

图像阈值分割方法研究进展 20 年(1994—2014)

吴一全^{1,2,3,4,5} 孟天亮¹ 吴诗姍¹

(1. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京, 210016; 2. 华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室, 武汉, 430074; 3. 南京理工大学江苏省社会安全图像与视频理解重点实验室, 南京, 210094; 4. 南京水利科学研究院港口航道泥沙工程交通部重点实验室, 南京, 210029; 5. 长江科学院武汉市智慧流域工程技术研究中心, 武汉, 430010)

摘要: 阈值分割是图像分割领域中使用最为普遍的一类简单而有效的方法, 多年来受到许多学者的广泛关注, 发表了大量的研究成果。作者曾于 20 年前对 1962—1992 年阈值分割的研究状况做了一个阶段性的回顾与总结。时至今日, 阈值分割方法已经获得了巨大的发展, 新思路、新方法层出不穷。本文旨在对近 20 年来阈值分割领域常用的一些方法再次进行概括和分类, 其中包括近年来新提出的阈值分割方法, 也包括对经典方法的改进。文中给出了这些方法的基本思想和公式, 阐明了各种方法的特点及其适用范围, 以期为今后阈值分割的相关研究提供一些思路和启迪。

关键词: 图像处理; 阈值分割; 图像直方图; 准则函数; 空间特征; 熵; 优化算法

中图分类号: TN911.73; TP391.41 **文献标志码:** A

Research Progress of Image Thresholding Methods in Recent 20 Years (1994—2014)

Wu Yiquan^{1,2,3,4,5}, Meng Tianliang¹, Wu Shihua¹

(1. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, China; 2. State Key Lab of Digital Manufacturing Equipment & Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, China; 3. Jiangsu Key Laboratory of Image and Video Understanding for Social Safety, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China; 4. Key Laboratory of Port, Waterway and Sedimentation Engineering of Ministry of Transport, Nanjing, 210029, China; 5. Engineering Technology Research Center of Wuhan Intelligent Basin, Changjiang River Scientific Research Institute, Wuhan, 430010, China)

Abstract: Thresholding is one of the most widely used image segmentation methods because of its concision and effectivity. Many researchers have followed this technology with great interest and a lot of research findings have been published. Twenty years ago, the first author made a stage review on research progress of thresholding within 1962—1992. But at the present time, thresholding technology has made a big advance and new ideas have been proposed constantly. This paper aims at summarizing and classifying the commonly used thresholding methods in recent twenty years including brand new methods and improvements of the classical methods. Basic thoughts or criteria are given and characteristics and applicable conditions of these methods are clarified. It is hoped that this summarization can provide some thoughts and inspirations to the thresholding researches in future.

Key words: image processing; thresholding; image histogram; criterion function; spatial characteristics; entropy; optimization algorithm

基金项目: 数字制造装备与技术国家重点实验室开放基金(DMETKF2014010)资助项目; 江苏省社会安全图像与视频理解重点实验室(南京理工大学)开放基金(JSKL201302)资助项目; 港口航道泥沙工程交通部重点实验室开放研究基金资助项目; 长江科学院开放研究基金(CKWV2013225/ KY)资助项目; 江苏高校优势学科建设工程资助项目。

收稿日期: 2014-12-10; **修订日期:** 2015-01-10

引言

图像分割是图像处理与分析领域中的一个经典问题,也是该领域的难点之一^[1]。图像分割本质上是一个分类问题,通过将图像中的像素点划分为具有实际意义的两个或多个类别区域,从而提取出图像中的一个或多个目标。阈值分割是图像分割中一类最早被研究和使用的方方法,其具有物理意义明确、效果明显、易于实现、实时性良好的特点^[2],是目前各类图像分析、图像识别以及机器视觉系统中最常用的图像分割方法之一,已广泛应用于工业图像缺陷提取、红外目标检测、SAR 图像目标识别、文档图像分割、指纹识别、火灾检测等诸多实际应用领域。图像分割阈值的选取可以通过人工的方法来确定,然而人工选取阈值效率低下,要得到准确的阈值需要进行大量试验。随着现代图像处理技术的发展,更加自动化、智能化地对图像进行快速处理成为可能,也逐渐成为产业发展的重要需求。如何快速自动地选取最佳阈值以准确地分割图像,是众多研究人员一直努力探索的问题^[3,4]。作者于早年曾对阈值分割的研究概况进行了阶段性的回顾与总结^[5,6],现结合近 20 多年来的研究经验,再次对阈值分割的发展历程做一个较为系统的概括,以期对致力于阈值分割研究及其应用的学者们提供一些启发和思路。阈值分割方法的核心是阈值选取的准则函数,其描述了该方法依据哪一种知识作为阈值选取的标准,包括信息量、灰度均匀性、分割误差、相关性等。基于这些准则的改进方法则是对准则函数的作用环境、作用方式以及涉及的参数进行调整,使其更加适应具体的应用背景。由于图像种类繁多,其具备的特点也各不相同,并没有一种万能的阈值分割方法能够对所有的图像都取得很好的分割效果。因此,对各种不同的阈值分割方法进行研究和分析,了解它们的分割特性,以便针对特定的图像选择合适的阈值分割方法,是十分必要的。

现有的阈值分割方法种类繁多,其分类方式也有很多种。例如,根据所选阈值的作用范围可以分为:全局阈值法和局部阈值法^[7-11];依据阈值选取准则函数类型可以分为:最大熵法^[12-15]、类间方差(Otsu)法^[16-20]、交叉熵法^[21-24]、最小误差法^[25-28]、模糊熵法等;按照阈值的个数可以分为:单阈值法和多阈值法。对于利用直方图划分方式选取阈值的一些方法,如最大熵法、Otsu 方法等,又可按照直方图维数细分为一维直方图法、二维直方图法^[29-32]甚至三维直方图法^[33,34]。而对于利用熵的最值来决定阈值的方法,如最大熵法、交叉熵法等,又可以依据熵的种类分为 Shannon 熵法、Tsallis 熵法^[35-38]、指数熵法^[39-41]、倒数熵法^[42,43]、Arimoto 熵法^[44,45]等。此外,在求解阈值选取准则函数最优值时常常用到一些优化算法,如:遗传算法^[46-50]、模拟退火算法^[51-53]、粒子群算法^[54-58]、蜂群算法^[59-62]等。本文将围绕阈值选取的准则函数展开,在给出基本阈值选取公式的同时,对一些主要的改进方法进行分析和比较,总结出各种方法的一些特点和适用环境。本文重点阐述的阈值分割方法主要是近 20 年(1994—2014 年)提出且行之有效的方方法,也有早年提出但近些年仍被广泛研究、改进和使用的方法。

1 阈值分割的基本原理

设一幅灰度图像的大小为 $M \times N$,灰度级数为 L , $f(x,y)$ 表示坐标为 (x,y) 的像素灰度级,其中 $x \in [1, M], y \in [1, N]$ 。单阈值分割的目的即为确定一个阈值 t ,并对所有像素的灰度级进行如下映射

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq f(x,y) \leq t \\ L-1 & t < f(x,y) \leq L-1 \end{cases} \quad (1)$$

分割后的图像仅有灰度级为 0 和 $L-1$ 两类像素,也称“二值化”。这种分割方法适合于待分割的目标和背景像素分布在明显不同的两个灰度级范围的情况。例如,文档图像中文字目标和纸张背景的像素明显地分为两个不同的类别,采用单阈值法可以很好地划分目标和背景。此外,适合单阈值分割的实际应用领域还有:储粮害虫检测、遥感水域提取、海面溢油监测、指纹识别以及各类工业缺陷检测,如焊接缺陷、纸张缺陷、工业 CT 缺陷、液晶屏缺陷、铁轨轮对缺陷、织物疵点等。

对于多阈值分割,假设阈值个数为 n ,则灰度级映射为

$$f(x,y) = \begin{cases} l_0 & 0 \leq f(x,y) \leq t_1 \\ l_1 & t_1 < f(x,y) \leq t_2 \\ \vdots & \vdots \\ l_{n-1} & t_{n-1} < f(x,y) \leq t_n \\ l_n & t_n < f(x,y) \leq L-1 \end{cases} \quad (2)$$

式中 l_0, l_1, \dots, l_n 为分割后图像的 $n+1$ 个灰度级。多阈值分割方法适用于需要提取的目标有多个且这些目标分布在不同灰度级区间的情况。比如,一些医学图像常常由黑色背景、白质区域和灰质区域构成,采用多阈值分割可以对图像中的各个成分进行准确的区分,便于提取特定目标,如病变区域等。不难看出,阈值分割的核心工作是最佳分割阈值的选取。

2 基于直方图区域划分的阈值选取方法

早年的一些基于直方图形状的阈值选取方法由于其本身的局限性,渐渐淡出了人们的视野。例如, P-tile 法^[63]对图像灰度分布的先验知识要求过高,最频法^[64]、直方图凹面分析法^[65]等直方图变换法过于依赖直方图的双峰分布特性等。这些方法在实际工程应用中仍有一定的参考价值,为克服其局限性,人们不断探求更为有效的阈值选取方法。近 20 年来,基于直方图区域划分的阈值选取准则成为阈值分割的研究热点,其中涌现出一些新方法,同时也包括一些针对经典准则的改进方法。

2.1 直方图区域划分与统计信息计算

2.1.1 直方图及其区域划分

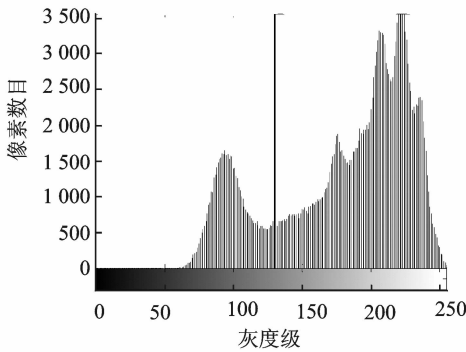
图像阈值分割中的阈值通常是指灰度级阈值,而图像的灰度级直方图很好地反映了一幅图像中的灰度分布信息,是阈值选取的重要参考依据。现有的阈值选取方法大多利用了灰度级直方图信息。因此,在介绍阈值选取准则之前,先对直方图的种类和直方图区域的划分作一些分析和总结。

最早使用的直方图即一维灰度级直方图,它仅反映图像的灰度分布信息,而不包含任何的空间信息。1989 年,Abutaleb^[13]首次提出了二维直方图的概念,在一维直方图的基础上增加了邻域平均灰度级信息,不仅考虑了图像的灰度分布,而且在一定程度上兼顾了像素的空间关系,能够增强阈值选取过程对图像噪声干扰的抵抗能力,成为目前图像阈值选取方法中最有效的工具之一。

