

# 基于子带 SDL 的 LCMV 宽带波束形成性能分析

赵拥军<sup>1</sup> 陈 晖<sup>1,2</sup>

(1. 解放军信息工程大学导航与空天目标工程学院, 郑州, 450002; 2. 国防大学公共平台中心, 北京, 100091)

**摘 要:** 对子带阵元延迟线(SDL)波束形成器的线性约束最小方差(LCMV)宽带自适应波束形成算法进行了性能分析。推导了子带 LCMV 算法的输出信干噪比(SINR)的解析表达式, 对比了子带 LCMV 算法和全带 LCMV 算法的阵列响应性能, 以及阵元数量、输入信噪比(SNR)和阵元间距对输出 SINR 的影响, 并分析了子带滤波器组的参数对子带 LCMV 输出 SINR 性能的影响。仿真结果表明子带 LCMV 算法可有效提高性能, 并可在不降低性能的条件下降低阵元需求。

**关键词:** 宽带波束形成; 阵元延迟线; 子带滤波器组; 线性约束最小方差

**中图分类号:** TN911.7      **文献标志码:** A

## Performance Analysis of LCMV Wideband Beamforming With Sensor Delay Lines in Subbands

Zhao Yongjun<sup>1</sup>, Chen Hui<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Navigation and Aerospace Target Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, 450002, China; 2. Public Platform Center, National Defense University, Beijing, 100091, China)

**Abstract:** Subband sensor delay lines (SDL) performance based on linearly constrained minimum variance (LCMV) adaptive wideband beamforming algorithm is analyzed. The output signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR) of subband LCMV algorithm is derived. The performance of fullband LCMV beamforming and subband LCMV beamforming is compared, including array response and output SINR with different number of elements, input signal-to-noise ratio (SNR), and element spacing. Output SINR performance of subband LCMV beamforming with different parameters of subband filter banks is also analyzed. Simulation results verify that the subband LCMV algorithm improves its performance and reduces the element need at no cost of performance.

**Key words:** wideband beamforming; sensor delay lines (SDL); subband filter banks; linearly constrained minimum variance (LCMV)

## 引 言

波束形成作为一种重要的信号处理技术,其主要目的是通过阵列天线接收某些特定方向的期望信号,同时抑制其他方向的干扰信号。随着宽带信号的应用越来越广泛,宽带波束形成器的设计已成为阵列信号处理领域的研究热点之一。

由于宽带信号涉及的频率变化范围较大,频率不变性成为宽带波束形成器设计所需考虑的首要问题,而大多数窄带波束形成方法无法满足此要求。Frost 通过在各阵元后增加一系列抽头延迟线(Tapped delay lines, TDL)的方法建立了时域宽带波束形成模型,并基于此模型提出了线性约束最小方差(Linearly constrained minimum variance, LCMV)宽带自适应波束形成算法<sup>[1]</sup>。针对时域 TDL 模型较为复杂的时间延迟加权系统,文献[2]利用阵元延迟线(Sensor delay lines, SDL)代替 TDL,指出 SDL 波束形成器本质上是利用信号到达各阵元之间的延迟代替了 TDL 波束形成器抽头之间的时间延迟,并比较了 TDL 波束形成器和 SDL 波束形成器的宽带自适应波束形成算法的性能,当 TDL 波束形成器的抽头数和 SDL 波束形成器的阵元数相等时,SDL 波束形成器性能优于 TDL 波束形成器。文献[3]进一步分析 SDL 波束形成器的自适应波束形成算法的输出信干噪比(Signal-to-interference-plus-noise ratio, SINR)性能,并与 TDL 波束形成器进行了对比,得出了与文献[2]相似的结论。虽然 TDL 波束形成器和 SDL 波束形成一定程度上解决了宽带波束形成的问题,但其频率不变性仍有待提高。针对这个问题,一些文献提出将宽带波束形成器的设计问题转化为凸优化的问题进行优化求解<sup>[4,5]</sup>,取得了较好的效果,但此类方法无法根据阵元接收信号进行自适应的权值调整,且凸优化所涉及的计算量相对较大。

为了提高宽带波束形成的性能,子带技术已广泛应用于宽带波束形成器的设计中<sup>[6-12]</sup>。针对 TDL 波束形成器存在的问题,子带滤波器组被引入宽带波束形成器的设计中,起到了提高性能、减小抽头延迟线长度的目的<sup>[6,7]</sup>。针对 SDL 波束形成器的宽带自适应波束形成算法存在的频率不变性较差的问题,文献[8]结合子带滤波器组和 SDL 波束形成器,建立了子带 SDL 波束形成器模型,并提出了基于此模型的子带 LCMV 宽带自适应波束形成算法,提高了频率不变性。输出 SINR 性能为波束形成性能分析的一个重要指标,文献[3]对全带 LCMV 算法的输出的 SNR 进行了性能分析,而文献[8]提出的子带 LCMV 算法的输出 SINR 性能分析有待完善,本文将在文献[8]的基础上推导子带 LCMV 算法的输出 SINR 表达式,并进一步对比分析子带 LCMV 算法和全带 LCMV 算法的输出 SINR 性能及阵列响应性能。

### 1 子带 SDL 波束形成器

文献[8]结合子带滤波器组和 SDL 波束形成器,建立了子带 SDL 波束形成器,其结构示意图如图 1 所示,其中, A 表示分析滤波器组(具体结构如图 2(a)所示),各路分别由一个分析滤波器  $h_k(n)$  ( $k=0,1,\dots,K-1$ ) 和一个下采样器  $\downarrow N$  组成。S 表示综合滤波器组(具体结构如图 2(b)所示),各路分别由一个综合滤波器  $g_k(n)$  ( $k=0,1,\dots,K-1$ ) 和一个下采样器  $\uparrow N$  组成。图 1 中虚框(SBF)为子带波束形成器。

