

# 基于 FFT 的子孔径 MUSIC 波达方向估计

刘晓莉<sup>1,2</sup> 孙闽红<sup>1</sup>

(1. 杭州电子科技大学通信工程学院, 杭州, 310018; 2. 浙江省电子信息产品检验所, 杭州, 310007)

**摘要:** 针对现有的很多波达方向估计算法涉及到数据协方差矩阵的估计及其特征分解, 甚至是求逆, 导致运算复杂度高的问题, 提出了基于快速傅里叶变换的子孔径 MUSIC 波达方向估计算法。首先将等距线阵的接收数据矢量均匀划分为 4 个子矢量, 然后对各个子矢量分别求 FFT。将 FFT 的结果相干积累, 并找到最大峰值点。最后, 利用子矢量 FFT 的结果中与最大峰值点对应的数据构造新的降维矢量, 借助 MUSIC 算法进行波达方向估计。该方法避免了直接接收数据的协方差矩阵估计和特征分解, 有效地降低了运算量和计算复杂度, 在阵元数和快拍数都较多的情况下优越性尤为明显。计算机仿真验证了所提方法的有效性和优越性。

**关键词:** 子孔径 MUSIC; 快速傅里叶变换; 波达方向; 等距线阵

**中图分类号:** TN957.51      **文献标志码:** A

## Sub-aperture MUSIC for DOA Estimation Based on FFT

Liu Xiaoli<sup>1,2</sup>, Sun Minhong<sup>1</sup>

(1. College of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, 310018, China; 2. Zhejiang Provincial Testing Institute of Electronic & Information Products, Hangzhou, 310007, China)

**Abstract:** The most available direction of arrival (DOA) estimation algorithms require covariance matrix estimation and eigendecomposition, or even its inversion, thus increasing the computational complexity. Here a novel sub-aperture multiple signal classification (MUSIC) algorithm for DOA estimation based on fast Fourier transform (FFT) is proposed. Firstly, each received data vector of uniform linear array (ULA) is portioned into four sub-vectors. Then FFT is applied to each sub-vector to achieve the coherent integration. By utilizing the data corresponding to the peaks of coherent integration in each sub-vector, a reduced-dimensional data vector is constructed for DOA estimation in terms of MUSIC. Since the full-dimensional covariance matrix estimation and eigendecomposition are avoided, the computational complexity is relatively low. Numerical examples are provided to verify the effectiveness and superiority of the proposed method.

**Key words:** sub-aperture MUSIC; fast Fourier transform (FFT); direction of arrival (DOA); uniform linear array (ULA)

## 引言

空间谱估计作为阵列信号处理的主要研究内容之一,已被广泛地应用于雷达、声纳、地震等众多领域<sup>[1-8]</sup>。通常空间谱估计又称为波达方向(Direction of arrival, DOA)估计。近几十年来,DOA 估计受到了国内外广大学者的高度重视和关注,并涌现出一系列的研究成果。传统的波束形成其空间分辨率受阵列孔径的约束,分辨能力差,即所谓的“瑞利限”。20 世纪 70 年代末,MUSIC<sup>[1]</sup>和 ESPRIT<sup>[2]</sup>等提出了超分辨算法。与 Capon<sup>[3]</sup>功率谱不同的是,MUSIC 利用的是信号子空间和噪声子空间的正交性,因此具有更好的角度分辨性能,但是 MUSIC 涉及到支撑域的角度搜索问题,运算复杂度较高,且估计精度受搜索步长的约束。求根类 MUSIC 算法<sup>[4,5]</sup>的提出正是为了缓解搜索带来的计算量。ESPRIT 是根据子空间的旋转不变性来获取目标的 DOA 信息。但是,上述算法均涉及到直接接收数据协方差矩阵的估计和特征分解,甚至是矩阵求逆等问题,运算复杂度较高,当阵元数和快拍数都较大的情况下计算量的增加相当可观。