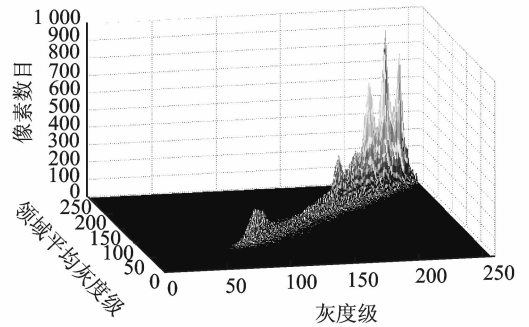
图 1(b)和图 1(c)分别给出了图 1(a)所示 Lena 图像的一维灰度级直方图和二维直方图。一维阈值的选取即为在一维区间 $[0, L-1]$ 上,根据某种准则找出划分该区间的最佳阈值,该阈值两侧的区域分别代表目标和背景。对于二维直方图区域(二维直方图的俯视图)的划分有两种常见的方式:直分法和斜分法^[66,67]。如图 2(a)所示,图中横轴 f 代表灰度级,纵轴 g 代表邻域平均灰度级(通常选 3×3 邻域),“O”和“B”分别表示目标和背景。二维直方图区域直分方法中, t 和 s 分别表示灰度级阈值和邻域平均灰度级阈值, $f=t$ 和 $g=s$ 两条分别平行于纵轴和横轴的直线将整个二维直方图区域划分为 4 个部分。左下角区域所代表像素的灰度级和邻域平均灰度级都较小,可以认为是目标的内部像素点(假定目标较暗),右上角区域所代表像素的灰度级和邻域平均灰度级都较大,被认为是背景的内部像素点。而远离对角线的左上角和右下角两个区域所代表的像素灰度级与邻域平均灰度级相差较大,可能处于目标和背景的边缘位置,也可能是噪声点。由于图像中边缘点和噪声点的数量远远小于目标和背景内部点的数量,在传统二维直方图区域直分法中常常假定左上角和右下角两个区域中像素点个数等于 0,以简化阈值选取过程。二维直方图区域直分阈值选取方法就是根据某种准则,确定两个阈值 t 和 s ,使得划分后的左下角和右上角区域成为目标和背景的最优表示。



(a) Lena 图像
(a) Lena image



(b) 一维直方图
(b) One-dimensional histogram



(c) 二维直方图
(c) Two-dimensional histogram

图1 Lena 图像(512×512)及其直方图

Fig. 1 Lena image (512×512) and its histograms

另一种二维直方图划分方式为斜分法,如图 2(b)所示。该方法认为目标像素和背景像素应该分布在直方图区域的对角线附近(图 2(b)中的虚线(1)和虚线(3)之间的部分),而直分法显然没有遵循这一原则,存在将目标点和背景点当作边缘点和噪声点以及相反的情况。该划分方式以垂直于对角线(图 2(b)中的虚线(2))的直线进行区域划分,对目标和背景像素的划分更为准确,但忽略了图像中边缘点和噪声点的影响。在图 2(b)中,斜分法表示为二维直方图区域被一条斜率为 -1 的直线划分为两部分,左下方和右上方分别代表目标和背景。可见,斜分法只需确定一个阈值,即分割直线的截距 T ,因而与直分法相比阈值求取的工作量较小。但由于斜分法所划分的区域不规则,在实际计算过程中仍稍显麻烦。考虑到斜分法只需在垂直对角线方向上选取一个阈值,可将二维直方图区域向对角线方向做投影,由此得到直线截距直方图^[68]。在忽略了一定二维信息的条件下,将二维直方图转化为一维直方图,简化了斜分法的阈值计算过程。

θ -划分法^[69,70]是对直方图区域直分和斜分的推广,分割直线的斜率不再采用固定值 -1 ,而是可以在 $(-\infty, 0]$ 上进行调整。当斜率趋向于 $-\infty$ 时,该方法退化为基于一维灰度级直方图的阈值选取;而当斜率等于 0 时,则退化为基于一维邻域平均灰度级直方图的阈值选取。文献[71]进一步推广了 θ -划分法,将 θ -划分法中的一条分割线增加到两条,使得该算法在分割直方图区域时更为灵活,但同时也造成了计算复杂度的提高。

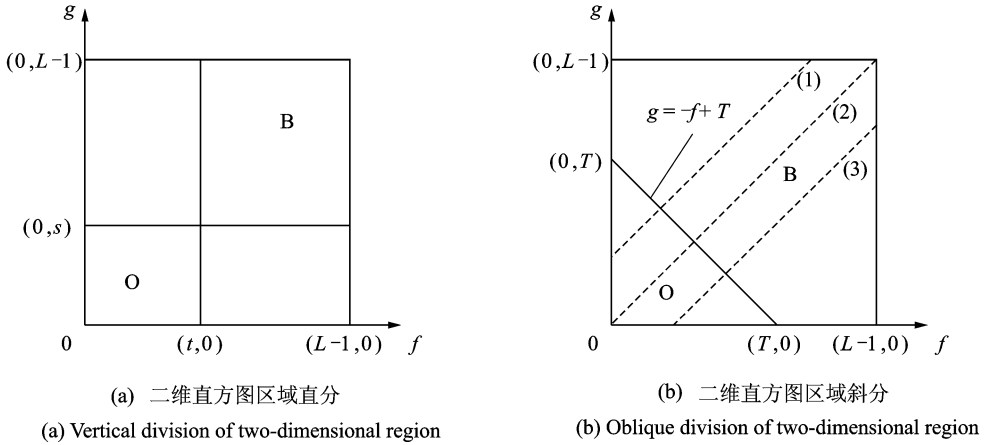


图 2 二维直方图区域直分及斜分

Fig. 2 Vertical division and oblique division of two-dimensional region

除了灰度级-邻域平均灰度级二维直方图之外,人们还提出了一些二维直方图的构建方式,这些不同的构建方式实际上是以不同的形式利用了空间信息。灰度级是最基本的信息,在多数二维直方图中均作为第一维,而第二维在不同的二维直方图中有不同的定义。灰度级-灰度级梯度二维直方图^[72]将传统二维直方图中的第二维——邻域平均灰度级替换为灰度级梯度,即灰度级和邻域平均灰度级的绝对差值,使得直方图目标区域和背景区域的划分可以通过类似传统二维直方图直分的方式进行,方便了后续的计算。灰度级-X 邻域平均灰度级直方图^[29]将传统二维直方图的第二维由 3×3 邻域平均,改为挖去 3×3 模板中心像素的上、下、左、右四个位置上的像素,形成一个“X”状的模板求取平均,增大了中心像素灰度级与邻域平均灰度级的差异。二维方向(2D-direction, 2D-D)直方图^[31]用梯度方向作为第二维,以更好地描述局部边缘特性,但对图像中目标、背景、边缘、噪声等各种成分的区分度不高。灰度级空间相关(Gray-level spatial correlation, GLSC)直方图^[30]将邻域中与中心像素灰度级相近的像素个数作为第二维,大大压缩了第二维的空间维数,提升了算法的运行速度。灰度级梯度量化(Gray-level and gradient-magnitude, GLGM)直方图^[32]计算图像的局部 Sobel 梯度,并利用斐波那契数列将其量化成 9 个量级(1~9),以此作为直方图的第二维,能够较好地对图像中的各种成分进行区分,同时与 GLSC 直方图区域面积相同,仅有 256×9 ,与传统直方图的区域面积 256×256 相比,搜索空间大大缩小。2D-D, GLSC, GLGM 3 种直方图虽然描述了二维分布信息,但仅计算一个阈值,其处理速度会更快,而同时计算阈值时也会受到噪声点的影响。

2.1.2 直方图统计信息计算

对直方图区域进行划分后,可以得到相应的直方图统计信息(目标/背景的先验概率、均值等),由此可以进一步求解不同的阈值选取准则函数。此处仅给出最常用的一维直方图 and 传统二维直方图的统计信息计算公式,其他类型直方图的统计信息不作详细介绍,具体可参考相应的文献。

记灰度级直方图中灰度级 i 的频数为 h_i , 则相应的频率为

$$p_i = h_i / (M \cdot N), p_i \geq 0, \sum_{i=0}^{L-1} p_i = 1 \quad (3)$$

假设阈值 t 将灰度级空间 $[0, L-1]$ 划分为目标类 $[0, t]$ 和背景类 $[t+1, L-1]$, 则目标类和背景类像素出现的概率分别为

$$\omega_o(t) = \sum_{i=0}^t p_i \quad (4)$$

$$\omega_b(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} p_i = 1 - \omega_o(t) \quad (5)$$

整幅图像的灰度级均值为

$$\mu_T = \sum_{i=0}^{L-1} i p_i \quad (6)$$

两类的像素灰度级均值分别为

$$\mu_o(t) = \frac{\sum_{i=0}^t i p_i}{\sum_{i=0}^t p_i} = \frac{\sum_{i=0}^t i p_i}{\omega_o(t)} \quad (7)$$

$$\mu_b(t) = \frac{\sum_{i=t+1}^{L-1} i p_i}{\sum_{i=t+1}^{L-1} p_i} = \frac{\sum_{i=t+1}^{L-1} i p_i}{\omega_b(t)} = \frac{\mu_T - \mu_o(t)\omega_o(t)}{\omega_b(t)} \quad (8)$$

在传统二维直方图的情况下,记灰度级为 i 、邻域平均灰度级为 j 的像素数目为 h_{ij} ,则相应的像素出现概率为

$$p_{ij} = h_{ij} / (M \cdot N), p_{ij} \geq 0, \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} p_{ij} = 1 \quad (9)$$

目标类和背景类像素出现的概率分别为

$$\omega_o(t, s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s p_{ij} \quad (10)$$

$$\omega_b(t, s) = \sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} p_{ij} \quad (11)$$

目标类和背景类像素的灰度级均值分别为

$$\boldsymbol{\mu}_o(t, s) = (\mu_{oi}(t, s), \mu_{oj}(t, s))^T = \left(\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s i p_{ij} / \omega_o(t, s), \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s j p_{ij} / \omega_o(t, s) \right)^T \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\mu}_b(t, s) = (\mu_{bi}(t, s), \mu_{bj}(t, s))^T = \left(\sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} i p_{ij} / \omega_b(t, s), \sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} j p_{ij} / \omega_b(t, s) \right)^T \quad (13)$$

整幅图像的灰度级均值为

$$\boldsymbol{\mu}_T = (\boldsymbol{\mu}_{T_i}, \boldsymbol{\mu}_{T_j})^T = \left(\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} i p_{ij}, \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} j p_{ij} \right)^T \quad (14)$$

2.2 Otsu 法

Otsu 阈值选取方法,即最大类间方差法,最早由日本学者大津展之于 1978 年提出^[16],因此也称大津法。该方法是通过过去相当长一段时间以来最受关注的阈值选取方法之一,得到了非常广泛的应用。它以目标类与背景类之间的方差最大化为准则,选取分割阈值。一维灰度级直方图情况下的类间方差表示为

$$\sigma_B^2(t) = \omega_o(t)(\mu_o(t) - \mu_T)^2 + \omega_b(t)(\mu_b(t) - \mu_T)^2 = \omega_o(t)\omega_b(t)(\mu_o(t) - \mu_b(t))^2 \quad (15)$$

一维 Otsu 法的阈值选取准则可以表示为

$$t^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq t \leq L-1} \{\sigma_B^2(t)\} \quad (16)$$

类似于一维方法,可以得到二维直方图下的类间方差公式^[18]为

$$\sigma_B^2(t, s) = \omega_o(t, s)[(\mu_{oi} - \mu_{Ti})^2 + (\mu_{oj} - \mu_{Tj})^2] + \omega_b(t, s)[(\mu_{bi} - \mu_{Ti})^2 + (\mu_{bj} - \mu_{Tj})^2] \quad (17)$$

最佳阈值选取准则为

$$(t^*, s^*) = \underset{0 \leq t \leq L-1, 0 \leq s \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ \sigma_B^2(t, s) \} \quad (18)$$

文献[73]中明确指出, Otsu 方法适用于图像中的目标和背景所占面积接近的情况, 而当两者所占面积较为悬殊时, Otsu 分割方法将失效。

2.3 最大熵法

Kapur 等人于 1985 年提出的最大熵法是另一种广受关注的阈值选取方法^[12], 其是在 Pun 等人^[74,75]所做工作的启发下, 经过一些修正而得出。该方法以形式简单、意义明确的特点成为关注度最高、使用最多的基于熵的阈值选取方法。最大熵法的阈值选取准则是分割后的目标类和背景类的总熵值最大, 即信息量最大。在一维直方图的条件下, 对应于阈值 t 的目标类和背景类的熵值分别为

$$H_o(t) = - \sum_{i=0}^t \frac{p_i}{\omega_o(t)} \ln \frac{p_i}{\omega_o(t)} \quad (19)$$

$$H_b(t) = - \sum_{i=t+1}^{L-1} \frac{p_i}{\omega_b(t)} \ln \frac{p_i}{\omega_b(t)} \quad (20)$$