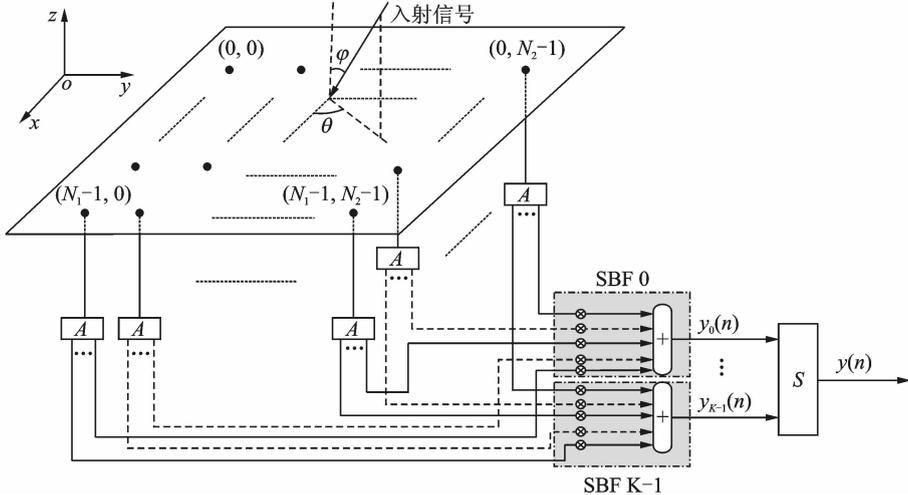


图 1 子带 SDL 波束形成器结构示意图  
Fig. 1 Structure of subband SDL beamformer

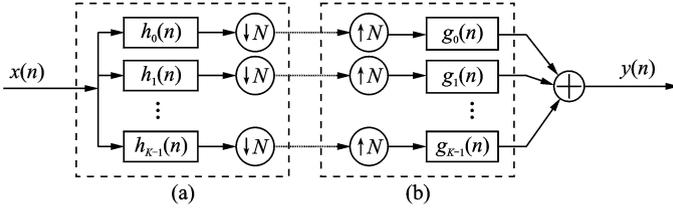


图2 滤波器组的一般结构

Fig. 2 General structure of subband filter banks

子带 SDL 波束形成器由若干阵元均匀的排列在一个平面上组成平面阵,如图 1 所示,假定入射信号为远场信号,各阵元后的分析滤波器组将各阵元的接收信号进行滤波和采样,得到  $K$  路子带信号。然后经过  $K$  个子带波束形成器加权求和后得到  $K$  个输出  $y_k(n)$ ,  $k=0,1,\dots,K-1$ ,再经过分析滤波器组的插值和滤波,最后求和得到宽带波束形成的输出  $y(n)$ 。

正如子带自适应滤波技术可以在有效地减小滤波器长度的同时,而保持与全带相似的性能一样,子带滤波器组的引入,使得子带 SDL 波束形成器可以在较少的阵元条件下,达到与 SDL 波束形成器在较多阵元条件下相似的性能。子带 SDL 波束形成器所需阵元数量的理论选取值为<sup>[13]</sup>

$$TN_{\text{sub}} = \frac{TN_{\text{full}} + L_p}{N} \quad (1)$$

式中:  $TN_{\text{sub}}$  表示子带 SDL 波束形成器的阵元数量;  $TN_{\text{full}}$  表示 SDL 波束形成器的阵元数量;  $L_p$  为原型低通滤波器的长度,  $N$  为滤波器组的采样参数。

## 2 子带 LCMV 的输出 SINR

根据图 1 所示的模型,各子带波束形成器均采用 LCMV 自适应波束形成器。假定子带 SDL 波束形成器的  $x$  轴方向为  $N_1$  个阵元,相邻阵元间距相等且为  $d_1$ ,  $y$  轴方向为  $N_2$  个阵元,相邻阵元间距相等且为  $d_2$ ,以坐标原点  $(0,0)$  处阵元为参考阵元,坐标  $(n_1, n_2)$  处的阵元接收信号表示为  $x_{n_1, n_2}(n)$ ,将阵元接收信号变换到频域,得到  $x_{n_1, n_2}(n)$  的频域表达式  $X_{n_1, n_2}(e^{j\omega})$  为

$$X_{n_1, n_2}(e^{j\omega}) = X_{0,0}(e^{j\omega}) e^{-j\omega \frac{n_1 d_1 \cos\theta + n_2 d_2 \sin\theta}{c}} \quad (2)$$

式中:  $X_{0,0}(e^{j\omega})$  表示参考点  $(0,0)$  处阵元接收信号的频域表达式,且  $n_1=0,1,\dots,N_1-1$ ;  $n_2=0,1,\dots,N_2-1$ ;  $\theta$  和  $\varphi$  分别为入射信号的方位角和仰角;  $c$  表示光速。

阵元间距  $d_1$  和  $d_2$  分别为  $d_1 = \frac{\lambda_{\min}}{2} = cT$ ,  $d_2 = r \frac{\lambda_{\min}}{4} = r \frac{cT}{2}$ ,取归一化频率  $\Omega = \omega T$ ,式(2)可表示为

$$X_{n_1, n_2}(e^{j\Omega}) = X_{0,0}(e^{j\Omega}) e^{-j\Omega c N_1 \cos\theta \sin\varphi + r/2 n_2 \sin\theta \sin\varphi} \quad (3)$$

经分析滤波器组的滤波和采样后,得到子带波束形成器的接收数据(以第  $k$  个子带为例)频域表达式

$$X_{n_1, n_2, k}(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_{n_1, n_2}(e^{j(\Omega-2\pi n)/N}) H_k(e^{j(\Omega-2\pi n)/N}) \quad (4)$$

式中:  $H_k(e^{j\Omega})$  ( $k=0,1,\dots,K-1$ ) 表示分析滤波器组的第  $k$  路滤波器的冲击响应。

经过子带波束形成器的加权求和后,得到第  $k$  个子带波束形成器的输出  $Y_k(e^{j\Omega})$  为

$$Y_k(e^{j\Omega}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} w_{n_1, n_2, k}^* X_{n_1, n_2, k}(e^{j\Omega}) \quad (5)$$

式中:  $w_{n_1, n_2, k}$  表示第  $k$  个子带波束形成器对分解后的  $(n_1, n_2)$  处阵元接收信号的权值。

$K$  个子带波束形成器的输出  $Y_k(e^{j\Omega})$  ( $k=0,1,\dots,K-1$ ) 经综合滤波器组的插值、滤波和求和后,得到整个波束形成器的输出  $Y(e^{j\Omega})$

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{K-1} Y_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) \quad (6)$$

式中:  $G_k(e^{j\Omega}) (k=0, 1, \dots, K-1)$  表示综合滤波器组的第  $k$  路滤波器的冲击响应。

通过适当的滤波器组设计, 可以使  $Y(e^{j\Omega})$  中的混叠信号分量约为零, 那么式(6)可以进一步简化为

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \omega_{n_1, n_2, k}^* X_{n_1, n_2}(e^{j\Omega}) H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) \quad (7)$$

将式(7)表示为矩阵形式

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{X}(e^{j\Omega}) \quad (8)$$

式中  $\mathbf{X}(e^{j\Omega})$  为阵元接收信号矢量的频域形式

$$\mathbf{X}(e^{j\Omega}) = [X_{0,0}(e^{j\Omega}), \dots, X_{N_1-1,0}(e^{j\Omega}), X_{0,1}(e^{j\Omega}), \dots, X_{N_1-1,1}(e^{j\Omega}), \dots, X_{N_1-1,N_2-1}(e^{j\Omega})]^T \quad (9)$$

