \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \mathbf{V}_{c_k} \mathbf{F}_L \mathbf{P}^H \mathbf{F}_L^H \quad (12)$$

Else, 得出最终计算结果

$$\mathbf{m}_h = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{F}_L^H \mathbf{m}_{c_0} \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_h = \frac{1}{L} \mathbf{F}_L^H \mathbf{V}_{c_0} \mathbf{F}_L \quad (14)$$

End if

End for

需要注意的是,由于最初没有的先验信息,MMSE 估计退化为 LS 估计。由于式(9-10,12)涉及矩阵相乘及求逆运算,整个迭代过程有着较高的复杂度,因此有必要进行深入研究以降低运算量。

由于式(12,13)可以利用 FFT 得到,运算量仅为 $L \log L$,故计算复杂度主要体现在式(9,10,12)上。通过观察可以看出如果式(12)中 \mathbf{V}_{c_k} 为对角矩阵,那么式(9,10)中所涉及的矩阵全为对角矩阵,其计算便不再复杂,故降低复杂度的关键点在于如何选取代替 \mathbf{V}_{c_k} 的对角矩阵,且使带来的误差尽可能小。

基于以上讨论,选取下面的简化值代替 \mathbf{V}_{c_k}

$$\mathbf{V}_{c_{k-1}} = \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \mathbf{V}_{c_k} \mathbf{F}_L \mathbf{P}^H \mathbf{F}_L^H \approx \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \left(\frac{1}{L} \text{Tr}(\mathbf{V}_{c_k}) \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_L \mathbf{P}^H \mathbf{F}_L^H = \left(\frac{1}{L} \text{Tr}(\mathbf{V}_{c_k}) \right) \mathbf{I} \quad (15)$$

文章附录给出证明,利用估计值得出的最终结果为 h 的无偏估计。这样整个迭代过程计算量主要体现在式(12)的 2 次 L 点 FFT 变换(FFT 和 IFFT 变换复杂度一致)和式(13)的 1 次 L 点 FFT 变换,从而将运算量降低到 $(2N-L) \log L$ 。

2.2 频域均衡算法

均衡器在获得信道信息后,根据接收向量 \mathbf{y} 和先验信息 $L(x_j)$,在频域对发送符号进行估计,得到其软信息

$$\boldsymbol{\lambda} = 2(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{G}^H (\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^H + 2\sigma^2 \mathbf{I})(\mathbf{F}\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{E}(x)) + \mathbf{U}\mathbf{E}(x) \quad (16)$$

这里 $\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{F}^H, \mathbf{U} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})_{\text{diag}}, \mathbf{E}(x), \mathbf{V}$ 为发送数据的均值向量和自相关矩阵, $\boldsymbol{\lambda}$ 被解交织成 $\boldsymbol{\lambda}'$ 后输入到译码器。

BCJR 算法解卷积码性能较好,但复杂度较高,为此本文采用文献[11]提出的 Log-MAP 算法将 BCJR 算法中的变量转换为对数的形式,从而把乘法运算都转换为加法运算,降低了运算复杂度。这样根据接收到的软信息逐比特运算可以得到信息序列的最大后验概率对数似然比

$$\gamma_j \equiv \ln \frac{p(\boldsymbol{\lambda}'_j | x_j = +1)}{p(\boldsymbol{\lambda}'_j | x_j = -1)} \quad (17)$$

利用译码器计算得出似然外信息,可以得出 $E(x_j), V(x_j)$, 然后将其作为先验信息, 供信道估计器和均衡器使用。这样迭代若干次后, 得出最终结果。

3 仿真结果

下面对本文所提频域联合信道估计均衡算法进行计算机仿真。符号间隔为 $0.2 \mu\text{s}$, 采用静态 SUI-5 信道, 每个数据段长度为 360, 训练序列采用长度为 $3L$ 的 CHU 序列, 采用生成多项式为 $(1+D+D^2 \quad 1+D^2)$ 、码率为 $1/2$ 的卷积码, 采用格雷映射的 QPSK 调制。