快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)因其高效和快速而备受关注,尤其是超大规模集成电路和计算机的飞速发展,使得 FFT 技术得以应用于工程中。正如前面所指出,基于 FFT 的谱分析也同样受到瑞利限的限制。针对上述问题,本文提出了基于 FFT 的子孔径 MUSIC 波达方向估计方法。首先将等距线阵(Uniform linear array, ULA)的接收数据矢量均匀划分为 4 个子矢量,然后对各个子矢量分别求 FFT。将 FFT 的结果相干积累,并找到最大峰值点。最后,利用子矢量 FFT 的结果中与最大峰值点对应的数据构造新的降维矢量,借助 MUSIC 算法进行 DOA 估计(简称为子孔径 MUSIC)。该方法避免了直接接收数据的协方差矩阵估计和特征分解,可有效地降低运算量和计算复杂度,在阵元数和快拍数都较多的情况下优越性尤为明显。

## 1 信号模型

简单起见,假设阵列是一个  $M$  元等距线阵,相邻的阵元间距为半波长,且只考虑平面内的角度。当在感兴趣的距离单元存在  $P$  个目标时,信号模型可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)]$  表示阵列流形,  $\mathbf{a}(\theta_p) = [1, e^{j\pi \sin \theta_p}, \dots, e^{j\pi (M-1) \sin \theta_p}]^T$  为第  $p$  个目标的导向矢量,  $(\cdot)^T$  表示转置;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_p(t)]^T$  表示接收信号的复包络;  $\theta_p$  和  $s_p(t)$  分别表示第  $p$  个目标的 DOA 和复包络。  $\mathbf{n}(t)$  为加性高斯白噪声矢量,且噪声协方差矩阵为  $\sigma^2 \mathbf{I}$ 。

$\mathbf{x}(t)$  的协方差矩阵可通过下式估计

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \quad (2)$$

式中:  $L$  表示采样快拍数;  $(\cdot)^H$  表示共轭转置。

MUSIC 谱估计为

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) \quad (3)$$

式中  $\mathbf{U}_n$  是由  $(M-P)$  个小特征值对应的特征矢量张成的噪声子空间,相应的信号子空间可表示为  $\mathbf{U}_s$ 。与 Capon 谱不同的是,MUSIC 谱表征的是信号子空间和噪声子空间的正交性。注意到式(3)涉及到最小优化搜索,运算量较大,且角度估计精度与搜索步长有关。

定义旋转因子

$$\mathbf{D} = \text{diag}([1, e^{j\pi \sin \theta}, \dots, e^{j\pi \sin \theta}]) \quad (4)$$

式中  $\text{diag}(\cdot)$  表示对角化操作符。根据 ESPRIT 算法,DOA 可以通过  $\mathbf{D}$  的对角元素得到,即

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{\Psi} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} (\mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s2}) \mathbf{T}^{-1} \quad (5)$$

式中  $\Psi = \mathbf{U}_{s1}^{\#} \mathbf{U}_{s2}^{\#}$ ,  $\mathbf{U}_{s1}^{\#} = (\mathbf{U}_{s1}^{\text{H}} \mathbf{U}_{s1})^{-1} \mathbf{U}_{s1}^{\text{H}}$  表示  $\mathbf{U}_{s1}$  的伪逆。  $\mathbf{T}$  是信号子空间  $\mathbf{U}_s$  与阵列流形  $\mathbf{A}(\theta)$  之间的变换矩阵, 从式(5)可以看出矩阵  $\mathbf{T}$  的列就是  $\Psi$  的特征矢量。  $\mathbf{U}_{s1}$  和  $\mathbf{U}_{s2}$  分别表示子空间  $\mathbf{U}_s$  的前  $(M-1)$  行和后  $(M-1)$  行。  $\mathbf{T}^{-1}$  为非奇异矩阵  $\mathbf{T}$  的逆矩阵。