可以将式(8)进一步简化为

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{X}_{\text{sub}_k}(e^{j\Omega}) \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{sub}_k}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{N} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) \mathbf{X}(e^{j\Omega}) = \left[ \frac{1}{N} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) X_{0,0}(e^{j\Omega}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{N} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) X_{N_1-1,0}(e^{j\Omega}), \dots, \frac{1}{N} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) X_{0,N_2-1}(e^{j\Omega}), \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{1}{N} H_k(e^{j\Omega}) G_k(e^{j\Omega}) X_{N_1-1,N_2-1}(e^{j\Omega}) \right]^T \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{w}_{\text{sub}_k}$  为第  $k$  个子带波束形成器的  $N_1 N_2$  维权矢量

$$\mathbf{w}_{\text{sub}_k} = [\omega_{0,0,k}, \dots, \omega_{N_1-1,0,k}, \omega_{0,1,k}, \dots, \omega_{N_1-1,1,k}, \dots, \omega_{N_1-1,N_2-1,k}]^T \quad (12)$$

将式(10)变换为时域形式

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{x}_{\text{sub}_k}(n) \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{x}_{\text{sub}_k}(n)$  为  $\mathbf{X}_{\text{sub}_k}(e^{j\Omega})$  对应的时域表示式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{sub}_k}(n) &= \left[ \frac{1}{N} x_{0,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N} x_{N_1-1,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{1}{N} x_{0,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N} x_{N_1-1,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n) \right]^T \end{aligned} \quad (14)$$

式中:  $\{ * \}$  表示卷积运算。

经综合滤波器组后, 各路子带的输出信号为

$$y_{\text{sub}_k}(n) = \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{x}_{\text{sub}_k}(n) \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (15)$$

那么, 式(13)可以表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} y_{\text{sub}_k}(n) \quad (16)$$

本文将采用过采样广义 DFT(GDFT)调制滤波器组<sup>[7,9]</sup>作为子带 SDL 波束形成器的子带滤波器组, 其各滤波器为

$$h_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{K}(k+k_0)(n+n_0)} p(n) \quad k=0, 1, \dots, K-1; \quad n=0, 1, \dots, l_p-1 \quad (17)$$

式中:  $k_0$  为频率偏移;  $n_0$  为时间偏移;  $p(n)$  为低通原型滤波器。通常情况下取  $k_0 = \frac{1}{2}$ ,  $n_0 = -\frac{l_p-1}{2}$ , 此时分析滤波器组具有线性相位, 并且有

$$g_k(n) = h_k(n) \quad n = 0, \dots, l_p - 1 \quad (18)$$

根据式(17)可知, GDFT 滤波器组的各滤波器相互正交, 因此, 经滤波器组滤波后的子带信号不相关, 即有

$$E[y_{\text{sub}_i}(n) y_{\text{sub}_j}^*(n)] = 0 \quad i = 0, 1, \dots, K-1; j = 0, 1, \dots, K-1; i \neq j \quad (19)$$

因此, 子带 SDL 波束形成器的输出信号  $y(n)$  的功率为

$$P = E[|y(n)|^2] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{K-1} y_{\text{sub}_k}(n)\right) \left(\sum_{k=0}^{K-1} y_{\text{sub}_k}(n)\right)^*\right] = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_k} \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{R}_{\text{rsub}_k}$  为  $\mathbf{x}_{\text{sub}_k}(n)$  的自相关矩阵。令  $P_k = \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}$ , 则式(20)可表示为

$$P = \sum_{k=0}^{K-1} P_k \quad (21)$$

根据 LCMV 准则, 要求输出信号  $y(n)$  的功率  $P$  最大, 而  $P$  最大可以等价于分别使  $P_k$  最大 ( $k=0, 1, \dots, K-1$ ), 那么, 子带 LCMV 自适应波束形成可以转化为各子带波束形成器独立的 LCMV 波束形成

$$\min_{\mathbf{w}_{\text{sub}_k}} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_k} \quad (22)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{C}_{\text{sub}}^H \mathbf{w}_{\text{sub}_k} = \mathbf{h}_{\text{sub}}$$

式中:  $\mathbf{C}_{\text{sub}}$  和  $\mathbf{h}_{\text{sub}}$  分别表示子带波束形成器的约束矩阵和响应向量(各子带相同)。通常情况下, 假定期望信号的来向为  $\theta=0^\circ$ ,  $\varphi=90^\circ$  (其他来向可以通过相位补偿等效为  $\theta=0^\circ$ ,  $\varphi=90^\circ$  的情况), 此时, 约束矩阵  $\mathbf{C}_{\text{sub}}$  和响应向量  $\mathbf{h}_{\text{sub}}$  分别取为

$$\mathbf{C}_{\text{sub}} = \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1 \times 1} \quad (23)$$

$$\mathbf{h}_{\text{sub}} = \underbrace{[0 \cdots 1 \cdots 0]^T}_{N_2} \quad (24)$$

式中:  $\mathbf{I}_{N_2}$  为  $N_2$  阶单位阵;  $\mathbf{I}_{N_1 \times 1}$  为  $N_1$  维全 1 列向量;  $\otimes$  表示 Kronecker 直积。

采用拉格朗日乘子法求解式(22), 引入拉格朗日乘子  $\boldsymbol{\lambda}$ , 构造代价函数

$$\varphi(\mathbf{w}_{\text{sub}_k}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\text{sub}_k}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_k} + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{h}_{\text{sub}} - \mathbf{C}_{\text{sub}}^H \mathbf{w}_{\text{sub}_k}) \quad (25)$$

求  $\varphi(\mathbf{w}_{\text{sub}_k})$  对  $\mathbf{w}_{\text{sub}_k}$  的导数并令其为零, 即

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{w}_{\text{sub}_k})}{\partial \mathbf{w}_{\text{sub}_k}} = \mathbf{R}_{\text{rsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_k} - \mathbf{C}_{\text{sub}} \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (26)$$

解之得

$$\mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k} = \mathbf{R}_{\text{rsub}_k}^{-1} \mathbf{C}_{\text{sub}} \boldsymbol{\lambda} \quad (27)$$

将式(27)代入  $\mathbf{C}_{\text{sub}}^H \mathbf{w}_{\text{sub}_k} = \mathbf{h}_{\text{sub}}$ , 得

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{C}_{\text{sub}}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k}^{-1} \mathbf{C}_{\text{sub}})^{-1} \mathbf{h}_{\text{sub}} \quad (28)$$