最佳阈值的选取准则为

$$t^* = \underset{0 \leq t \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ H_o(t) + H_b(t) \} \quad (21)$$

二维直方图情况下的最大熵计算公式^[13,14]为

$$H(t, s) = H_o(t, s) + H_b(t, s) = - \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s \frac{p_{ij}}{\omega_o(t, s)} \ln \frac{p_{ij}}{\omega_o(t, s)} - \sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} \frac{p_{ij}}{\omega_b(t, s)} \ln \frac{p_{ij}}{\omega_b(t, s)} \quad (22)$$

相应的最佳阈值为

$$(t^*, s^*) = \underset{0 \leq t \leq L-1, 0 \leq s \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ H(t, s) \} \quad (23)$$

2.4 最小交叉熵(相对熵)法

1993 年, Li 等人将交叉熵的概念引入到图像处理领域, 提出了基于一维灰度级直方图的最小交叉熵阈值选取方法^[21]。该方法以分割后的图像与原图像的信息量差异最小为阈值选取准则, 实质上是使分割前后图像的 Kullback 散度达到最小。交叉熵的计算公式为

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^t ih_i \ln \frac{i}{\mu_o(t)} + \sum_{i=t+1}^{L-1} ih_i \ln \frac{i}{\mu_b(t)} \quad (24)$$

使式(24)取最小值的 t 值即为最佳阈值

$$t^* = \underset{0 \leq t \leq L-1}{\operatorname{argmin}} \{ \eta(t) \} \quad (25)$$

考虑到 Li 等人提出的交叉熵不具备距离对称性, Brink 等给出了对称交叉熵的概念^[22], 其实质上是向前向 Kullback 散度与后向 Kullback 散度相加, 从而使得交叉熵具有了对称性, 成为真正意义上的距离度量。对称交叉熵的表达式为

$$\eta_S(t) = \sum_{i=0}^t h_i (i \ln \frac{i}{\mu_o(t)} + \mu_o(t) \ln \frac{\mu_o(t)}{i}) + \sum_{i=t+1}^{L-1} h_i (i \ln \frac{i}{\mu_b(t)} + \mu_b(t) \ln \frac{\mu_b(t)}{i}) \quad (26)$$

2005 年, 文献[76]将交叉熵阈值法推广到了二维直方图的情况, 然而该方法仅用灰度级与邻域平均灰度级的乘积直接取代一维交叉熵中的灰度级进行计算, 并不是严格意义上的二维交叉熵。文献[24]从样本类间离散度出发, 经过推导给出了修正的二维交叉熵表达式

$$\eta(t, s) = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s h_{ij} (i \ln \frac{i}{\mu_{oi}(t, s)} + j \ln \frac{j}{\mu_{oj}(t, s)}) + \sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} h_{ij} (i \ln \frac{i}{\mu_{bi}(t, s)} + j \ln \frac{j}{\mu_{bj}(t, s)}) \quad (27)$$

最佳阈值为

$$(t^*, s^*) = \underset{0 \leq t \leq L-1, 0 \leq s \leq L-1}{\operatorname{argmin}} \{ \eta(t, s) \} \quad (28)$$

二维对称交叉熵的计算公式可参照式(24, 26, 27)相应地给出, 此处不再赘述。

2.5 灰度熵法

针对最大熵法中仅仅利用像素灰度概率信息的问题, 灰度熵的概念被提出^[77]。与最大熵不同的是, 灰度熵在考虑概率的基础上, 结合了像素的灰度信息, 能够使分割后的图像类内灰度更加均匀。一维直方图情况下灰度熵的计算公式为

$$E(t) = - \sum_{i=0}^t h_i \frac{i}{\beta_o(t)} \ln \frac{i}{\beta_o(t)} - \sum_{i=t+1}^{L-1} h_i \frac{i}{\beta_b(t)} \ln \frac{i}{\beta_b(t)} \quad (29)$$

式中: $\beta_o(t) = \sum_{i=0}^t ih_i$, $\beta_b(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} ih_i$ 分别为目标类和背景类的像素灰度级总和。文献[78]给出了二维灰度熵阈值选取公式及其快速递推算法。

2.6 最大相关法

Yen 等人于 1995 年将最大相关准则引入到阈值选取中^[79], 以降低传统最大熵法中对数熵运算的复杂性。相关性计算公式为

$$C(t) = C_o(t) + C_b(t) = - \ln \sum_{i=0}^t \left(\frac{p_i}{\omega_o(t)} \right)^2 - \ln \sum_{i=t+1}^{L-1} \left(\frac{p_i}{\omega_b(t)} \right)^2 \quad (30)$$

阈值选取准则为

$$t^* = \underset{0 \leq t \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ C(t) \} \quad (31)$$

可见相关性的计算过程中仅有两次对数运算, 远远小于传统最大熵法中对数运算的次数, 因此降低了算法的复杂度。Kurita 等人^[80]发现, 若假定目标和背景类像素的灰度满足两个等方差的正态分布, 则基于条件分布的最大相关方法等价于 Otsu 法。Pal 等人^[81]指出, 在一些场景下灰度分布更接近泊松分布, 并给出了基于这一假设的图像分割方法。后来这一假设被引入到最大相关法中, 得到等价准则函数^[82]为

$$J^C(t) = \omega_o(t) \mu_o(t) \ln \mu_o(t) + \omega_b(t) \mu_b(t) \ln \mu_b(t) - \mu_T \quad (32)$$

最佳阈值为最大化式(32)的 t 值, 即

$$t^* = \underset{0 \leq t \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ J^C(t) \} \quad (33)$$

2005 年, 最大相关法被推广到二维直方图的情况^[83], 其计算公式和阈值选取准则分别为

$$C(t, s) = C_o(t, s) + C_b(t, s) = 2 \ln [\omega_o(t, s) \omega_b(t, s)] - \ln \left[\left(\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s p_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} p_{ij}^2 \right) \right] \quad (34)$$

$$(t^*, s^*) = \underset{0 \leq t \leq L-1, 0 \leq s \leq L-1}{\operatorname{argmax}} \{ C(t, s) \} \quad (35)$$

2.7 最小误差法

1986 年, Kittler 等人首次提出了基于最小误差准则的阈值选取方法^[25]。该方法假定图像中的目标和背景的像素灰度分布分别服从一个高斯分布, 从而将阈值选取问题转化为最小误差高斯拟合问题。混合高斯灰度分布为

$$p(i) = \omega_o p(i | \omega_o) + \omega_b p(i | \omega_b) \quad (36)$$

两个独立高斯分布的表达式为

$$p(i | k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_k(t)} \exp \left(- \frac{(i - \mu_k(t))^2}{2\sigma_k^2(t)} \right) \quad (37)$$

式中, $k=1, 2$ 。 μ_k 和 σ_k^2 分别代表高斯分布的均值和方差, 假设图像被阈值 t 划分为目标类和背景类, 则 μ_k 和 σ_k^2 可通过两类的均值和方差估计得到

$$\mu_1(t) = \mu_o(t) \quad (38)$$

$$\mu_2(t) = \mu_b(t) \quad (39)$$

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=0}^t p_i (i - \mu_1(t))^2 / \omega_o(t) \quad (40)$$

$$\sigma_2^2(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} p_i (i - \mu_2(t))^2 / \omega_b(t) \quad (41)$$

由此可以得到最小误差法的准则函数

$$J(t) = \omega_o(t) \ln \frac{\sigma_1^2(t)}{\omega_o^2(t)} + \omega_b(t) \ln \frac{\sigma_2^2(t)}{\omega_b^2(t)} \quad (42)$$

最佳阈值的选取准则即表示为

$$t^* = \operatorname{argmin}_{0 \leq t \leq L-1} \{J(t)\} \quad (43)$$

Fan 等人于 1998 年用交叉熵原理对最小误差法进行了解释^[27], 可以认为最小误差法是交叉熵法的一种变形。为了提高该算法的抗噪性, Fan 等人又将最小误差法推广到二维直方图的形式^[84], 给出了二维最小误差法的准则函数并进行了简化, 其表达式为

$$J(t, s) = 1 - \omega_o(t, s) \ln \omega_o(t, s) - \omega_b(t, s) \ln \omega_b(t, s) + \omega_o(t, s) \ln \sigma_{oi}(t, s) \sigma_{oj}(t, s) + \omega_b(t, s) \ln \sigma_{bi}(t, s) \sigma_{bj}(t, s) \quad (44)$$

式中

$$\sigma_{oi}^2(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s p_{ij} [i - \mu_{oi}(t, s)]^2}{\omega_o(t, s)}; \quad \sigma_{oj}^2(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s p_{ij} [j - \mu_{oj}(t, s)]^2}{\omega_o(t, s)};$$

$$\sigma_{bi}^2(t, s) = \frac{\sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} p_{ij} [i - \mu_{bi}(t, s)]^2}{\omega_b(t, s)}; \quad \sigma_{bj}^2(t, s) = \frac{\sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} p_{ij} [j - \mu_{bj}(t, s)]^2}{\omega_b(t, s)}。$$

最佳阈值取值为

$$(t^*, s^*) = \operatorname{argmin}_{0 \leq t \leq L-1, 0 \leq s \leq L-1} \{J(t, s)\} \quad (45)$$

2.8 基于直方图区域划分方法的特性与对比

以上各种基于直方图区域划分的方法都是先利用某一阈值对直方图区域进行划分, 然后以某种准则来考察划分后的目标和背景是否准确, 由此确定最佳阈值。各种方法依据的准则函数不同, 因而分割特性也有所不同。Otsu 法和灰度熵法更多地考虑了像素的灰度级信息, 更加侧重于类内像素灰度级的均匀性, 使目标类和背景类所占的区域面积趋于相等, 适用于图像中目标类和背景类面积相差不大的情况。最大熵法主要考虑了像素的灰度概率信息, 其目的是使得分割后的图像信息量最大。由于最大熵法在计算熵值时是依据灰度级类内概率, 即某一灰度级的像素占其类内总像素的比例, 因而对所划分的目标和背景的大小并不十分敏感, 能够较好地保留图像中的小目标。交叉熵法的出发点是使分割后图像的信息量最大限度地保持与原图像相等, 对图像先验信息的要求不高, 对大多数图像均能取得不错的分割效果, 适用性良好, 鲁棒性较强。最大相关法在分割效果上与最大熵法基本一致, 由于最大相关法减少了对数运算的次数, 算法的复杂度低于最大熵法, 实时性较好。最小误差法可以认为是交叉熵法的一种变形, 与交叉熵法性能相近, 分割效果和鲁棒性都有较为不错的表现。

3 基于空间特征的阈值选取方法

3.1 灰度共生矩阵法

灰度共生矩阵能够反映一定距离、一定角度上特定灰度像素对出现的频数,常应用于图像纹理特征的提取。Chanda 等^[85]指出利用特定的共生矩阵,通过适当的准则可以实现图像阈值分割。灰度共生矩阵的构造方式为

$$c_{k,l} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \quad (46)$$

当 $f(i,j)=k$ 且 $f(i,j+1)=l$, 或者 $f(i,j)=k$ 且 $f(i+1,j)=l$ 时, $\delta_{ij}=1$, 否则 $\delta_{ij}=0$ 。对矩阵进行归一化得

$$p_{k,l} = \frac{c_{k,l}}{M \cdot N} \quad (47)$$

完成灰度共生矩阵的构造后,利用熵、平均对比度、Weber 对比度、平均熵等 4 种度量选择最佳分割阈值。Pal 等^[86]则给出了另外 3 种基于灰度共生矩阵的阈值选取度量:对比度、均匀性和区域大小。灰度共生矩阵与前文所述的二维直方图有一定的相似之处,均是对像素灰度信息和空间信息的统计,而与二维直方图相比更侧重于空间信息。在阈值分割领域中,其功能与二维直方图越来越接近,已逐渐被二维直方图所取代。