由此可见, ESPRIT 虽然避免了角度搜索, 但是涉及到协方差矩阵的特征分解和求逆等, 运算复杂度仍然较高。

## 2 子孔径 MUSIC

考虑到 Capon, MUSIC 和 ESPRIT 等方法都涉及到直接接收数据的协方差矩阵估计和特征分解等, 运算量较大, 尤其是在阵元数和快拍数都较大的情况下, 运算复杂度增加相当可观, 为此提出了基于 FFT 的子孔径 MUSIC 算法。 不失一般性, 假设  $M \equiv 4k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , 令  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \mathbf{x}_4(t)]^{\text{T}}$ , 且

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^{\text{T}} \\ \mathbf{y}_2(t) &= [\mathbf{0}, \mathbf{x}_2(t), \mathbf{0}, \mathbf{0}]^{\text{T}} \\ \mathbf{y}_3(t) &= [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3(t), \mathbf{0}]^{\text{T}} \\ \mathbf{y}_4(t) &= [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_4(t)]^{\text{T}} \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{C}^{M/4 \times 1}$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $\mathbf{0}$  表示  $(M/4 \times 1)$  的全零矢量。 利用 FFT, 有

$$\mathbf{X}_f(t) \triangleq \text{FFT}\{\mathbf{x}(t)\} =$$

$$\text{FFT}\{\mathbf{y}_1(t)\} + \text{FFT}\{\mathbf{y}_2(t)\} + \text{FFT}\{\mathbf{y}_3(t)\} + \text{FFT}\{\mathbf{y}_4(t)\} = \mathbf{Y}_{f1}(t) + \mathbf{Y}_{f2}(t) + \mathbf{Y}_{f3}(t) + \mathbf{Y}_{f4}(t) \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{Y}_{f1}(k, t) = \sum_{m=0}^{M-1} y_{1m}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} = \sum_{m=0}^{\frac{M}{4}-1} \sum_{p=1}^P e^{j\pi m \sin \theta_p} s_p(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} + \mathbf{N}_1(k, t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) \sum_{m=0}^{\frac{M}{4}-1} e^{j\pi m \sin \theta_p} e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} + \mathbf{N}_1(k, t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{f2}(k, t) &= \sum_{m=0}^{M-1} y_{2m}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} = \sum_{m=\frac{M}{4}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^P e^{j\pi m \sin \theta_p} s_p(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} + \mathbf{N}_2(k, t) \\ &= e^{-j\frac{\pi}{2} k} \sum_{p=1}^P e^{j\pi \frac{m}{2} \sin \theta_p} s_p(t) \sum_{n=0}^{\frac{M}{4}-1} e^{j\pi n \sin \theta_p} e^{-j2\pi \frac{k}{M} n} + \mathbf{N}_2(k, t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{Y}_{f3}(k, t) = \sum_{m=0}^{M-1} y_{3m}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} = e^{-j\pi k} \sum_{p=1}^P e^{j\pi \frac{m}{2} \sin \theta_p} s_p(t) \sum_{n=0}^{\frac{M}{4}-1} e^{j\pi n \sin \theta_p} e^{-j2\pi \frac{k}{M} n} + \mathbf{N}_3(k, t) \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_{f4}(k, t) = \sum_{m=0}^{M-1} y_{4m}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} = e^{-j\frac{3\pi}{2} k} \sum_{p=1}^P e^{j\pi \frac{m}{2} \sin \theta_p} s_p(t) \sum_{n=0}^{\frac{M}{4}-1} e^{j\pi n \sin \theta_p} e^{-j2\pi \frac{k}{M} n} + \mathbf{N}_4(k, t) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{Y}_{f_i}(k, t)$  和  $\mathbf{N}_i(k, t)$  分别表示  $\mathbf{Y}_{f_i}(t)$  和  $\text{FFT}\{\mathbf{n}_i(t)\}$  的第  $k$  个元素,  $i=1, \dots, 4$ 。

从式(7)可以看出, 分别对  $\mathbf{y}_1(t)$ ,  $\mathbf{y}_2(t)$ ,  $\mathbf{y}_3(t)$  和  $\mathbf{y}_4(t)$  作 FFT 后, 并对其作相干积累, 结果等同于直接对  $\mathbf{x}(t)$  作 FFT。