将式(28)代入式(27), 得到子带波束形成器的最优权矢量为

$$\mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k} = \mathbf{R}_{\text{rsub}_k}^{-1} \mathbf{C}_{\text{sub}} (\mathbf{C}_{\text{sub}}^H \mathbf{R}_{\text{rsub}_k}^{-1} \mathbf{C}_{\text{sub}})^{-1} \mathbf{h}_{\text{sub}} \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (29)$$

各子带的期望信号功率  $P_{\text{dsub}_k}$ , 干扰信号功率  $P_{\text{isub}_k}$  和噪声功率  $P_{\text{nsb}_k}$  分别为

$$\begin{aligned} P_{\text{dsub}_k} &= \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k}^H \mathbf{R}_{\text{dsub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k} \\ P_{\text{isub}_k} &= \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k}^H \mathbf{R}_{\text{isub}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k} \\ P_{\text{nsb}_k} &= \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k}^H \mathbf{R}_{\text{nsb}_k} \mathbf{w}_{\text{sub}_{opt}_k} \end{aligned} \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{R}_{\text{dsub}_k}$ ,  $\mathbf{R}_{\text{isub}_k}$  和  $\mathbf{R}_{\text{nsb}_k}$  分别表示期望信号分量  $\mathbf{x}_{\text{dsub}_k}$  的自相关矩阵、干扰信号分量  $\mathbf{x}_{\text{isub}_k}$  的自相关矩阵和噪声信号分量  $\mathbf{x}_{\text{nsb}_k}$  的自相关矩阵。而  $\mathbf{x}_{\text{dsub}_k}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{isub}_k}$  和  $\mathbf{x}_{\text{nsb}_k}$  分别为

$$\mathbf{x}_{\text{dsub}_k}(n) = \left[ \frac{1}{N}d_{0,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}d_{N_1-1,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{N}d_{0,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}d_{N_1-1,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n) \right]^T \quad (31)$$

$$\mathbf{x}_{\text{isub}_k}(n) = \left[ \frac{1}{N}i_{0,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}i_{N_1-1,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{N}i_{0,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}i_{N_1-1,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n) \right]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{x}_{\text{nsub}_k}(n) = \left[ \frac{1}{N}n_{0,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}n_{N_1-1,0}(n) * h_k(n) * g_k(n), \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{N}n_{0,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n), \dots, \frac{1}{N}n_{N_1-1,N_2-1}(n) * h_k(n) * g_k(n) \right]^T \quad (33)$$

类似式(20)和(21),子带 SDL 波束形成器的输出信号中的期望信号分量功率  $P_{\text{dsub}}$ , 干扰信号分量功率  $P_{\text{isub}}$  和噪声分量功率  $P_{\text{nsub}}$  分别为

$$P_{\text{dsub}} = \sum_{k=0}^{K-1} P_{\text{dsub}_k} \\ P_{\text{isub}} = \sum_{k=0}^{K-1} P_{\text{isub}_k} \\ P_{\text{nsub}} = \sum_{k=0}^{K-1} P_{\text{nsub}_k} \quad (34)$$

那么,子带 SDL 波束形成器的输出 SINR 为

$$\text{SINR}_{\text{subout}} = \frac{P_{\text{dsub}}}{P_{\text{isub}} + P_{\text{nsub}}} \quad (35)$$

### 3 全带 LCMV 的输出 SINR

作为对比,这里给出 SDL 波束形成器<sup>[2]</sup>的全带 LCMV 自适应波束形成算法及其输出 SINR。SDL 波束形成器的阵列流形与子带 SDL 波束形成器相同,如图 3 所示。

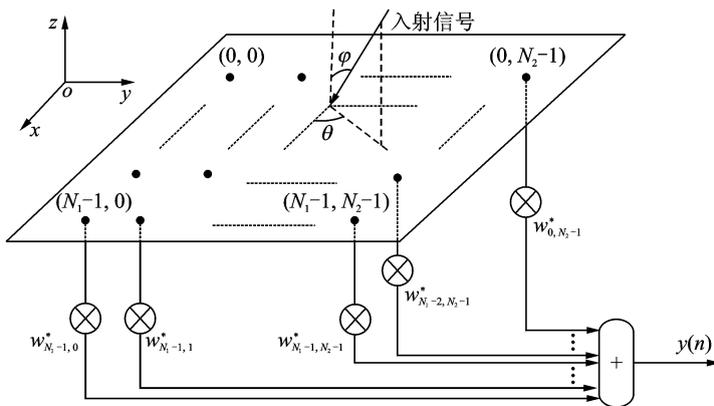


图 3 SDL 波束形成器结构示意图  
Fig. 3 Structure of SDL beamformer

SDL 波束形成器由若干阵元均匀的排列在一个平面上组成平面阵,  $x$  轴方向为  $N_1$  个阵元,  $y$  轴方向为  $N_2$  个阵元,  $x$  轴方向相邻阵元间距相等且为  $d_1$ ,  $y$  轴方向相邻阵元间距相等且为  $d_2$ 。以坐标原点  $(0,0)$  处阵元为参考阵元, 坐标  $(n_1, n_2)$  处的阵元接收信号表示为  $x_{n_1, n_2}(n)$ , 对应的权值为  $w_{n_1, n_2}$ , 其中,

$n_1=0, 1, \dots, N_1-1; n_2=0, 1, \dots, N_2-1$ 。则 SDL 波束形成器的阵元接收信号矢量  $\mathbf{x}(n)$  可表示为

$$\mathbf{x}(n) = [x_{0,0}(n), \dots, x_{N_1-1,0}(n), x_{0,1}(n), \dots, x_{N_1-1,1}(n), \dots, x_{N_1-1,N_2-1}(n)]^T \quad (36)$$

权矢量  $\mathbf{w}$  为

$$\mathbf{w} = [\omega_{0,0}, \dots, \omega_{N_1-1,0}, \omega_{0,1}, \dots, \omega_{N_1-1,1}, \dots, \omega_{N_1-1,N_2-1}]^T \quad (37)$$

对每个阵元的接收数据进行加权求和, 可得到输出信号  $y(n)$  为

$$y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) \quad (38)$$

全带 LCMV 算法的目标函数及约束表达式为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ & \text{s. t. } \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{h} \end{aligned} \quad (39)$$

式中:  $\mathbf{R}_x$  为接收信号的自相关矩阵;  $\mathbf{C}$  为约束矩阵;  $\mathbf{h}$  为响应向量, 其设计与子带 LCMV 相同。

利用拉格朗日乘子法求解式(39)得到最优权矢量  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$  为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{h} \quad (40)$$