3.2 基于边缘信息的阈值选取方法

边缘是划分目标和背景的重要图像元素,也是图像分割的关键因素之一。通常的阈值分割与边缘检测属于两种不同的图像目标提取方法,而前者所提取的结果是图像中的目标区域,后者获得的是图像中的边缘轮廓。利用边缘信息进行阈值选取主要有两种方式:利用边缘先验信息和以边缘作为后验信息。第一种方式认为大梯度边缘位于目标和背景的交界处,其中包含了目标像素和背景像素,分割阈值应当在这些像素的灰度范围内。依据这一思想,人们提出了一些阈值选取方法^[87,88]。为了提高这类方法的抗噪性和自适应性,文献[7]首先利用抗噪性良好的形态学算法获得梯度图像并统计出梯度图像的直方图,依此计算出梯度的均值和标准差。以梯度值大于均值与标准差之和的梯度点作为大梯度边缘点,再以原始图像中这些位置上像素的灰度级均值作为最终的分割阈值。文献[89]在检测出图像边缘后,以边缘强度为权值对边缘像素灰度级进行加权平均得到图像分割阈值。为避免噪声干扰,剔除了梯度最大的一些点。第二种方式认为分割后图像的边缘应与原始图像的边缘相匹配,基于此文献[90]采用 Sobel 算子检测阈值分割后图像的边缘,以原始图像中的边缘信息作为后验知识,最佳阈值分割结果的边缘与原始图像的边缘具有最大重合度。

3.3 局部阈值方法

现有的阈值分割方法大都为全局阈值法,即采用一个阈值对整幅图像进行分割。然而,在一些情况下,这种分割方式并不符合图像本身的特性。例如,在光照不均匀条件下获得的图像,其目标或背景在图像中的不同位置像素值也分布在不同范围内,仍采用全局阈值法极易导致错分。局部阈值法^[7-9]先将图像按一定的规则进行划分,在这些划分的子图像中分别完成阈值分割,将各自的分割结果拼接起来并对相邻图像块连接处进行平滑处理,即可得到最终的分割图像。局部阈值分割方法属于一种分割策略,在划分的子图像中几乎可以采用任意的阈值分割方法。

4 基于模糊集/粗糙集的阈值选取方法

4.1 模糊集方法

假设 X 代表一个元素数为 n 的论域,模糊集 A 表示从 X 到 $[0,1]$ 的一个映射。映射函数 μ_A 称为隶属度函数, X 中元素 $x_i(i=1,2,\dots,n)$ 的隶属度为 $\mu_A(x_i)$ 。通过度量模糊集 A 的模糊度,可以对 X 中的元素进行分类。Pal 等人首次利用模糊集原理进行图像阈值选取^[91],此后许多基于模糊集的阈值选取方法相继被提出。在这些方法中,隶属度函数的选择是一个关键问题,不同的隶属度函数^[92-94]直接导致不同的阈值选取结果。S 型函数是最为常用的一种隶属度函数,其表达式为

$$\mu_A(x) = S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & a < x \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & b < x \leq c \\ 1 & x > c \end{cases} \quad (48)$$

模糊度量通常采用熵和距离两种方式。距离度量在一些文献中也被称为广义模糊熵^[95]。模糊熵度量表达式为

$$E(A) = \frac{1}{n \ln 2} \sum_{i=1}^n H(\mu_A(x_i)) \quad (49)$$

式中

$$H(\mu_A(x_i)) = -\mu_A(x_i) \ln \mu_A(x_i) - [1 - \mu_A(x_i)] \ln [1 - \mu_A(x_i)] \quad (50)$$

距离度量的表达式为

$$d(A, \bar{A}) = \frac{2}{n^{1/k}} \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\bar{A}}(x_i)|^k \right)^{1/k} \quad (51)$$

式中

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \mu_A(x) < 0.5 \\ 1 & \mu_A(x) \geq 0.5 \end{cases} \quad (52)$$

距离度量的最小值或熵度量的最大值对应着图像的最佳分割阈值。

4.2 粗糙集方法

图像的目标和背景之间存在着过渡区域,这部分区域的像素灰度具有渐变因而不易区分,粗糙集的上下近似能够有效对这部分像素进行描述,从而能够达到图像分割的目的。粗糙集的概念由波兰学者 Pawlak 首次提出^[96],Sankar 等基于粗糙集建立了一个图像分割的框架^[97],随后被应用于医学图像的分割^[98],Malyszko 等则提出了相应的多阈值图像分割算法^[99-100],结合变精度粗糙熵和遗传算法的图像阈值分割方法也被提出^[101]。近年来,基于粗糙集的阈值分割方法得到了更多的研究^[102-104]。

如图 3 所示,粗糙集方法首先将图像划分成互不重叠的小图像块,称为粗糙集的粒。假设以灰度阈值 t 将图像像素划分为目标和背景两类(以图 3 中的线圈为分割线),图像中只含有目标像素的图像粒的集合称为正域(黑色区域),只含有背景像素的图像粒的集合称为负域(白色区域),其余图像粒的集合称为边界(灰色区域)。给定某一分割阈值后,问题的关键在于边界像素的划分。设 $Pos(t)$ 和 $Neg(t)$ 分别表示正域集合和负域集合的基数, $Bnd(t)$ 代表边界集合的基数,则目标类和背景类的粗糙度可以表示为^[99]

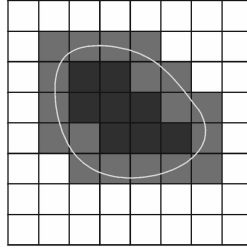


图3 粗糙集划分示意图

Fig. 3 Diagrammatic sketch of rough set segmentation

$$R_o^{I_p, E_p}(t) = \left(1 - \left(\frac{Bnd(t)}{Pos(t) + Bnd(t)}\right)^{I_p}\right)^{E_p} \quad (53)$$

$$R_b^{I_p, E_p}(t) = \left(1 - \left(\frac{Bnd(t)}{Neg(t) + Bnd(t)}\right)^{I_p}\right)^{E_p} \quad (54)$$

式中 I_p 和 E_p 分别称为内部能量和外部能量,通常两者的取值均为 1。利用熵来度量总的粗糙度,可以得到图像的粗糙熵为

$$E_R^{I_p, E_p}(t) = -\frac{e}{2} (R_o^{I_p, E_p}(t) \ln R_o^{I_p, E_p}(t) + R_b^{I_p, E_p}(t) \ln R_b^{I_p, E_p}(t)) \quad (55)$$

最佳阈值即为

$$t^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq t \leq L-1} \{E_R^{I_p, E_p}(t)\} \quad (56)$$

5 基于非 Shannon 熵的阈值选取方法

前文中所涉及的“熵”这一概念,都是指基于对数运算的 Shannon 熵,它是最早用于度量信息量的熵。然而 Shannon 熵是一种广延性(可加性)熵,与很多情况下图像的非广延性并不相符,容易忽略不同类像素直接的相互作用,导致信息量的度量不准确。另外,Shannon 熵中的对数运算较为复杂,且存在无定义点的问题,在数据处理时存在一定的不便。为此,许多其他形式的熵被提出,并应用于图像的阈值选取准则。这些准则的核心思想与前文中基于 Shannon 熵的准则并无区别,仅仅是熵的度量方式发生了改变。

5.1 指数熵准则

Pal 等人于 1989 年前后提出了指数熵的概念^[105],并给出了最大指数熵阈值选取方法。概率为 p_i 的事件所含的信息量为

$$E_{\text{exp}} = e^{1-p_i} \quad (57)$$

类比 2.3 节中基于 Shannon 熵的准则函数,能够得到指数熵准则函数

$$H_{\text{exp}}(t) = \sum_{i=0}^t \frac{p_i}{\omega_o(t)} e^{1-\frac{p_i}{\omega_o(t)}} + \sum_{i=t+1}^{L-1} \frac{p_i}{\omega_b(t)} e^{1-\frac{p_i}{\omega_b(t)}} \quad (58)$$

同样地,指数熵也可以被推广到二维直方图的情况^[41]。此外,指数熵度量下的交叉熵等阈值选取准则也随后被提出,相应地出现了一系列的阈值选取方法^[106,107]。指数熵将单一事件的信息量限制在两个有限实数之间,避免了 Shannon 熵中概率趋于零时信息量趋于无穷大的情况。

5.2 Tsallis 熵准则

Tsallis 于 1988 年首次提出了一种非广延性熵,后被称为 Tsallis 熵^[108]。由于该熵与 1967 年 Havr-

da 和 Charvat 等人提出的一种熵形式相似,也被称为 Tsallis-Havrda-Charvát 熵^[36]。在 Tsallis 对这种熵进行详细的论证之后,其被广泛应用于统计物理学中,后被引入图像阈值分割领域。最大 Tsallis 熵阈值选取准则函数^[35]为

$$H_{Tsallis} = H_{Tsallis,o} + H_{Tsallis,b} + (1 - q)H_{Tsallis,o} \cdot H_{Tsallis,b} \quad (59)$$

式中

$$H_{Tsallis,o} = \frac{1 - \sum_{i=0}^t \left(\frac{p_i}{\omega_o(t)} \right)^q}{q - 1} \quad (60)$$

$$H_{Tsallis,b} = \frac{1 - \sum_{i=t+1}^{L-1} \left(\frac{p_i}{\omega_b(t)} \right)^q}{q - 1} \quad (61)$$

参数 q 描述了 Tsallis 熵的非广延程度,通常情况下 $q \neq 1$ 。当 $q \rightarrow 1$ 时, Tsallis 熵等价于 Shannon 熵^[37]。

随后, Tsallis 熵被推广到二维^[109], 文献[38]给出了二维直方图斜分条件下的 Tsallis 熵阈值选取方法。文献[110]将 Tsallis 熵度量引入交叉熵阈值选取准则函数,给出了最小 Tsallis 交叉熵阈值分割方法,后又将其推广至二维直方图的情况。然而文献[110]给出的 Tsallis 交叉熵直接采用了交叉熵定义中的概率形式,与最初的最小 Shannon 交叉熵阈值选取准则函数^[21]形式并不一致,且在推广至二维时,参考了文献[76]中的 Shannon 熵意义下的二维交叉熵形式,存在与 2.4 节中所述同样的问题。

5.3 Renyi 熵准则

Sahoo 等人基于 Renyi 熵先后提出了一维和二维 Renyi 熵阈值选取方法^[111,112]。一维 Renyi 熵阈值选取准则函数为

$$H_R^a(t) = H_{R,o}^a(t) + H_{R,b}^a(t) \quad (62)$$

式中

$$H_{R,o}^a(t) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^t \left(\frac{p_i}{\omega_o(t)} \right)^\alpha \quad (63)$$

$$H_{R,b}^a(t) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=t+1}^{L-1} \left(\frac{p_i}{\omega_b(t)} \right)^\alpha \quad (64)$$

可调参数 $\alpha > 0$ 。二维准则函数结构与此类似,其表达式为

$$H^a(t, s) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s \left(\frac{p_{ij}}{\omega_o(t, s)} \right)^\alpha + \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} \left(\frac{p_{ij}}{\omega_b(t, s)} \right)^\alpha \quad (65)$$

