

文章编号:1004-9037(2014)06-0998-05

# 基于快速高斯变换的辅助边缘粒子滤波算法

李海君 赵国荣

(海军航空工程学院控制工程系,烟台,264001)

**摘要:**针对辅助粒子滤波算法计算量大,滤波效率较低的问题,提出了一种基于快速高斯变换(Fast Gaussian transform, FGT)的辅助边缘粒子滤波算法。该算法假设状态噪声是加性的,并且是高斯的,这样非线性滤波的Chapman-Kolmogorov方程的求解近似于执行了核密度估计(Kerner density estimation, KDE),从而可将KDE中的快速算法FGT引入,以提高算法的计算效率和实时性。仿真结果表明,该算法利用少数粒子就可以获得与常规粒子滤波相似的误差,大大提高了计算效率。

**关键词:**粒子滤波;辅助边缘粒子滤波;核密度估计;快速高斯变换

中图分类号:V249.3

文献标志码:A

## Auxiliary Marginal Particle Filter Algorithm Based on Fast Gaussian Transformation

Li Haijun, Zhao Guorong

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, 264001, China)

**Abstract:** According to large-calculation and lower-efficiency of the auxiliary particle filter, an auxiliary marginal particle filter algorithm is proposed based on fast Gaussian transform (FGT-AMPF). Assuming that the state noise is additive and Gaussian, the solution of Chapman-Kolmogorov equation (CKE) for nonlinear filtering, is similar to executing kernel density estimation (KDE). Then FGT of KDE is introduced to improve the calculation efficiency. The simulation results show that the calculation error obtained by the conventional particle can also be gotten by using a small number of particles, and the algorithm greatly improves the calculation efficiency.

**Key words:** particle filtering; auxiliary marginal particle filter; kernel density estimation; fast Gaussian transform

## 引 言

由于计算机计算能力的快速发展和计算成本的降低,粒子滤波(Particle filter, PF)<sup>[1]</sup>方法已经成为研究非线性、非高斯动态系统状态估计问题的有效方法。然而,常规的粒子滤波存在粒子退化、样本贫化以及计算量大等问题。针对这些问题,学者们提出了许多方法,如:辅助粒子滤波(Auxiliary particle filter, APF)<sup>[2]</sup>、似然粒子滤波(Likelihood particle filter, LPF)<sup>[3]</sup>、高斯粒子滤波<sup>[4]</sup>等。这些方法主要围绕重要性函数的选取和再采样进行改进和优化。近年来,对粒子滤波方法研究取得

了一些新的成果<sup>[5-9]</sup>。但这些算法主要是以改善建议分布和粒子的退化和贫化问题为目的,对计算量问题没有考虑,根据粒子滤波原理,要想达到理想的滤波精度,就需要大量的样本,这就使滤波算法的计算量增大。此外,各种改进步骤以及再采样算法也在一定程度上增加了整个算法的复杂性。

各种改进的粒子算法中,辅助边缘粒子滤波(Auxiliary marginal particle filter, AMPF)通过在边缘粒子滤波中引入一个辅助变量来设计建议分布,利用最新观测量来优化粒子的采样,使其从高似然区域采样粒子,从而表现出较高的精度。但多次迭代加权的计算量非常大且优化速度较慢,这使得该方法在实际应用中受到了很大的限制。为此,

本文以 AMPF 为基础,将核密度估计(Kerner density estimation, KDE)的快速高斯变换(Fast Gaussian transform, FGT)算法引入滤波算法中,提出一种基于快速高斯变换的辅助边缘粒子滤波方法。该算法在保证辅助边缘粒子滤波精度的情况下,有效地改善了算法的计算量。

## 1 辅助边缘粒子滤波

边缘粒子滤波(Marginal particle filter, MPF)是直接边缘分布  $p(x_t | y_{1:t})$  上进行粒子滤波。预测密度由式(1)获得

$$p(x_t | y_{1:t-1}) = \int p(x_t | x_{t-1}) p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) dx_{t-1} \quad (1)$$

因此,滤波更新变为

$$p(x_t | y_{1:t}) \propto p(y_t | x_t) p(x_t | y_{1:t-1}) = p(y_t | x_t) \int p(x_t | x_{t-1}) p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) dx_{t-1} \quad (2)$$

选择的建议分布有

$$q(x_t | y_{1:t}) = \sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} q(x_t | y_t, x_{t-1}^{(j)}) \quad (3)$$

此刻在边缘空间上的重要性权值为

$$w_t = \frac{p(x_t | y_{1:t})}{q(x_t | y_{1:t})} \quad (4)$$

Pitt 和 Shepard<sup>[10]</sup>提出辅助粒子滤波算法,用来改善在似然尖锐模型上序贯 Monte Carlo 的性能。当似然窄小时,选择的建议分布采样粒子应在观测模型的高概率区。辅助粒子滤波依靠在  $t-1$  时刻粒子的再加权来在这些区域增强它们。从下面目标分布采样

$$\hat{p}(x_t | y_{1:t}) \propto p(y_t | x_t) \sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} p(x_t | x_{t-1}^{(j)}) = \sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} p(y_t | x_{t-1}^{(j)}) p(x_t | x_{t-1}^{(j)}, y_t) \quad (5)$$