图 3 给出了不同迭代次数的系统性能曲线, 可以看出系统性能随着迭代次数的增加变好, 迭代初期获得的增益较高, 但随着迭代次数的增加, 迭代增益会相对缓慢下来, 大约经过 3, 4 次迭代后, 增益只是小幅度改进。权衡性能改善程度和所需迭代时间, 继续迭代没有必要, 故仿真中采取的迭代次数为 4。采用归一化信道均方误差 $\text{MSE}(h_{\text{LS}}) = E(\sum_L h - \hat{h}^2)$ 来衡量系信道估计性能, 如图 4 所示, 在信噪比大于 2 dB 后, 简化的递推 LS 估计性能与传统 LS 估计相比类似, 远好于只未利用译码器软信息的信道估计方法, 而传统 LS 算法涉及复杂矩阵求逆运算, 复杂度为 N^3 。

由图 5 可以看出所提算法的误码率与获得理想信息时接近, 相比于只采用训练序列而没有利用译码器反馈的软信息的算法性能约有 3.5 dB 增益。

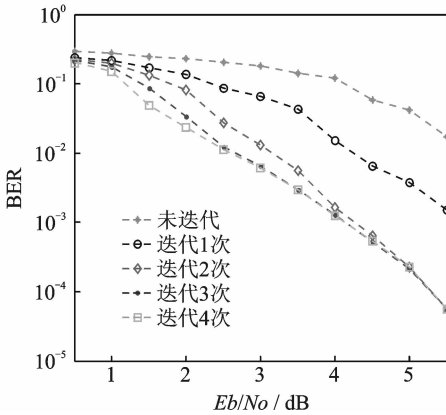


图 3 不同迭代次数性能比较

Fig. 3 BER performance via different iterative number

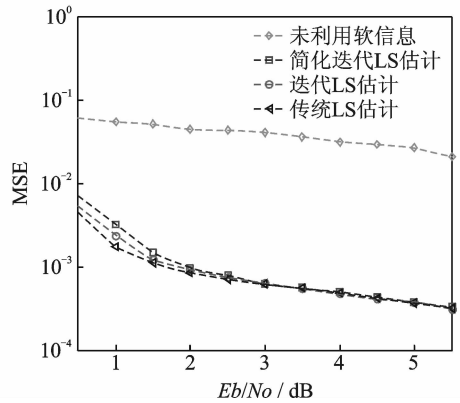


图 4 不同算法信道估计均方误差

Fig. 4 MSE performance of estimation algorithm

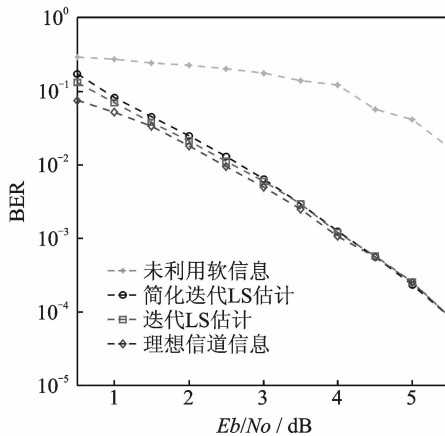


图 5 误码性能比较

Fig. 5 BER performance using various approaches for channel estimation

4 结束语

本文提出了一种迭代频域联合信道估计均衡算法,通过利用译码器输出的软信息,信道估计器可以获得更加准确的信道状态信息,进而提高了系统性能。然后进一步分析,推导出运算量只有 $(2N-L) \cdot \log L$ 的无偏简化算法。仿真结果表明所提算法性能与获得精确信道信息时相近,验证了算法的有效性。

参考文献:

- [1] Jiang Yuan. New companding transform for PAPR reduction in OFDM [J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(4): 282-28.
- [2] Wang Yue, Dong Xiaodai. Comparison of frequency offset and timing offset effects on the performance of SC-FDE and OFDM over UWB channels [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2009, 58(1): 242-250.
- [3] Pancaldi F, Vitetta G M, Kalbasi R. Single-carrier frequency domain equalization [J]. IEEE Signal Process Mag, 2008, 25(5): 37-56.
- [4] Kaligineedi P, Bhargava V. Frequency-domain turbo equalization and multiuser detection for DS-UWB systems [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(9): 3280-3284.
- [5] Visoz R, Berthet A, Chtourou S. Frequency-domain block turbo-equalization for single-carrier transmission over MIMO broadband wireless channel [J]. IEEE Transactions on Communications, 2006, 54(12): 2144-2149.
- [6] Benjamin Ng, Lam C H, Falconer D. Turbo frequency domain equalization for single carrier broadband wireless systems [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2007, 6(2): 759-767.
- [7] Ye Wu, Xu Zhu, Nan Di. A low complexity adaptive turbo frequency-domain channel estimation for single-carrier multi-user detection [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(11): 4094-4099.
- [8] Sellami N, Roumy A, Fijalkow I. The impact of both a priori information and channel estimation errors on the MAP equalizer performance [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(7): 2716-2742.
- [9] Koetter R, Singer A C, Tuchler M. Turbo equalization [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2004, 21(1): 67-80.
- [10] Loeliger H A, Dauwels J, Hu Junli. The factor graph approach to model-based signal processing [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(6): 1295-1322.
- [11] Wang H, Yang H, Yang D. Improved Log-MAP decoding algorithm for turbo-like codes [J]. IEEE Communications Letters, 2006, 10(3): 186-188.