2005 年, Wang 等人给出了 Renyi 熵和 Tsallis 熵阈值选取准则的等价性证明^[113]。当 Renyi 熵中的参数 α 与 Tsallis 熵中的参数 q 相等时, Renyi 熵准则函数的最大值与 Tsallis 熵准则函数的最大值对应的阈值相同。

5.4 Arimoto 熵准则

Arimoto 熵的定义于 1971 年被首次提出,然而直到 2009 年才被用于二维阈值选取准则中^[45]。图像的二维 Arimoto 熵计算公式为

$$H_A^a(t, s) = H_{A,o}^a(t, s) + H_{A,b}^a(t, s) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} H_{A,o}^a(t, s) H_{A,b}^a(t, s) \quad (66)$$

式中

$$H_{A,o}^a(t, s) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[1 - \frac{1}{\omega_o(t, s)} \left(\sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s p_{ij}^a \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (67)$$

$$H_{A,b}^{\alpha}(t,s) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[1 - \frac{1}{\omega_b(t,s)} \left(\sum_{i=t+1}^{L-1} \sum_{j=s+1}^{L-1} p_{ij}^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (68)$$

参数 $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ 。当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, Arimoto 熵亦等同于 Shannon 熵; 当 $1 < \alpha < 20$ 时, Arimoto 熵与 Renyi 熵非常相似^[44]。文献[114]纠正了文献[45]中 Arimoto 熵公式的表述错误, 给出了 Arimoto 熵二维直方图斜分阈值选取方法。文献[62]将 Arimoto 熵与灰度熵相结合, 考虑了像素类内灰度的均匀性, 同时采用人工蜂群算法加快了最佳阈值的搜索速度。

6 阈值选取准则的简化与优化算法

自 20 世纪 90 年代以来, 已经提出了许多的阈值选取方法。在关注这些方法分割效果的同时, 其计算复杂度也是备受重视的问题。阈值分割作为一种实用性较强的图像分割方法, 已经在各种图像分析、识别和机器视觉系统中得到了大量的应用, 其实时性能的优劣直接影响整个系统的运转效率, 成为衡量阈值分割方法优越性的一项重要指标。随着各种新方法的提出, 算法的复杂性也不同程度地提高。例如, 当在二维直方图上应用各类阈值选取准则函数时, 数据维数的增加导致数据量膨胀, 迫切需要更加快速方便的准则函数求解和优化算法。为此, 学者们做了大量的研究和实验工作, 或针对具体阈值选取方法给出其简化算法, 或引入一些智能优化算法实现最优阈值的选取, 在不同程度上降低了算法的复杂度。

6.1 递推、迭代和降维算法

为了减少算法运行时间, 在计算图像统计信息时采用递推方式是一种常用的技巧。例如, 2.1.2 节中在计算一维或二维直方图统计信息的过程中, 可以利用诸如以下递推公式

$$\omega_o(t) = \omega_o(t-1) + p_t \quad (69)$$

$$\mu_o(t) = [\mu_o(t-1)\omega_o(t-1) + tp_t] / \omega_o(t) \quad (70)$$

$$\omega_o(t,s) = \omega_o(t-1,s) + \omega_o(t,s-1) - \omega_o(t-1,s-1) + p_s \quad (71)$$

由此, 在计算对应于每个变量 t 和 s 的先验概率和均值时, 可以避免不必要的重复求和。此外, 在假定传统二维直方图中远离对角线的两个区域像素点数近似为 0 的前提下, 有

$$\omega_b(t,s) = 1 - \omega_o(t,s) \quad (72)$$

类似地, 可以得到二维直方图先验参数 $\mu_o(t,s)$ 和 $\mu_b(t,s)$ 等的递推公式, 参见文献[115]。

Reddi 等^[17]在求解一维 Otsu 准则下的最优阈值时, 假定灰度直方图是一个连续概率密度函数, 通过对准则函数进行求导寻找极值点。近些年来, 这种方法被推广至二维, 并应用于 Otsu、最大熵和交叉熵等准则函数的最优化^[116-119]。

针对直方图维数提高而带来的数据膨胀问题, 一些学者提出了二维阈值选取的分解算法^[120,28], 在假定二维直方图中噪声与边缘区域像素点数近似为 0 的条件下, 将二维阈值选取准则函数分解成两个一维函数。由此, 将算法的复杂度从 $O(L^4)$ 降低为 $O(L)$, 大大减少了计算量。

6.2 阈值选取优化算法

随着计算机和网络技术的迅速发展, 数据的规模大幅增加, 数据处理的时间成本也越来越高。针对这一问题, 许多学者效仿物理学和生物学中的原理, 提出了一些智能优化算法, 大大降低了数据处理的复杂度。图像在计算机中表现为矩阵的形式, 且一般是较大规模的矩阵, 特别是随着成像设备的分辨率越来越高, 图像的数据量更加庞大, 可以认为是大数据的一种表现形式。因此, 优化算法也越来越多地被应用于图像处理。

在图像阈值分割领域中, 随着信息维数的增加, 同时为了满足多阈值选取的需要, 采用优化算法加

快处理速度已经较为普遍,成为人们改进阈值选取方法的一个重要方面。由于图像的阈值是离散的,因此最佳阈值的搜索是一个组合优化问题。优化算法的目的就是寻找阈值选取准则函数的最优值(最大值或最小值)所对应的最佳阈值。在准则函数易于计算的情况下,通常采用穷举的方法,将搜索空间内所有点的函数值计算出来,再进行比较得到最优值。然而当准则函数的计算时间较长时,穷举方法的时间代价较高,不能满足快速处理的要求。优化算法建立在准则函数具有一定连续性的假设上,通过采样的方式计算函数值,并依据一定的规则进行迭代演化,向最优值对应的最优解逼近,避免了穷举法中的遍历计算,从而大大提高算法的效率。

阈值选取方法中常用的优化算法有模拟退火算法、遗传算法以及各类群智能算法。由于优化算法是采用采样的方式进行最优值搜索,虽然能够加快寻优速度,但在优化算法的寻优机制或准则函数连续性不佳的情况下,可能存在经过多次迭代仍不能找到最优值的风险。由于准则函数独立于优化算法,因此,为了得到良好的优化结果,需构建完善的搜索机制。优化算法机制的优劣主要表现在几个方面:全局搜索性、收敛速度、收敛精度以及鲁棒性。全局搜索性是指优化算法对整个空间进行搜索的遍历性以及避免局部极值的能力;收敛速度是指得到最终稳定解的快慢;收敛精度表示稳定解与极值点的距离,距离越小,则精度越高;鲁棒性一方面是指对于同一个准则函数多次独立的优化过程均能得到最优阈值的概率,另一方面指对于不同的准则函数都能够有效优化的概率。全局搜索性在一定程度上保证了算法的鲁棒性,然而良好的全局搜索性往往会导致较慢的收敛速度,因此需根据具体的问题做一些取舍。实际上,现有的阈值选取优化算法均存在不能搜索到最优阈值的风险,换言之,即不能以 100% 的概率找到最优阈值,可以认为阈值选取问题中的优化算法是以允许一定的错误率来换取处理速度的提高。

6.2.1 模拟退火算法

模拟退火算法是较早提出的一种优化算法,它模拟了固体物质的退火处理过程。初始时,物质处于高温融化状态,粒子可以自由移动,随着温度的下降,粒子会渐渐凝为低能态的晶格,最终以最低能量态完全凝固。在优化过程中,搜索点在优化函数的可行域内自由移动,并逐渐向函数极值(最低能量点)处靠近,最后稳定在极值处,得到最优分割阈值。

6.2.2 遗传算法

遗传算法是以自然选择和遗传理论为基础,将生物过程中适者生存的规则与群体内部染色体的随机信息交换机制相结合的搜索算法。它能够实现全局并行搜索,具有较强的稳定性。遗传算法首先对搜索空间进行编码,生成染色体种群,经过每一代染色体的复制、交叉、变异等操作会产生一些高适应度的染色体。对适应度达到极值的染色体编码进行还原就可以得到图像分割的最优阈值。

6.2.3 粒子群算法

粒子群优化(Particle swarm optimization, PSO)算法是 Kennedy 等^[121]于 1995 年提出的一种全局优化进化算法,其思想来源于对鸟群捕食行为的研究。同遗传算法相比,PSO 算法简单、易于实现,且需调整的参数较少,成为阈值选取方法中常用的优化算法。搜索最优值时,粒子群中的粒子以其个体历史最优和全局最优为导向进行移动,搜索的遍历性较强。

6.2.4 人工蜂群算法

2005 年, Karaboga^[122]受蜂群采蜜行为的启发,首次提出了人工蜂群优化(Artificial bee colony optimization, ABCO)算法。该算法将整个蜂群分为三类蜜蜂:引领蜂、观察蜂和侦查蜂。通过引领蜂带领各个子蜂群展开搜索,观察蜂跟随引领蜂并对其周围的食物源收益度进行评估,发现更好的食物源,当引领蜂陷入局部极值时自动转化成为侦查蜂,放弃在当前位置继续搜索并在整个搜索域内进行侦查,随机选定一处开始新的搜索。由于 ABCO 算法具有良好的全局搜索性能,一经提出便受到了许多研究人员的关注,并迅速地在各种优化问题中得到应用,在图像阈值分割领域中也例外^[59-62],更多相关的研

究仍在继续开展。

6.2.5 其他群智能优化算法与组合式优化

除了上述几种应用广泛的优化算法之外,其他一些优化算法也在阈值选取准则函数优化问题中得到了不同程度的应用。例如,人工免疫算法^[123-125]、鱼群算法^[126,127]、细菌算法^[128]、萤火虫算法^[129,130]、蚁群算法^[131,132]等。有学者对这些优化算法的性能作了对比和分析^[133,134]。笔者认为,优化算法的性能不能简单地评价孰优孰劣,而要根据具体的优化问题而定。比如,优化算法的收敛速度与全局搜索性能一般呈对立关系,优化准则函数较为复杂的情况下(局部极值较多,函数波动较大)需更加注重全局搜索性,而不能一味追求收敛速度,否则容易陷入局部极值难以得到全局最优解;而当准则函数较为简单时,则可适当降低对全局搜索性能的要求,以达到快速收敛的目的。此外,有些文献将不同的优化算法进行组合,得到了一些新的、机制更为完善的优化算法^[135],有一定的借鉴意义,然而仍不能摆脱优化算法固有的限制。

7 阈值分割评价

图像阈值分割算法性能评价一直是一个难题,在国际上也并没有统一的标准。现主要通过阈值分割的主观视觉效果和算法的运行效率做一个大致的评估。虽然有研究学者提出了一些定量的评价指标^[136-138],然而这些指标实际上并不通用,不能成为普遍的评价标准,论其原因主要有以下几点:(1)大多数定量评价指标依赖于参考分割图像,而参考分割图像一般只能通过人工方法获得。因此,这种方式虽然形式上是客观定量评价,实质上还是依靠人的主观视觉。(2)尽管提出了一些无监督定量评价指标,例如,类内均匀性、边界准确性等,通过实验可以发现,高指标并不一定意味着很好的分割效果。有些分割算法在分割图像时就是以类内均匀性作为准则函数,其在定量评价时自然就有较高的指标,而对于以信息熵为准则的分割算法,该指标就相对较低,这并不能说明分割性能的优劣,不同类型的算法有其各自适用的场景。(3)图像分割具有目标不确定性。对于同一幅图像,若关注的目标不同,对分割结果的评价自然也就不同。比如,一种算法很好地提取了一个物体,但该物体并不是我们需要的目标,这样的结果仍不能得到好的评价。

8 结束语

经过 20 多年的发展历程,图像阈值分割的研究已经经历了规模由小到大、理论由浅入深、方法由少到多的演变,取得了丰硕的研究成果并在许多实际领域中得到了应用。所提出的各类阈值分割方法都依据一定的图像特征、利用特定的分割准则完成图像的分割,适用于具有某种特性的图像,也都存在各自的局限性。因此,对于图像阈值分割的研究旨在提出不同的分割思路,归纳各种不同方法的特点,得出各自的适用范围,而不可能得到一种终极的方法能够适用于所有的图像分割问题。正如前文所述,阈值分割问题实际上是一个分类问题,根据模式分类的思想,不存在一种“最好”的分类器能够对于所有的分类问题都取得好的分类效果,而只能依据样本本身的特性,选择最适合的分类器。换句话说,即适合的就是最好的,阈值分割亦如是。阈值分割的相关研究一直都有新的思想涌现,从未间断,也正是缘于此。这同时也预示着,对于阈值分割的研究在未来一段时间内仍会继续,还会出现更多的研究成果。

参考文献:

- [1] Nikhil R P, Sankar K P. A review on image segmentation techniques[J]. *Pattern Recognition*, 1993, 26(9):1277-1294.
- [2] Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2004, 13(1):146-165.
- [3] 韩思奇,王蕾. 图像分割的阈值法综述[J]. *系统工程与电子技术*, 2002, 24(6):91-94.
Han Siqu, Wang Lei. A survey of thresholding methods for image segmentation[J]. *Systems Engineering and Electronics*,

2002, 24(6): 91-94.