全带 LCMV 波束形成的输出 SINR 为

$$\text{SINR}_{\text{out}} = \frac{P_d}{P_i + P_n} \quad (41)$$

式中:  $P_d$ ,  $P_i$  和  $P_n$  分别为输出信号中包含的期望信号功率, 干扰信号功率和噪声功率

$$\begin{aligned} P_d &= \mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{R}_d \mathbf{w}_{\text{opt}} \\ P_i &= \mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{R}_i \mathbf{w}_{\text{opt}} \\ P_n &= \mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (42)$$

式中:  $\mathbf{R}_d$  为期望信号的自相关矩阵;  $\mathbf{R}_i$  为干扰信号的自相关矩阵;  $\mathbf{R}_n$  为噪声的自相关矩阵。

## 4 子带 LCMV 与全带 LCMV 的计算量

当入射信号为实信号时, 全带 LCMV 波束形成的乘法计算量为  $C_{\text{full}}^{\text{real}} = 2TN_{\text{full}} = 2N_1N_2$ , 子带 LCMV 算法各子带的乘法计算量为  $C_{\text{subk}}^{\text{real}} = \frac{2}{N} \cdot \frac{TN_{\text{full}} + L_p}{N} = 2 \frac{N_1N_2 + L_p}{N^2}$ ,  $K$  个子带的总体乘法计算量为  $C_{\text{sub}}^{\text{real}} = 2K \frac{N_1N_2 + L_p}{N^2}$ 。当入射信号为复信号时, 全带 LCMV 波束形成的乘法计算量为  $C_{\text{full}}^{\text{complex}} = 4TN_{\text{full}} = 4N_1N_2$ , 子带 LCMV 算法各子带的乘法计算量为  $C_{\text{subk}}^{\text{complex}} = \frac{4}{N} \cdot \frac{TN_{\text{full}} + L_p}{N} = 4 \frac{N_1N_2 + L_p}{N^2}$ ,  $K$  个子带的总体乘法计算量为  $C_{\text{sub}}^{\text{complex}} = 4K \frac{N_1N_2 + L_p}{N^2}$ 。

假定 SDL 波束形成器和子带 SDL 波束形成器的接收天线采用  $12 \times 12$  阶的均匀方阵, 子带滤波器组采用  $K=8$  通道过采样 GDFT 滤波器, 采样参数为  $N=6$ , 原型滤波器长度为  $L_p=128$ 。此时, 当入射信号为实信号时全带 LCMV 波束形成的乘法计算量为  $C_{\text{full}}^{\text{real}}=288$ , 子带 LCMV 算法各子带的乘法计算量为  $C_{\text{subk}}^{\text{real}}=16$ ,  $K$  个子带的总体乘法计算量为  $C_{\text{sub}}^{\text{real}}=121$ 。当入射信号为复信号时, 全带 LCMV 波束形成的乘法计算量为  $C_{\text{full}}^{\text{complex}}=576$ , 子带 LCMV 算法各子带的乘法计算量为  $C_{\text{subk}}^{\text{real}}=31$ ,  $K$  个子带的总体乘法计算量为  $C_{\text{sub}}^{\text{real}}=242$ 。由此可知, 子带 LCMV 各子带的计算远小于全带 LCMV, 且子带 LCMV 的总体乘法计算量也明显小于全带 LCMV。另外, 由于各个子带波束形成器独立并行的运算, 子带 LCMV 将大大提高波束形成效率。

## 5 仿真实验

根据文献[3]给出的 SDL 波束形成器的 LCMV 波束形成算法(即全带 LCMV 算法)和性能分析方法, 以及本文的子带 SDL 波束形成器的 LCMV 算法(子带 LCMV 算法)的性能分析方法, 下面通过仿真实验进行对比以验证子带 LCMV 算法的各项性能。

### 5.1 全带 LCMV 和子带 LCMV 阵列响应性能(实验 1)

假定 SDL 波束形成器和子带 SDL 波束形成器的接收天线采用  $12 \times 12$  阶的均匀方阵, 并取  $r=2$ , 即相邻阵元间距相等, 均为半波长, 不考虑通道不一致, 阵元间互耦等阵元误差。期望信号和干扰信号的带宽为 1 400 MHz, 最低频率为 1 600 MHz, 最高频率为 3 000 MHz, 且均为远场信号, 期望信号来向为  $(0^\circ, 90^\circ)$ , 两个干扰信号来向分别为  $(-45^\circ, 90^\circ)$  和  $(30^\circ, 90^\circ)$ , 且信干比均为  $SIR = -20$  dB。阵元接收信号时会混入相互独立的高斯白噪声, 且信噪比为  $SNR = -10$  dB, 快拍数为 1 024 次。并假设期望信号、干扰信号和噪声互不相关。子带滤波器组采用  $K=8$  通道过采样 GDFT 滤波器, 采样参数为  $N=6$ , 原型滤波器长度为  $l_p=128$ 。

在此实验条件下,  $TN_{sub}=45.3$ , 这里选取子带 SDL 波束形成器接收天线为  $7 \times 7$  阶的均匀方阵与 SDL 波束形成器进行对比, 以验证子带 SDL 波束形成器可以在大大降低阵元需求的同时, 达到与 SDL 波束形成器相似的性能。

在  $12 \times 12$  阶均匀方阵条件下, 分别得到全带 LCMV 和子带 LCMV 的阵列响应, 如图 4 和图 5 所示, 其中二维图为三维图按不同频率在幅度和方位角构成的平面上的投影。通过对比可以看出, 全带 LCMV 阵列响应的频率不变性较差, 而子带 LCMV 阵列响应的频率不变性有明显提高, 由于子带 LCMV 阵列响应的主瓣频率不变性得到了较大的提高, 其主瓣宽度也要明显小于全带 LCMV 阵列响应的主瓣宽度, 子带 LCMV 的主瓣分辨率得到了较大的提高。