为说明方便, 这里假设只有两个目标, 且都在主瓣宽度内, 显然直接 FFT 无法分辨两个目标, 这就是所谓的瑞利限。 对  $\mathbf{X}_f(t)$  进行谱峰搜索, 找到最大峰值对应的下标, 记为  $i_x$ , 相应的 DOA 估计为  $\hat{\theta}_{\text{est}}$ , 则降维后的子矢量可通过下式进行构造

$$\mathbf{f}(t) = [\mathbf{Y}_{f1}(i_x, t), \bar{\mathbf{Y}}_{f2}(i_x, t), \bar{\mathbf{Y}}_{f3}(i_x, t), \bar{\mathbf{Y}}_{f4}(i_x, t)]^{\text{T}} \quad (12)$$

其中

$$\bar{\mathbf{Y}}_{f2}(t) = \text{diag}[1, e^{j\frac{\pi}{2}}, \dots, e^{j\frac{\pi}{2}(M-1)}] \mathbf{Y}_{f2}(t) \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{f_3}(t) = \text{diag}[1, e^{j\pi}, \dots, e^{j\pi(M-1)}] \mathbf{Y}_{f_3}(t) \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{f_4}(t) = \text{diag}[1, e^{j\frac{3\pi}{2}}, \dots, e^{j\frac{3\pi}{2}(M-1)}] \mathbf{Y}_{f_4}(t) \quad (15)$$

同理,根据式(2)可得协方差矩阵为

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{f}(t) \mathbf{f}^H(t) \quad (16)$$

子空间 MUSIC 谱为

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathbf{b}^H(\theta) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \mathbf{b}(\theta) \quad (17)$$

式中  $\mathbf{b}(\theta) = [1, e^{j\pi \frac{M}{4} \sin \theta}, e^{j\pi \frac{M}{2} \sin \theta}, e^{j\pi \frac{3M}{4} \sin \theta}]^T$ 。由于前面已经假设只存在两个目标,因此噪声子空间  $\mathbf{u}_n$  可由  $\hat{\mathbf{R}}_f$  最小的 2 个特征值对应的特征矢量构成。对于较大的  $M$ ,由于  $|M/4 \sin \theta| > 1$  会导致导向矢量  $\mathbf{b}(\theta)$  存在模糊性。然而,在对  $\mathbf{X}_f(t)$  进行谱峰搜索时,已经记录了估计的 DOA,所以可以对  $\hat{\theta}_{\text{est}}$  附近一定的波束宽度范围内进行角度搜索,从而避免了角度的模糊,故式(17)可进一步修正为

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathbf{b}^H(\theta) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \mathbf{b}(\theta) \quad (18)$$

其中  $\Theta$  表示  $\hat{\theta}_{\text{est}}$  附近一定的波束宽度范围。

针对上述参数,通常计算协方差矩阵及其特征分解需要的运算量<sup>[9]</sup>约为  $O(M^2 L + M^3)$ 。若考虑全维求根 MUSIC,其运算量大约为  $O(M^2 L + M^3) + 8(M-1)^3$ ;而本文方法中,协方差矩阵及其特征分解的运算量约为  $16L + 64$ ,FFT 的运算量约为  $2ML \log_2 M$ , $\Theta$  内搜索的运算量为  $\theta_0 / \Delta\theta$  ( $\theta_0$  表示角度搜索的波束宽度, $\Delta\theta$  表示搜索步长),则总的运算量约为  $16L + 64 + 2ML \log_2 M + \theta_0 / \Delta\theta$ 。若  $M=124, L=256$ ,则全维求根 MUSIC 的运算量约为  $2.07 \times 10^7$ ,而本文方法的运算量约为  $4.47 \times 10^5$  (其中  $\theta_0 = 10^\circ, \Delta\theta = 0.01^\circ$ )。显然,本文方法的运算量较低,随着阵元数和快拍数的增加,求根 MUSIC 运算量的增长速度明显快于本文所提方法。

### 3 计算机仿真

本节给出了计算机仿真验证子孔径 MUSIC 算法的有效性和优越性。假设接收阵列为等距线阵,阵元数  $M=128$ ,阵元数为半波长,空间存在两个窄带远场目标,入射角分别为  $\theta_1 = 30^\circ$  和  $\theta_2 = 30.3^\circ$ 。