- [4] 谭优,王泽勇. 图像阈值分割算法实用技术与比较[J]. 微计算机信息, 2007, 23(8-3): 298-299.
Tan You, Wang Zeyong. Study on applied technology arithmetic of image threshold segmentation[J]. Microcomputer Information, 2007, 23(8-3): 298-299.
- [5] 吴一全,朱兆达. 图像处理中阈值选取方法 30 年(1962—1992)的进展(一)[J]. 数据采集与处理, 1993, 8(3): 193-201.
Wu Yiquan, Zhu Zhaoda. 30 years (1962—1992) of the developments in threshold selection methods in image processing(1) [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 1993, 8(3): 193-201.
- [6] 吴一全,朱兆达. 图像处理中阈值选取方法 30 年(1962—1992)的进展(二)[J]. 数据采集与处理, 1993, 8(4): 268-282.
Wu Yiquan, Zhu Zhaoda. 30 years (1962—1992) of the developments in threshold selection methods in image processing(2) [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 1993, 8(4): 268-282.
- [7] 张爱华,余胜生,周敬利. 一种基于边缘检测的局部阈值分割算法[J]. 小型微型计算机系统, 2003, 24(4): 661-663.
Zhang Aihua, Yu Shengsheng, Zhou Jingli. A local-threshold segment algorithm based on edge detection[J]. Mini-Micro Systems, 2003, 24(4): 661-663.
- [8] Shi J C, Zhang H, Nilanjan R. Solidity based local threshold for oil sand image segmentation[C]// IEEE Conference on Image Processing. Cairo: IEEE, 2009, 2385-2388.
- [9] 马文科,王玲,何浩. 一种指纹图像的局部阈值分割算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(34): 177-179.
Ma Wenke, Wang Ling, He Hao. Local threshold segmentation algorithm for fingerprint images[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(34): 177-179.
- [10] 黄河,李庆武,范习. 采用局部动态阈值的图像分割算法[J]. 光电子技术, 2011, 31(1): 10-13.
Huang He, Li Qingwu, Fan Xi. Adaptive local threshold image segmentation algorithm[J]. Optoelectronic Technology, 2011, 31(1): 10-13.
- [11] 马保国,乔玲玲,贾寅波. 基于局部自适应阈值的细胞图像分割方法[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(2): 755-756.
Ma Baoguo, Qiao Lingling, Jia Yinbo. Cell image segmentation method based on partial adaptive thresholds[J]. Application Research of Computers, 2009, 26(2): 755-756.
- [12] Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of histogram[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1985, 29(1): 273-285.
- [13] Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level picture using two-dimensional entropies[J]. Pattern Recognition, 1989, 47(1): 22-32.
- [14] Brink A D. Thresholding of digital image using two-dimensional entropies[J]. Pattern Recognition, 1992, 25(8): 803-808.
- [15] Du F, Shi W K, Chen L Z H, et al. Infrared image segmentation with 2D maximum entropy method based on particle swarm optimization[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(5): 597-603.
- [16] Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1979, 9(1): 62-66.
- [17] Reddi S S, Rudin S F, Keshavan H R. An optimal multiple threshold scheme for image segmentation[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1984, 14(4): 661-665.
- [18] 刘健庄,栗文青. 灰度图象的二维 Otsu 自动阈值分割法[J]. 自动化学报, 1993, 19(1): 101-105.
Liu Jianzhuang, Li Wenqing. The automatic thresholding of gray-level pictures via two-dimensional Otsu method[J]. Acta Automatica Sinica, 1993, 19(1): 101-105.
- [19] 范九伦,赵凤. 灰度图像的二维 Otsu 曲线阈值分割法[J]. 电子学报, 2007, 35(4): 751-755.
Fan Jiulun, Zhao Feng. Two-dimensional Otsu's curve thresholding segmentation method for gray-level images[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(4): 751-755.
- [20] Zhang J, Hu J L. Image segmentation based on 2D Otsu method with histogram analysis[C]// International Conference on Computer Science and Software Engineering. Wuhan: IEEE, 2008, 6: 105-108.
- [21] Li C H, Lee C K. Minimum cross entropy thresholding[J]. Pattern Recognition, 1993, 26(4): 617-625.
- [22] Brink A D, Pendock N E. Minimum cross-entropy threshold selection[J]. Pattern Recognition, 1996, 29(1): 179-189.
- [23] Nikhil R P. On minimum cross-entropy thresholding[J]. Pattern Recognition, 1996, 29(4): 575-580.
- [24] 乔韡韡,吴成茂. 二维最大类间交叉熵阈值分割法[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2008, 38(3): 374-378.
Qiao Weiwei, Wu Chengmao. Two-dimensional thresholding segmentation method based on maximum inter-class cross entropy[J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 2008, 38(3): 374-378.
- [25] Kittler J, Illingworth J. Minimum error thresholding[J]. Pattern Recognition, 1986, 19(1): 41-47.
- [26] Mozi F. A note on minimum error thresholding[J]. Pattern Recognition, 1991, 12(6): 349-352.

- [27] Fan J L. Notes on Poisson distribution-based minimum error thresholding[J]. *Pattern Recognition Letters*, 1998, 19(5): 425-431.
- [28] 朱齐丹,荆丽秋,毕荣生,等. 最小误差阈值分割法的改进算法[J]. *光电工程*, 2010, 37(7):107-113.
Zhu Qidan, Jing Liqiu, Bi Rongsheng, et al. Improvement algorithm of minimum-error thresholding segmentation method [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2010, 37(7):107-113.
- [29] 张云飞,张晔. 利用二维熵自动确定图像分割的阈值[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2006, 27(3):354-356.
Zhang Yunfei, Zhang Ye. Automatic threshold of image segmentation using 2-D entropy[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2006, 27(3):354-356.
- [30] Xiao Y, Cao Z G, Zhang T X. Entropic thresholding based on gray-level spatial correlation histogram[C]// 19th International Conference on Pattern Recognition. Tampa; IEEE, 2008; 1-4.
- [31] Adiljan Y, Yoshihiro H, Tasuku M, et al. 2-D direction histogram based entropic thresholding[J]. *Neurocomputing*, 2013, 120: 287-297.
- [32] Xiao Y, Cao Z G, Yuan J S. Entropic image thresholding based on GLGM histogram[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2014, 40:47-55.
- [33] 申铨京,龙建武,陈海鹏,等. 三维直方图重建和降维的 Otsu 阈值分割算法[J]. *电子学报*, 2011, 39(5):1108-1114.
Shen Xuanjing, Long Jianwu, Cheng Haipeng, et al. Otsu thresholding algorithm based on rebuilding and dimension reduction of the 3-dimensional histogram[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(5):1108-1114.
- [34] 龚淑柯,吴铁军. 基于三维直方图的 Fisher 评价函数图像分割方法[J]. *光电与控制*, 2005, 12(4):35-37.
Gong Shuke, Wu Tiejun. 3D histogram based Fisher criterion function for image segmentation[J]. *Electronics Optics & Control*, 2005, 12(4):35-37.
- [35] Portes de Albuquerque M, Esquef I A, Gesualdi Mello A R. Image thresholding using Tsallis entropy[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25:1059-1065.
- [36] Sahoo P K, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrda-Charvát entropy[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(6): 520-528.
- [37] Lin Q Q, Ou C J. Tsallis entropy and the long-range correlation in image thresholding[J]. *Signal Processing*, 2012, 92: 2931-2939.
- [38] 吴一全,潘喆,吴文怡. 二维直方图斜分 Tsallis-Havrda-Charvát 熵图像阈值分割[J]. *光电工程*, 2008, 35(7):53-58.
Wu Yiquan, Pan Zhe, Wu Wenyi. Tsallis-Havrda-Charvát entropy image thresholding based on two-dimensional histogram oblique segmentation[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2008, 35(7):53-58.
- [39] Pal N R, Pal S K. Object-background segmentation using new definitions of entropy[J]. *IEEE Proceedings (Computers and Digital Techniques)*, 1989, 136(4):284-295.
- [40] Pal N R, Pal S K. Entropy: A new definition and its applications[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1991, 21(5):1260-1270.
- [41] 潘喆,吴一全. 二维指数熵图像阈值选取方法及其快速算法[J]. *计算机应用*, 2007, 27(4):982-985.
Pan Zhe, Wu Yiquan. Method of thresholding using two-dimensional exponent entropy and its fast algorithm[J]. *Computer Applications*, 2007, 27(4):982-985.
- [42] 吴一全,殷骏,毕硕本. 最大倒数熵/倒数灰度熵多阈值选取[J]. *信号处理*, 2013, 29(2):143-151.
Wu Yiquan, Yin Jun, Bi Shuoben. Multi-threshold selection using maximum reciprocal entropy/reciprocal gray entropy[J]. *Journal of Signal Processing*, 2013, 29(2):143-151.
- [43] 吴一全,孟天亮,王凯. 基于斜分倒数交叉熵和蜂群优化的火焰图像阈值选取[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(1):235-243.
Wu Yiquan, Meng Tianliang, Wang Kai. Threshold selection of flame image based on reciprocal cross entropy and bee colony optimization[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(1): 235-243.
- [44] Liu Y Y, Li S G. Two-dimensional Arimoto entropy image thresholding based on ellipsoid region search strategy[C]// International Conference on Multimedia Technology. Ningbo; IEEE, 2010; 1-4.
- [45] 卓问,曹治国,肖阳. 基于二维 Arimoto 熵的阈值分割方法[J]. *模式识别与人工智能*, 2009, 22(2):208-213.
Zhuo Wen, Cao Zhiguo, Xiao Yang. Image thresholding based on two-dimensional Arimoto entropy[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2009, 22(2):208-213.
- [46] 陈果,左洪福. 图像分割的二维最大熵遗传算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2002, 14(6):530-534.
Chen Guo, Zuo Hongfu. 2-D maximum entropy method of image segmentation based on genetic algorithm[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2002, 14(6):530-534.
- [47] Zhang X H, Liu L N. 2-D minimum fuzzy entropy method of image thresholding based genetic algorithm[J]. *Journal of Sys-*

tems Engineering and Electronics, 2005, 16(3):557-560.