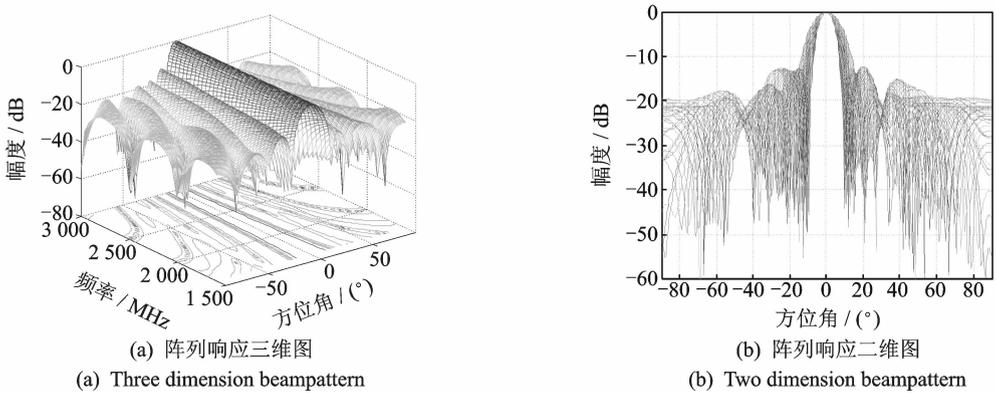


图 4 全带 LCMV 阵列响应图

Fig. 4 Beam pattern of LCMV

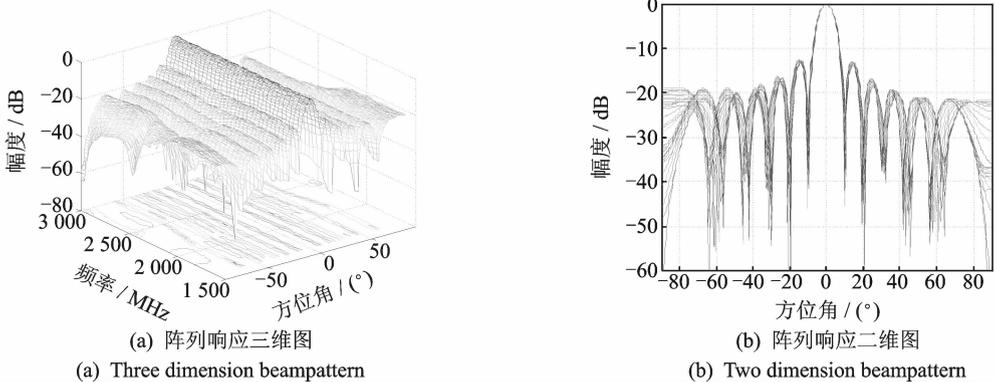


图 5 子带  $12 \times 12$  方阵 LCMV 阵列响应图

Fig. 5 Beam pattern of LCMV with  $12 \times 12$  array in subbands

在  $7 \times 7$  阶均匀方阵条件下,子带 LCMV 的阵列响应图如图 6 所示。比较图 4 和图 6 可以看出,子带 LCMV 阵列响应的频率不变性仍然要明显优于  $12 \times 12$  阶均匀方阵条件下的全带 LCMV 阵列响应,但是,由于子带 SDL 波束形成器的阵元数量大量的减少,天线孔径减小,使得阵列响应的波束宽度增大,子带 LCMV 阵列响应的主瓣宽度有所增加,其主瓣宽度大小与全带 LCMV 的阵列响应主瓣宽度相似。

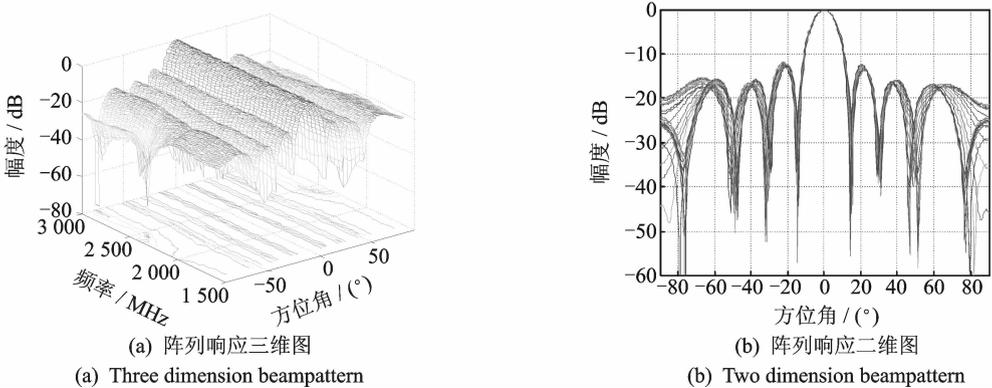


图 6 子带  $7 \times 7$  方阵 LCMV 阵列响应图

Fig. 6 Beam pattern of LCMV with  $7 \times 7$  array in subbands

## 5.2 阵元数量对输出 SINR 的影响(实验 2)

根据式(35,41)分别给出的子带 LCMV 和全带 LCMV 的输出 SINR 表达式,对不同阵元数量条件下的全带 LCMV 和子带 LCMV 的输出 SINR 进行对比分析。假定 SDL 波束形成器和子带 SDL 波束形成器的接收天线均为方阵,即  $N_1 = N_2, N_1 \in [2, 20]$ ,且  $N_1$  为整数,其他实验条件同实验 1。进行 100 次蒙特卡洛实验并取平均,得到如图 7 所示的不同阵元数量条件下全带 LCMV 和子带 LCMV 输出 SINR 的性能对比图。从图 7 可以看出,全带 LCMV 和子带 LCMV 的输出 SINR 均随着阵元数量的增加而增大,但子带 LCMV 的输出 SINR 性能要明显优于全带 LCMV。在相同阵元数量条件下,子带 LCMV 输出 SINR 高于全带 LCMV 输出 SINR 约 7 dB;在达到相同输出 SINR 条件下,子带 LCMV 可以大大的减少阵元需求。通过本实验的对比分析,验证了子带 LCMV 可以大幅提高输出 SINR,并可在达到相似性能时大量减少阵元需求。

## 5.3 输入 SNR 对输出 SINR 的影响(实验 3)

通过实验 2 的对比分析可知,相比全带 LCMV,子带 LCMV 可大幅提高输出 SINR 性能,由此可体现出子带 SDL 波束形成器具有更强的干扰和噪声抑制能力,本实验将进一步探讨输入 SNR 对输出 SINR 的影响。设定输入信号 SNR 的变化范围为  $-20$  dB 到  $20$  dB,其他实验条件同实验 1,进行 100 次蒙特卡洛实验并取平均,得到如图 8 所示的  $12 \times 12$  均匀方阵条件下的全带 LCMV 和子带 LCMV,以及  $7 \times 7$  均匀方阵条件下的子带 LCMV 的输出 SINR 随输入信号 SNR 变化的性能对比图。

从图 8 可以看出,两种阵型条件下的子带 LCMV 的输出 SINR 均优于全带 LCMV,在相同输入 SNR 条件下,子带  $12 \times 12$  均匀方阵的输出 SINR 高于全带  $12 \times 12$  均匀方阵约 7 dB,而子带  $7 \times 7$  均匀方阵的输出 SINR 高于全带  $12 \times 12$  均匀方阵约 5 dB,由此也可进一步说明子带 LCMV 算法具有更强的干扰和噪声抑制能力。