图 1 给出了 10 次蒙特卡洛实验下的子孔径 MUSIC 谱,其中信噪比  $\text{SNR} = -5 \text{ dB}$ 。图 1(a) 和 (b) 中快拍数分别为  $L=50$  和  $L=256$ 。图中的“☆”表示的是对直接接收数据作 FFT 后估计的角度值(幅度不代表任何意义,仅为直观性)。从图中可以看出,本文方法能有效地分辨两个主瓣内的目标。工程上一般要求采样快拍数取 2 至 3 倍的系统自由度才能使性能损失不超过  $3 \text{ dB}$ <sup>[10]</sup>。因此,若直接对接收数据作协方差矩阵估计,显然  $L=50$  的快拍数远远不够,而本文方法由于降维矢量的维数仅为 4,所以

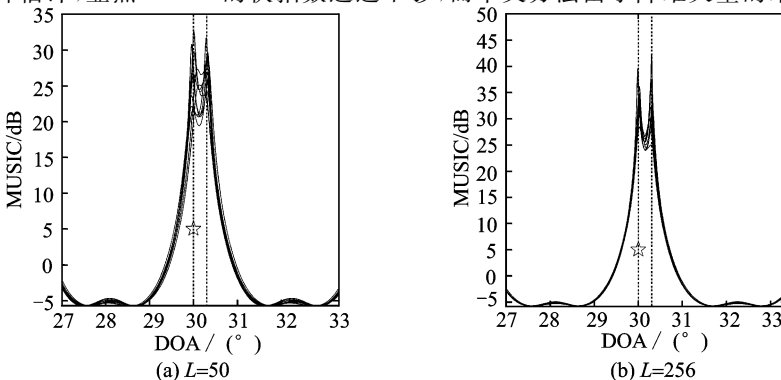


图 1 10 次蒙特卡洛实验下的子孔径 MUSIC 谱

Fig. 1 Spectrum of sub-aperture MUSIC with 10 independent trials

50 次的快拍就能较好地估计协方差矩阵。另外,对比图 1(a)和(b)后发现,随着快拍数的增加,DOA 估计的性能也随之改善。

图 2 描述了 DOA 估计的均方根误差随快拍数变化的性能曲线,其中  $\text{SNR} = -5 \text{ dB}$ ,蒙特卡洛独立实验次数为 200。为了比较,同时画出了全维 MUSIC 算法估计的性能曲线。从图中可以看出,在相同快拍数的情况下,本文方法的性能略优于全维 MUSIC,这主要是由于对各个子矢量作 FFT 时有一定的能量累积,换句话说,本文方法在相对较少的快拍数时就能达到较好的性能。

图 3 给出了 200 次蒙特卡洛实验下 DOA 估计的均方根误差随信噪比变化的性能曲线,其中  $L = 256$ 。从图中可以看出在信噪比较低时本文方法性能优于全维 MUSIC,而在高信噪比时性能略差,然而考虑到本文方法的运算复杂度较低,因此较小的性能损失可以容忍。