- [48] Tao W B, Tian J W, Liu J. Image segmentation by three-level thresholding based on maximum fuzzy entropy and genetic algorithm[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(16):3069-3078.
- [49] 陶文兵, 田金文, 柳健, 等. 基于遗传算法和模糊熵的前视红外图像分割[J]. 红外与毫米波学报, 2003, 22(6):465-468.
Tao Wenbing, Tian Jinwen, Liu Jian, et al. Segmentation of FLIR images by genetic algorithm and fuzzy entropy[J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2003, 22(6):465-468.
- [50] 张怀柱, 向长波, 宋建中, 等. 改进的遗传算法在实时图像分割中的应用[J]. 光学精密工程, 2008, 16(2):333-337.
Zhang Huaizhu, Xiang Changbo, Song Jianzhong, et al. Application of improved adaptive genetic algorithm to image segmentation in real time[J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 16(2):333-337.
- [51] 郑毅, 刘上乾. 基于模糊指数熵和模拟退火的图像分割[J]. 红外技术, 2006, 28(7):395-399.
Zheng Yi, Liu Shangqian. Image segmentation based on fuzzy exponential entropy and simulated annealing algorithm[J]. Infrared Technology, 2006, 28(7):395-399.
- [52] 赵于前, 李慧芬, 王小芳. 基于模拟退火算法的多阈值图像分割[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(1):380-382.
Zhao Yuqian, Li Huifen, Wang Xiaofang. Multi-threshold image segmentation based on simulated annealing algorithm[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(1):380-382.
- [53] 陈俊, 李红. 利用模拟退火遗传算法实现图像阈值分割[J]. 应用数学, 2005, 18(增):107-110.
Chen Jun, Li Hong. Image thresholding segmentation based on simulated annealing and genetic algorithm[J]. Mathematica Applicata, 2005, 18(S):107-110.
- [54] Maitra M, Chatterjee A. A hybrid cooperative-comprehensive learning based PSO algorithm for image segmentation using multilevel thresholding[J]. Expert Systems with Applications, 2008, 34(2):1341-1350.
- [55] Yin P Y. Multilevel minimum cross entropy threshold selection based on particle swarm optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 184(2):503-513.
- [56] Gao H, Xu W B, Sun J, et al. Multilevel thresholding for image segmentation through an improved quantum-behaved particle swarm algorithm[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2010, 59(4):934-946.
- [57] 吴一全, 张金矿. 基于改进的二维最大熵及粒子群递推的图像分割[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(10):1338-1344.
Wu Yiquan, Zhang Jinkuang. Thresholding based on improved 2D maximum entropy method and particle swarm optimization[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(10):1338-1344.
- [58] 唐英干, 刘冬, 关新平. 基于粒子群和二维 Otsu 方法的快速图像分割[J]. 控制与决策, 2007, 22(2):202-205.
Tang Yinggan, Liu Dong, Guan Xinping. Fast image segmentation based on particle swarm optimization and two-dimension Otsu method[J]. Control and Decision, 2007, 22(2):202-205.
- [59] Ming H H. Multilevel thresholding selection based on the artificial bee colony algorithm for image segmentation[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38:13785-13791.
- [60] Ma M, Liang J H, Guo M, et al. SAR image segmentation based on artificial bee colony algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(8):5205-5214.
- [61] Zhang Y D, Wu L N. Optimal multi-level thresholding based on maximum Tsallis entropy via an artificial bee colony approach[J]. Entropy, 2011, 13(4):841-859.
- [62] 吴一全, 曹鹏祥, 王凯, 等. 二维 Arimoto 灰度熵阈值分割[J]. 应用科学学报, 2014, 32(4):331-340.
Wu Yiquan, Cao Pengxiang, Wang Kai, et al. Two-dimensional Arimoto gray entropy thresholding[J]. Journal of Applied Sciences, 2014, 32(4):331-340.
- [63] Doyle W. Operation useful for similarity-invariant pattern recognition[J]. Journal of the Association for Computing Machinery, 1962, 9(2):259-267.
- [64] Prewitt J M S, Mendelsohn M L. The analysis of cell images[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1966, 128:1035-1053.
- [65] Rosenfeld A, Torre P D L. Histogram concavity analysis as an aid in threshold selection[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1983, 13(2):231-135.
- [66] 吴一全, 潘喆, 吴文怡. 二维直方图区域斜的最大熵阈值分割算法[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 22(1):162-168.
Wu Yiquan, Pan Zhe, Wu Wenyi. Maximum entropy image thresholding based on two-dimensional histogram oblique segmentation[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2009, 22(1):162-168.
- [67] 范九伦, 雷博. 二维直线型最小误差阈值分割法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(8):1801-1806.
Fan Jiulun, Lei Bo. Two-dimensional linear-type minimum error threshold segmentation method[J]. Journal of Electronics

& Information Technology, 2009, 31(8):1801-1806.

- [68] 何志勇, 孙立宁, 黄伟国, 等. 基于 Otsu 准则和直线截距直方图的阈值分割[J]. 光学精密工程, 2012, 20(10):2315-2323.
He Zhiyong, Sun Lining, Huang Weiguo, et al. Thresholding segmentation algorithm based on Otsu criterion and line intercept histogram[J]. Optics and Precision Engineering, 2012, 20(10): 2315-2323.
- [69] 吴一全, 张金矿. 二维直方图 θ -划分最大平均离差阈值分割算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(5):634-643.
Wu Yiquan, Zhang Jinkuang. Image thresholding based on two-dimensional histogram θ -division and maximum between-cluster deviation criterion[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 634-643.
- [70] 吴一全, 张晓杰, 吴诗娟, 等. 二维直方图 θ -划分最小误差图像阈值分割[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(6):892-899.
Wu Yiquan, Zhang Xiaojie, Wu Shihua, et al. Image thresholding based on 2-D histogram θ -division and minimum error[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2012, 46(6):892-899.
- [71] 李森, 杨恢先, 张建波, 等. 改进二维直方图区域划分的阈值分割方法研究[J]. 光电子·激光, 2013, 24(7):1426-1433.
Li Miao, Yang Huixian, Zhang Jianbo, et al. Image thresholding segmentation research based on an improved region division of two-dimensional histogram[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2013, 24(7):1426-1433.
- [72] 张金矿, 吴一全. 改进的最小类内绝对差阈值分割及快速算法[J]. 信号处理, 2010, 26(4):552-557.
Zhang Jinkuang, Wu Yiquan. Image thresholding based on improved 2-D minimum within-cluster absolute difference method and its fast algorithm[J]. Signal Processing, 2010, 26(4):552-557.
- [73] Zhou M. Low SNR infrared weak target image segmentation algorithm[J]. Laser and Infrared, 2004, 34(3):225-228.
- [74] Pun T. A new method for gray-level picture threshold using the entropy of the histogram[J]. Signal Processing, 1998, 2: 223-237.
- [75] Pun T. Entropic thresholding: A new approach[J]. Computer, Graphics and Image Processing, 1981, 16:210-239.
- [76] 梅蓉, 姜长生, 陈谋. 基于遗传算法的二维最小交叉熵的动态图像分割[J]. 电光与控制, 2005, 12(1):30-34.
Mei Rong, Jiang Changsheng, Chen Mou. 2-D minimum cross entropy based on genetic algorithm for dynamic image segmentation[J]. Electronics Optics & Control, 2005, 12(1):30-34.
- [77] 吴一全, 纪守新. 灰度熵和混沌粒子群的图像多阈值选取[J]. 智能系统学报, 2010, 5(6):522-529.
Wu Yiquan, Ji Shouxin. Multi threshold selection for an image based on gray entropy and chaotic particle swarm optimization [J]. CAAI Transactions on Intelligence Systems, 2010, 5(6):522-529.
- [78] 吴一全, 周怀春, 纪守新. 基于二维灰度熵及混沌粒子群的图像阈值选取[J]. 北京理工大学学报, 2011, 31(12):1428-1434.
Wu Yiquan, Zhou Huaichun, Ji Shouxin. Image thresholding based on 2-dimensional gray entropy and chaotic particle swarm algorithm[J]. Transactions on Beijing Institute of Technology, 2011, 31(12):1428-1434.
- [79] Yen J C, Chang F J, Chang S. A new criterion for automatic multilevel thresholding[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(3):370-378.
- [80] Kurita T, Otsu N, Abdelmalek N. Maximum likelihood thresholding based on population mixture models[J]. Pattern Recognition, 1992, 25(11):1231-1240.
- [81] Pal N R, Pal S K. Image model, Poisson distribution and object extraction[J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1991, 5(3):459-483.
- [82] 高雁飞, 范九伦. 一种新的灰度图像阈值分割方法[J]. 西安邮电学院学报, 2002, 7(1):1-4.
Gao Yanfei, Fan Jiulun. A new thresholding method for grey image segmentation[J]. Journal of Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, 2002, 7(1):1-4.
- [83] 陈修桥, 胡以华, 黄友锐, 等. 二维最大相关准则图像阈值分割递推算法[J]. 计算机工程与应用, 2005, 32:91-93.
Chen Xiuyao, Hu Yihua, Huang Yourui, et al. Recursive algorithm of image thresholding based on two-dimensional MCC [J]. Computer Engineering and Applications, 2005, 32:91-93.
- [84] 范九伦, 雷博. 灰度图像最小误差阈值分割法的二维推广[J]. 自动化学报, 2009, 35(4):386-393.
Fan Jiulun, Lei Bo. Two-dimensional extension of minimum error threshold segmentation method for gray-level images[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(4):386-393.
- [85] Chanda B, Majumder D, Dutta R. A note on the use of gray level co-occurrence matrix in threshold selection[J]. Signal Processing, 1988, 15(2):149-167.
- [86] Pal S K, Pal N R. Segmentation based on measure of contrast, homogeneity and region size[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1987, 17(5):857-868.
- [87] 桑农, 张天序, 曹治国. 基于边缘约束的红外目标图像松弛分割技术[J]. 电子学报, 2002, 30(7):1027-1031.
Sang Nong, Zhang Tianxu, Cao Zhiguo. Segmentation of FLIR images with edge constraint[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(7):1027-1031.