## 5.4 阵元间距对输出 SINR 的影响(实验 4)

对 LCMV 波束形成器,天线孔径对波束形成器性能的影响较大,阵元数量和阵元间距则是影响天

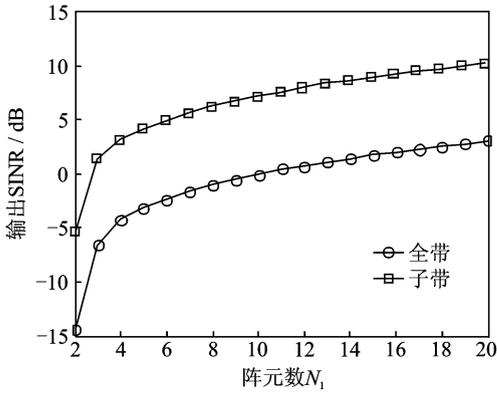


图 7 不同阵元数条件下全带 LCMV 和子带 LCMV 输出 SINR 性能

Fig. 7 Output SINR performance of fullband LCMV and subband LCMV with different elements

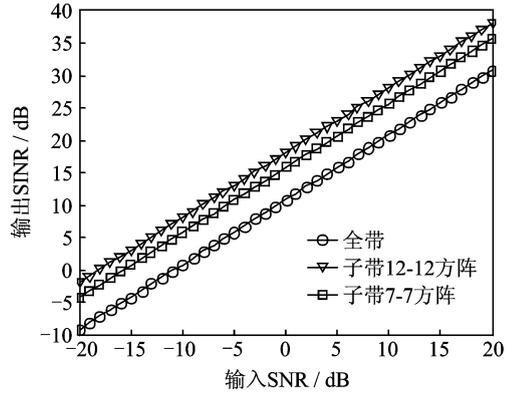


图 8 不同输入 SNR 条件下全带 LCMV 和子带 LCMV 输出 SINR 性能

Fig. 8 Output SINR performance of fullband LCMV and subband LCMV with different input SNR

线孔径的两个主要方面,实验 2 已经讨论了阵元数量对输出 SINR 的影响,再进一步分析阵元间距对输出 SINR 的影响。设定  $r$  的变化范围为  $r \in [0, 1, 8]$ ,其他实验条件同实验 1。进行 100 次蒙特卡洛实验并取平均,得到如图 9 所示的  $12 \times 12$  均匀方阵条件下的全带 LCMV 和子带 LCMV 以及  $7 \times 7$  均匀方阵条件下的子带 LCMV 的输出 SINR 随  $r$  变化的性能对比图。从图 9 可以看出,3 种情况下的输出 SINR 均随着阵元间距的增大而先增大,再保持不变,最后随之减小。当阵元间距增大时,天线的孔径增大,因此输出 SINR 会随之增大,且增大到一定程度后不再增加。当阵元间距过大后,将会出现方位模糊,阵列响应也会出现栅瓣,输出 SINR 会随之降低。另外,从图中可以看出,子带 LCMV 的整体输出 SINR 性能要明显优于全带 LCMV,这也进一步验证了子带方法可以大幅度地提高性能,降低阵元需求。

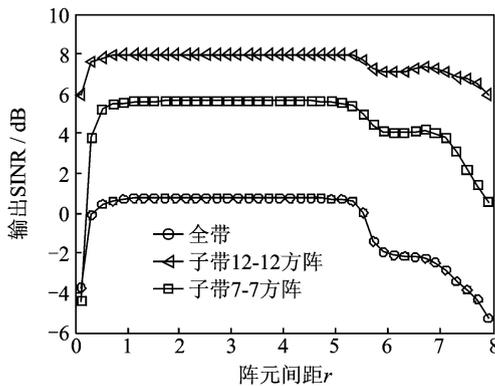


图 9 不同阵元间距下的全带 LCMV 和子带 LCMV 输出 SINR 性能

Fig. 9 Output SINR performance of fullband LCMV and subband LCMV with different element spacing

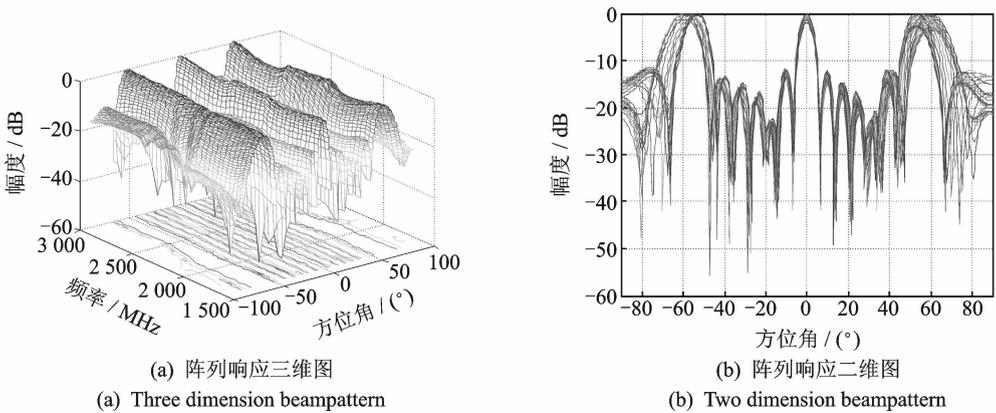
### 5.5 阵元间距对子带 LCMV 阵列响应性能的影响(实验 5)

根据实验 4 的分析可知,适当的增加阵元间距可以提高子带 LCMV 算法的性能,下面将进一步分析  $7 \times 7$  阶均匀方阵的子带 LCMV 阵列响应性能。仿真条件同实验 1,子带 SDL 波束形成器的接收天线采用  $7 \times 7$  阶均匀方阵,通过改变  $r$  的值,列出如表 1 所示的  $7 \times 7$  阶均匀方阵条件下,不同阵元间距时子带 LCMV 波束形成的阵列响应主瓣宽度。

表 1 子带  $7 \times 7$  方阵在不同阵元间距下阵列响应的主瓣宽度Table 1 Width of mainlobe of beam pattern with  $7 \times 7$  array in subbands with different element spacing

$r$ 值	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
主瓣宽度/(°)	$[-60^\circ, 60^\circ]$	$[-36.5^\circ, 32^\circ]$	$[-23^\circ, 24^\circ]$	$[-16.5^\circ, 16.5^\circ]$	$[-13.5^\circ, 13.5^\circ]$
$r$ 值	3	3.5	4	4.5	5
主瓣宽度/(°)	$[-11.5^\circ, 11.5^\circ]$	$[-9.5^\circ, 9.5^\circ]$	$[-9^\circ, 9^\circ]$	$[-7.5^\circ, 7.5^\circ]$	$[-6^\circ, 6^\circ]$