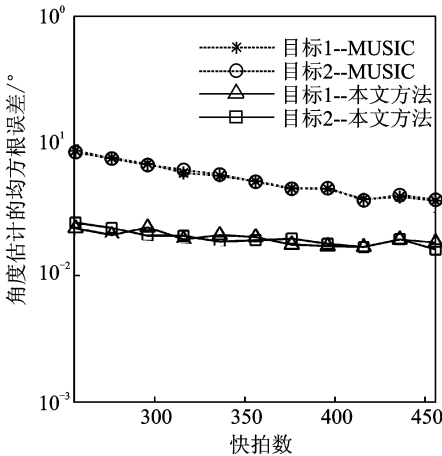


图 2 DOA 估计性能随快拍数的变化曲线

Fig. 2 RMSE of DOA estimation versus the number of snapshots

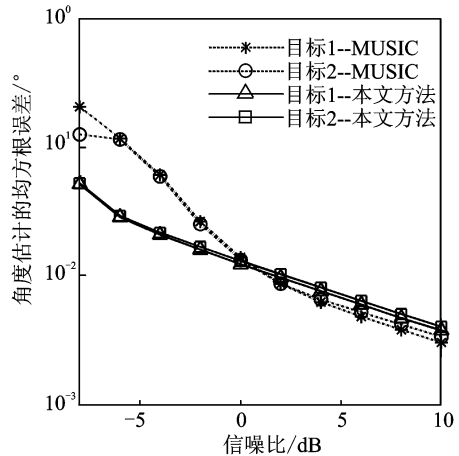


图 3 DOA 估计性能随信噪比的变化曲线

Fig. 3 RMSE of DOA estimation versus SNR

## 4 结束语

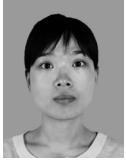
针对大阵元大快拍的情况,本文提出了一种基于 FFT 的子孔径 MUSIC 波达方向估计方法,该方法有效地避免了直接接收数据的协方差矩阵估计及其特征分解,可在一定程度上降低运算量和计算复杂度。理论分析和计算机仿真验证了所提方法的有效性。更直观地,本文方法可以推广到均匀面阵的情况,对各个子块作二维 FFT,然后构造新的数据矢量进行相应的两维角度估计。本文假设是对阵列进行均匀非重叠划分,实际上可以对阵列进行类似滑窗的重叠划分,后续的角度估计类似,但会带来孔径损失;本文假设只存在两个目标且两个目标均位于主瓣内,实际上本文方法也可以推广到大于两个目标的情况。当然,对于非重叠划分和多目标的情况,分析和 DOA 估计会相对复杂,作者会在后续的工作中进行更深入的研究。

## 参考文献:

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] Roy R, Kailath T. ESPRIT—A subspace rotation approach to estimation of parameters of cissoids in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1986, 34(10): 1340-1342.

- [3] Capon J. High-resolution frequency-wave number spectrum analysis[J]. *Proceeding of IEEE*, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [4] Ren Q S, Willis A J. Fast root-MUSIC algorithm[J]. *Electronics Letters*, 1997, 33(6): 450-451.
- [5] 郑春弟, 解春维, 李有才. 基于实值特征值分解的求根 MUSIC 算法[J]. *数据采集与处理*, 2010, 25(2): 154-159.  
Zheng Chundi, Xie Chunwei, Li Youcai. Root MUSIC algorithm based on real-valued eigenvalue decomposition[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2010, 25(2): 154-159.
- [6] Wu Jianxin, Wang Tong, Suo Zhiyong, et al. DOA estimation for ULA by spectral Capon rooting method[J]. *Electronics Letters*, 2009, 45(1): 84-85.
- [7] Hyder M M, Mahata K. Direction-of-arrival estimation using a mixed  $l_{2,0}$  norm approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9): 4646-4655.
- [8] 韩勇, 乔晓林, 金铭, 等. 基于 Toeplitz 矩阵的酉变换波达角估计算法[J]. *数据采集与处理*, 2011, 26(1): 52-56.  
Han Yong, Qiao Xiaolin, Jin Ming, et al. Unitary transformation DOA algorithm based on Toeplitz matrix[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2011, 26(1): 52-56.
- [9] Lü Hui, Feng Dazheng, Liu Hongwei, et al. Tri-iterative least-square method for bearing estimation in MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(12): 2686-2691.
- [10] Reed I S, Mallett J D, Brennan I E. Rapid convergence rate in adaptive arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1974, 10(6): 853-863.

#### 作者简介:



刘晓莉(1984-),女,博士,高级工程师,研究方向:阵列信号处理、MIMO 雷达参数估计、信息安全等, E-mail: xll@hdu.edu.cn; lxl@zdyj.org.cn。



孙闾红(1974-),男,博士,副教授,研究方向:通信与雷达信号处理、电子对抗和干扰信道等, E-mail: cougar@hdu.edu.cn。