- [88] 刘平,陈斌,阮波. 基于边缘信息的图像阈值化分割方法[J]. 计算机应用,2004,24(9):28-30.
Liu Ping, Chen Bin, Ruan Bo. Image thresholding segmentation based on edge information[J]. Computer Applications, 2004, 24(9): 28-30.
- [89] 杜奇,向健勇,袁胜春. 基于边缘强度的红外图像阈值分割方法研究[J]. 红外与激光工程,2004,33(3):288-291.
Du Qi, Xiang Jianyong, Yuan Shengchun. Study on thresholding segmentation for infrared image based on edge detection [J]. Infrared and Laser Engineering, 2004, 33(3):288-291.
- [90] Hertz L, Schafer R W. Multilevel thresholding using edge matching[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1988, 44(3):279-295.
- [91] Pal S K, King R A, Hashim A A. Automatic gray level thresholding through index of fuzziness and entropy[J]. Pattern Recognition Letters, 1983, 1(3):141-146.
- [92] Pal S K, Murthy C A. Fuzzy thresholding; mathematical framework bound functions and weighted moving average technique [J]. Pattern Recognition Letters, 1990, 11:197-206.
- [93] Huang L K, Wang M J. Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness[J]. Pattern Recognition, 1995, 28:41-51.
- [94] Tizhoosh H R. On thresholding and potentials of fuzzy techniques[J]. Informatik'98, 1998, 97-106. (in German)
- [95] 范九伦,赵凤. 基于 Sugeno 补的广义模糊熵阈值分割方法[J]. 电子与信息学报,2008,30(8):1865-1868.
Fan Jiulun, Zhao Feng. A generalized fuzzy entropy thresholding segmentation method based on the Sugeno complement operator[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(8): 1865-1868.
- [96] Pawlak Z. Rough sets; Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht, the Netherlands;Kluwer, 1991.
- [97] Sankar K P, Shankar B U, Pabitra M. Granular computing, rough entropy and object extraction[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(16):2509-2517.
- [98] Pattaraintakorn P, Cercone N. Integrating rough set theory and medical applications[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(4):400-403.
- [99] Malyszko D, Stepaniuk J. Adaptive multilevel rough entropy evolutionary thresholding[J]. Information Sciences, 2010, 180(7):1138-1158.
- [100] Malyszko D, Stepaniuk J. Adaptive rough entropy clustering algorithms in image segmentation[J]. Fundamenta Informati-
cae, 2010, 98(2-3):199-231.
- [101] 邓廷权,盛春冬. 结合变精度粗糙熵和遗传算法的图像阈值分割方法[J]. 控制与决策,2011,26(7):79-84.
Deng Tingquan, Sheng Chundong. Image threshold segmentation based on entropy of variable precision rough sets and ge-
netic algorithm[J]. Control and Decision, 2011, 26(7):79-84.
- [102] 吴涛. 图像阈值化的自适应粗糙熵方法[J]. 中国图象图形学报,2014,19(1):1-10.
Wu Tao. Adaptive rough entropy method for image thresholding[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(1):1-10.
- [103] 张干,吴成茂. 嵌入灰度级信息的粗糙模糊熵阈值分割法[J]. 计算机工程与设计,2014,35(2):541-545.
Zhang Gan, Wu Chengmao. Gray level information embedded rough-fuzzy entropy thresholding method[J]. Computer En-
gineering and Design, 2014, 35(2):541-545.
- [104] 邓廷权,焦颖颖. 基于 S-粗集的图像阈值分割方法[J]. 系统工程理论与实践,2013,33(9):2397-2403.
Deng Tingquan, Jiao Yingying. Thresholding image segmentation based on S-rough set[J]. Systems Engineering-Theory &
Practice, 2013, 33(9):2397-2403.
- [105] Pal N R, Pal S K. Entropic thresholding[J]. Signal Processing, 1989, 16(2):97-108.
- [106] 张晓杰,吴一全,吴诗娅. 基于分解的二维指数交叉熵图像阈值分割[J]. 信号处理,2011,27(4):546-551.
Zhang Xiaojie, Wu Yiquan, Wu Shihua. Two-dimensional exponential cross entropy image thresholding based on decompo-
sition[J]. Journal of Signal Processing, 2011, 27(4):546-551.
- [107] 陈涛,司锡才. 基于直方图的模糊最大指数熵图像分割方法[J]. 哈尔滨工程大学学报,2004,25(4):521-524.
Chen Tao, Si Xicai. Image segmentation by histogram using fuzzy maximum exponential entropy[J]. Journal of Harbin En-
gineering University, 2004, 25(4):521-524.
- [108] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics[J]. Journal of Statistical Physics,1988, 52:480-487.
- [109] Wong A K C, Sahoo P K. A gray-level threshold selection method based on maximum entropy principle[J]. IEEE Transac-
tions on Systems, Man and Cybernetics, 1989, 19(4): 866-871.
- [110] 唐英干,邸秋艳,关新平. 基于最小 Tsallis 交叉熵的阈值图像分割方法[J]. 仪器仪表学报,2008,29(9):1868-1872.
Tang Yinggan, Di Qiuyan, Guan Xinping. Method for thresholding image segmentation based on minimum Tsallis-cross en-
tropy[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008, 29(9):1868-1872.

- [111] Sahoo P K, Wilkins C, Yeager J. Threshold selection using Renyi's entropy[J]. *Pattern Recognition*, 1997, 30:71-84.
- [112] Sahoo P K, Arora G. A thresholding method based on two-dimensional Renyi's entropy[J]. *Pattern Recognition*, 2004, 37:1149-1161.
- [113] Wang S T, Chung F L. Note on the equivalence relationship between Renyi-entropy based and Tsallis-entropy based image thresholding[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26:2309-2312.
- [114] 张弘, 范九伦. 二维 Arimoto 熵直线型阈值分割法[J]. *光子学报*, 2013, 42(2):234-240.
Zhang Hong, Fan Jiulun. Two-dimensional Arimoto entropy linear-type threshold segmentation method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, 42(2):234-240.
- [115] 吴一全, 张金矿. 改进的 2 维 Otsu 法及混沌粒子群递推的阈值分割[J]. *中国图象图形学报*, 2009, 14(9):1843-1849.
Wu Yiquan, Zhang Jinkuang. Thresholding based on improved 2D Otsu method and chaotic particle swarm optimization[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2009, 14(9):1843-1849.
- [116] 吴一全, 吴文怡, 潘喆. 二维最大类间方差阈值分割的快速迭代算法[J]. *中国体视学与图像分析*, 2007, 12(3): 216-220.
Wu Yiquan, Wu Wenyi, Pan Zhe. A fast iterative algorithm for image segmentation based on 2D maximum between-cluster variance[J]. *Chinese Journal of Stereology and Image Analysis*, 2007, 12(3): 216-220.
- [117] 吴成茂, 田小平, 谭铁牛. 二维 Otsu 阈值法的快速迭代算法[J]. *模式识别与人工智能*, 2008, 21(6): 746-757.
Wu Chengmao, Tian Xiaoping, Tan Tieniu. Fast iterative algorithm for two-dimensional Otsu thresholding method[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2008, 21(6): 746-757.
- [118] 吴成茂, 田小平, 谭铁牛. 二维熵阈值法的修改及其快速迭代算法[J]. *模式识别与人工智能*, 2010, 23(1): 127-136.
Wu Chengmao, Tian Xiaoping, Tan Tieniu. Modification of two-dimensional entropy thresholding method and its fast iterative algorithm[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2010, 23(1): 127-136.
- [119] 吴一全, 樊军, 周怀春. 改进的二维最小交叉熵阈值分割快速迭代算法[J]. *应用科学学报*, 2011, 29(5): 487-494.
Wu Yiquan, Fan Jun, Zhou Huaichun. Fast iterative thresholding algorithm based on improved two-dimensional minimum cross entropy[J]. *Journal of Applied Sciences*, 2011, 29(5): 487-494.
- [120] 吴一全, 张晓杰, 吴诗娅. 基于混沌弹性粒子群优化与基于分解的二维交叉熵阈值分割[J]. *上海交通大学学报*, 2011, 45(3):301-307.
Wu Yiquan, Zhang Xiaojie, Wu Shihua. Two-dimensional cross entropy thresholding based on chaotic resilient particle swarm optimization or decomposition[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2011, 45(3):301-307.
- [121] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]//*Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. Perth: IEEE, 1995: 1942-1948.
- [122] Karaboga D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization[R]. *Kayseri: Engineering Faculty Computer Engineering Department, Erciyes University*, 2005.
- [123] Li Y X, Mao Z Y, Tian L F, et al. A kind of two-dimensional entropic image segmentation method based on artificial immune algorithm[C]// *Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian: IEEE, 2006, 10412-10415.
- [124] 马剑英, 张晓娜. 基于免疫遗传算法的图像多阈值分割[J]. *微计算机信息*, 2007, 23(1-3):309-311.
Ma Jianying, Zhang Xiaona. Immune genetic algorithm for multi-level threshold image segmentation[J]. *Microcomputer Information*, 2007, 23(1-3):309-311.
- [125] 罗艳辉, 邓飞其, 李彬. 基于人工免疫的烟草异物图像多阈值分割[J]. *计算机仿真*, 2009, 26(9):190-193.
Luo Yanhui, Deng Feiqi, Li Bin. Tobacco and foreign material image segmentation based on artificial immune algorithm[J]. *Computer Simulation*, 2009, 26(9):190-193.
- [126] Ye Z W, Li Q Y, Zeng M D, et al. Image segmentation using thresholding and artificial fish-swarm algorithm[C]// *International Conference on Computer Science and Service System*. Nanjing: IEEE, 2012:1529-1532.
- [127] 潘喆, 吴一全. 二维 Otsu 图像分割的人工鱼群算法[J]. *光学学报*, 2009, 29(8):2115-2121.
Pan Zhe, Wu Yiquan. The two-dimensional Otsu thresholding based on fish-swarm algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(8): 2115-2121.
- [128] 马苗, 梁建慧, 郭敏. 基于细菌觅食算法的 SAR 图像阈值分割[J]. *西安电子科技大学学报:自然科学版*, 2011, 38(6):152-158.
Ma Miao, Liang Jianhui, Guo Min. SAR image thresholding segmentation based on the bacteria foraging algorithm[J]. *Journal of Xidian University*, 2011, 38(6):152-158.
- [129] Horng M H, Liou R J. Multilevel minimum cross entropy threshold selection based on the firefly algorithm[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(12):14805-14811.
- [130] 陈恺, 陈芳, 戴敏, 等. 基于萤火虫算法的二维熵多阈值快速图像分割[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(2):517-523.

- Chen Kai, Chen Fang, Dai Min, et al. Fast image segmentation with multilevel threshold of two-dimensional entropy based on firefly algorithm[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(2): 517-523.
- [131] Liang Y C, Yin Y C. A new multilevel thresholding approach based on the ant colony system and the EM algorithm[J]. International Journal of Innovative Computing, Information & Control, 2013, 9(1):319-337.
- [132] 王爽,黄友锐,李冬. 基于蚁群算法的改进 Otsu 理论的图像多阈值分割[J]. 微计算机应用,2008,29(4):25-28.
Wang Shuang, Huang Yourui, Li Dong. Multilevel thresholding methods for image segmentation with improved-Otsu based on ant colony algorithm[J]. Microcomputer Applications, 2008, 29(4): 25-28.
- [133] Marciniak A, Kowal M, Filipczuk P. Swarm intelligence algorithms for multi-level image thresholding[C]// 11th International Conference on Diagnostics of Processes and Systems. Lagow Lubuski: Advances in Intelligent Systems and Computing, 2014, 230:301-311.
- [134] 马苗,刘艳丽. 图像分割背景下群体智能优化算法的性能对比[J]. 云南大学学报:自然科学版,2012,34(4):401-407.
Ma Miao, Liu Yanli. Performance comparisons of swarm intelligence optimization algorithms for image segmentation[J]. Journal of Yunnan University: 2012, 34(4):401-407.
- [135] 田亚菲,张范勇,阎石. 基于粒子群优化的细菌觅食优化算法[J]. 控制工程,2012,19(6):993-996.
Tian Yafei, Zhang Fanyong, Yan Shi. Bacteria foraging optimization algorithm based on particle swarm optimization[J]. Control Engineering of China, 2012, 19(6):993-996.
- [136] Yasnoff W A, Mui J K, Bacus J W. Error measures for scene segmentation[J]. Pattern Recognition, 1977, 9:217-231.
- [137] Sezgin M, Sankur B. Selection of thresholding methods for nondestructive testing applications[C]// Proceedings of International Conference on Image Processing. Thessaloniki: IEEE, 2001, 3:764-767.
- [138] Dubuisson M P, Jain A K. A modified Hausdorff distance for object matching[C]// Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition. Jerusalem: IEEE, 1994, 1:566-568.

作者简介:吴一全(1963-),男,教授,博士生导师,研究方向:图像处理,E-mail:nuaaimage@163.com;孟天亮(1990-),男,硕士研究生,研究方向:图像处理;吴诗嫻(1992-),女,硕士研究生,研究方向:图像处理。