从表 1 可以看出,阵元间距增大时,阵列响应的主瓣宽度随之减小,主瓣分辨率随之提高,有利于对期望信号的接收和对干扰信号的抑制。但是,正如实验 4 所得出的结论,当阵元间距过大时,输出 SINR 性能反而会下降。图 10 给出了  $r=5$  时的阵列响应,此时出现明显的栅瓣现象,从图 9 也可看出,当  $r=5$  时,  $7 \times 7$  阶均匀方阵的子带 LCMV 输出 SINR 开始出现了明显的减低。

图 10 子带  $7 \times 7$  方阵 LCMV 自适应波束形成阵列响应的栅瓣现象Fig. 10 Grating lobe of LCMV with  $7 \times 7$  array in subbands

## 5.6 子带滤波器组通道数和采样参数对输出 SINR 的影响(实验 6)

对于子带 SDL 波束形成器,不同的子带滤波器组参数会对输出 SINR 产生影响,本实验将通过设定不同的子带通道数和采样参数来分析不同参数下子带 LCMV 波束形成的输出 SINR 性能。子带滤波器组的通道数  $K$  和采样参数  $N$  分别取为  $K=4, 6, 8, 10, 12, N=3, 4, 6, 8, 10$ , 且满足  $N < K$ , 子带 SDL 波束形成器的接收天线为  $12 \times 12$  的均匀方阵,其他实验条件同实验 1。进行 100 次蒙特卡洛实验并取平均,得到如表 2 所列出的不同通道数和采样参数的子带 LCMV 输出 SINR。

从表 2 可以看出在通道数  $K$  相同的条件下,采样参数  $N$  越大,输出 SINR 也越大;而在采样参数  $N$  相同的条件下,通道数  $K$  的增加对输出 SINR 影响不大。综合衡量  $K$  与  $N$  对输出 SINR 的影响,表中对角线上的输出 SINR 所对应的  $K$  与  $N$  的参数组合为相对较好的参数组合,有利于最大限度的发挥子带滤波器组的性能优势,同时,通过对比表中对角线上的输出 SINR 可以发现,  $K$  与  $N$  越大,输出 SINR 也越大。因此,若要增大子带 LCMV 的输出 SINR,可以同时增大通道数  $K$  和采样参数  $N$ ,并使之满足适当的组合,但是,如果通道数过大,势必会增加子带滤波器组的滤波器个数,从而增加系统的负担。

## 6 结束语

本文分析了基于子带 SDL 波束形成器的 LCMV 宽带自适应波束形成算法的性能,并与全带 LCMV 算法进行了对比。推导了子带 LCMV 算法的输出 SINR 表达式,通过仿真实验对比了子带 LCMV 算法和全带 LCMV 算法的阵列响应性能和输出 SINR 性能,子带 LCMV 的阵列响应具有更好的频率不

表 2 子带滤波器组不同通道数和采样参数下的输出 SINR

Table 2 Output SINR of subband filter banks with different channels and different sampling parameters

采样参数 $N$	通道数 $K$				
	4	6	8	10	12
3	4.84	4.80	4.60	4.78	4.80
4		6.03	6.06	6.09	6.00
6			8.01	7.53	7.63
8				8.72	8.77
10					9.62

变性和更高的主瓣分辨率,通过分析阵元数量、输入 SNR 和阵元间距对输出 SINR 的影响,验证了子带 LCMV 具有更好的输出 SINR 性能,并且子带 SDL 波束形成器在大量减低阵元需求的同时,子带 LCMV 仍可达到与全带 LCMV 相似的性能,或是优于全带 LCMV 的性能。另外,分析了阵元间距和子带滤波器组参数对子带 LCMV 算法性能的影响,当阵元间距过大时,会出现栅瓣现象,而选择适当的子带滤波器组参数可以最大限度地发挥子带 SDL 波束形成器的优势。

### 参考文献:

- [1] Frost O L III. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing [J]. Proceedings of the IEEE, 1972, 60(8): 926-935.
- [2] Liu W. Adaptive wideband beamforming with sensor delay-lines [J]. Signal Processing, 2009, 89(5): 876-882.
- [3] Lin N, Liu W, Langley R J. Performance analysis of an adaptive broadband beamformer based on a two-element linear array with sensor delay-line processing [J]. Signal Processing, 2010, 90(1): 269-281.
- [4] Duan H, Ng B P, See C M, et al. Applications of the SRV constraint in broadband pattern synthesis [J]. Signal Processing, 2008, 88(4): 1035-1045.
- [5] Zhao Y, Liu W, Langley R J. Efficient design of frequency invariant beamformers with sensor delay-lines [C]//Proceedings of the IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Signal Processing. Darmstadt: IEEE, 2008: 335-339.
- [6] Huang L Y, Shen B, Li M X, et al. An efficient subband method for wideband adaptive beamforming [C]//10th Interference on Advanced Communication Technology, ICACT. Gangwon-Do: IEEE, 2008: 1489-1492.
- [7] Liu W, Weiss S. Off-broadside main beam design and subband implementation for a class of frequency invariant beamformers [J]. Signal Processing, 2009, 89(5):913-920.
- [8] 陈晖, 刘成城, 李冬海, 等. 基于子带 SDL 的宽带自适应波束形成[J]. 信号处理, 2012, 28(12): 1685-1691. Chen Hui, Liu Chengcheng, Li Donghai, et al. Wideband adaptive beamforming with sensor delay lines in subbands [J]. Signal Processing, 2012, 28(12): 1685-1691.
- [9] Peng Bo, Liu Wei, Mandic Danilo P. Novel design of oversampled GDFT filter banks for application to subband based blind source separation [C]//IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP). Nice: IEEE, 2011: 637-640.
- [10] Chen H W, Ser W. Design of robust nearfield wideband beamformers with optimum subband constraints [J]. Signal Processing, 2012, 92(1): 189-197.
- [11] Peng B, Liu W, Mandic D P. Reducing permutation error in subband-based convolutive blind separation [J]. IET Signal Processing, 2012, 6(1): 34-44.
- [12] Fox C, Vitte G, Charbit M, et al. A subband hybrid beamforming for in-car speech enhancement [C]//Proceeding of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). Bucharest: IEEE, 2012: 11-15.
- [13] Weiss S. On adaptive filtering in oversampled subbands [D]. Shaker Verlag, Aachen, Germany: University of Strathdyde, 1998.

### 作者简介:

赵拥军(1963-),男,教授,博士生导师,研究方向:阵列信号处理,雷达信号与信息处理, E-mail: zhaoyjzz@126.com。



陈晖(1986-),男,通信作者,博士生,研究方向:阵列信号处理,智能信息处理, E-mail: chamiso@126.com。