作者简介:



戚业龙(1988-),男,硕士研究生,研究方向:通信信号处理、信道均衡, E-mail: 723895010@qq.com。



杨育红(1964-),女,副教授,研究方向:卫星通信、通信信号处理, E-mail: yangamie@163.com。



朱义君(1976-),男,副教授,研究方向:通信信号处理, E-mail: xxgczhu@126.com。

附录:

当 $k=K-1$ 时,可以得到

$$\mathbf{V}_{c_{K-1}} = 2\sigma^2 (\mathbf{D}_{K-1}^H \mathbf{D}_{K-1})^{-1} \tag{A1}$$

$$\mathbf{m}_{c_{K-1}} = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{V}_{c_{K-1}} \mathbf{D}_{K-1}^H \mathbf{r}_{K-1} = \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{V}_{c_{K-1}} \mathbf{D}_{K-1}^H (\mathbf{D}_{K-1} \mathbf{C}_{K-1} + \mathbf{w}_{K-1}) = \mathbf{C}_{K-1} + \boldsymbol{\xi}_{K-1} \tag{A2}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_{K-1} = \mathbf{D}_{K-1}^{-1} \mathbf{w}_{K-1}$, 由于噪声均值为零, 即 $E(\mathbf{w}_{K-1}) = 0$, 故 $E(\boldsymbol{\xi}_{K-1}) = 0$ 。

对 $k=K-2$

$$\mathbf{V}_{c_{K-2}} = (\mathbf{R}_{K-1} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-2}^H \mathbf{D}_{K-2})^{-1} \tag{A3}$$

$$\mathbf{m}_{c_{K-2}} = \mathbf{V}_{c_{K-2}} (\mathbf{R}_{K-1} \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \mathbf{m}_{c_{K-1}} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-2}^H \mathbf{r}_{K-2}) = \mathbf{V}_{c_{K-2}} (\mathbf{R}_{K-1} \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H (\mathbf{C}_{K-1} + \boldsymbol{\xi}_{K-1}) + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-2}^H \mathbf{r}_{K-2}) =$$

$$\mathbf{V}_{c_{K-2}} (\mathbf{R}_{K-1} c_{K-2} + \mathbf{R}_{K-1} \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \xi_{K-1} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-2}^H (\mathbf{D}_{K-2} c_{K-2} + \mathbf{w}_{K-2})) = c_{K-2} + \xi_{K-2} \quad (\text{A4})$$

这里

$$\mathbf{R}_{K-1} = \left(\frac{1}{L} \text{Tr}(\mathbf{V}_{c_{K-1}}) \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (\text{A5})$$

$$\xi_{K-2} = \mathbf{V}_{c_{K-2}} (\mathbf{R}_{K-1} \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \xi_{K-1} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-2}^H \mathbf{w}_{K-2}) \quad (\text{A6})$$

同理

$$\mathbf{m}_{c_{K-3}} = c_{K-3} + \xi_{K-3} \quad (\text{A7})$$

$$\xi_{K-3} = \mathbf{V}_{c_{K-3}} (\mathbf{R}_{K-2} \mathbf{F}_L \mathbf{P} \mathbf{F}_L^H \xi_{K-2} + \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{D}_{K-3}^H \mathbf{w}_{K-3}) \quad (\text{A8})$$

容易得出

$$E(\xi_{K-2}) = 0, E(\xi_{K-3}) = 0 \quad \dots \quad (\text{A9})$$

则当递归至 $k=0$ 时, 得出

$$\mathbf{m}_{c_0} = c_0 + \xi_0 \quad (\text{A10})$$

$$h^{RE1} = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{F}_L^H \mathbf{m}_{c_0} = h + \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{F}_L^H \xi_0 \quad (\text{A11})$$

这里 $E(\xi_0) = 0$, 从而 $E(h^{RE1}) = h$, 故所提出的简化无偏。