辅助粒子滤波使用下面的联合分布

$$\hat{p}(k, x_t | y_{1:t}) \propto w_{t-1}^{(k)} p(y_t | x_{t-1}^{(k)}) p(x_t | x_{t-1}^{(k)}, y_t) \quad (6)$$

$k$  为辅助变量,有

$$\hat{p}(k | y_{1:t}) \propto w_{t-1}^{(k)} p(y_t | x_{t-1}^{(k)}) = w_{t-1}^{(k)} \int p(y_t | x_t) p(x_t | x_{t-1}^{(k)}) dx_t \quad (7)$$

由于很难精确求解方程(7),通常用采样加权来近似。对于在时间  $t-1$  上的每个索引  $k$ ,选择  $\mu_t^{(k)}$  关联,在某些确定方式上有分布  $p(x_t | x_{t-1}^{(k)}) (\mu_t^{(k)})$  可

为期望值)。索引  $k$  定义模拟权值为

$$\lambda_{t-1}^{(k)} \triangleq \frac{w_{t-1}^{(k)} p(y_t | \mu_t^{(k)})}{\sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} p(y_t | \mu_t^{(j)})} \quad (8)$$

利用这些权值,辅助粒子滤波定义了下面的联合建议分布

$$q(k, x_t | y_{1:t}) = q(k | y_{1:t}) q(x_t | y_{1:t}, k) \quad (9)$$

其中

$$q(k | y_{1:t}) = \lambda_{t-1}^{(k)} \\ q(x_t | y_{1:t}, k) = q(x_t | x_{t-1}^{(k)}, y_t) \quad (10)$$

重要性权值为

$$w(k, x_t) = \frac{\hat{p}(k, x_t | y_{1:t})}{q(k, x_t | y_{1:t})} \propto \frac{w_{t-1}^{(k)} p(y_t | x_{t-1}^{(k)}) p(x_t | x_{t-1}^{(k)}, y_t)}{\lambda_{t-1}^{(k)} q(x_t | x_{t-1}^{(k)}, y_t)} \quad (11)$$

在边缘粒子滤波中,使用相同的重要性分布,但不是执行  $\hat{p}(k, x_t | y_{1:t})$  和  $q(k, x_t | y_{1:t})$  之间重要性采样,而是直接在  $\hat{p}(x_t | y_{1:t})$  和  $q(x_t | y_{1:t})$  之间进行重要性采样以计算权值

$$w(x_t) = \frac{\hat{p}(x_t | y_{1:t})}{q(x_t | y_{1:t})} \propto \frac{\sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} p(y_t | x_{t-1}^{(j)}) p(x_t | x_{t-1}^{(j)}, y_t)}{\sum_{j=1}^N \lambda_{t-1}^{(j)} q(x_t | x_{t-1}^{(j)}, y_t)} \quad (12)$$

这就产生了辅助边缘粒子滤波描述如下:

(1) 对于  $i=1, \dots, N$ , 选择模拟  $\mu_t^{(i)}$  并计算混合权值

$$\mu_t^{(i)} \leftarrow_d p(x_t | x_{t-1}^{(i)}) \\ \tilde{\lambda}_{t-1}^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} p(y_t | \mu_t^{(i)}) \\ \lambda_{t-1}^{(i)} = \frac{\tilde{\lambda}_{t-1}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \tilde{\lambda}_{t-1}^{(j)}}$$

(2) 对于  $i=1, \dots, N$ , 从下面分布采样

$$x_t^{(i)} \sim \sum_{j=1}^N \lambda_{t-1}^{(j)} q(x_t | y_t, x_{t-1}^{(j)})$$

(3) 对于  $i=1, \dots, N$ , 计算重要性权值

$$\tilde{w}_t^{(i)} = \frac{p(y_t | x_t^{(i)}) \sum_{j=1}^N w_{t-1}^{(j)} p(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(j)})}{\sum_{j=1}^N \lambda_{t-1}^{(j)} q(x_t^{(i)} | y_t, x_{t-1}^{(j)})}$$

(4) 标准化重要性权值

$$w_t^{(i)} = \frac{\tilde{w}_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}_t^{(j)}}$$

式中:符号  $\leftarrow_d$  表示从分布可能值确定性的选择,如平均或密度模型。

## 2 基于快速高斯变换的辅助边缘粒子滤波

核密度估计是从样本集  $\{s_j\}_{j=1}^N$  来确定非参数概率密度函数的方法。在任意一点  $t$  处的核密度

估计为

$$G(t) \triangleq \sum_{j=1}^N q_j K\left(\frac{t-s_j}{h}\right) \quad (13)$$

式中:  $K(\cdot)$  是窗宽为  $h$  的核函数,  $s_j \in \mathbf{R}^D$  是样本点,  $q_j \in \mathbf{R}$  是权值,  $D$  表示维数。核函数是一种权函数, 它利用点  $s_j$  到点  $t$  的距离来决定点  $s_j$  在估计点  $t$  的密度时所起的贡献。当  $s_j$  离点  $t$  越近, 则权重越大, 即对后验概率密度估计贡献也越大, 否则反之。

快速高斯变换 (Fast Gaussian transform, FGT) 是由 Greengard 和 Strain<sup>[11]</sup> 提出的一种用来快速计算高斯核函数的技术。Mittelman 和 Miller<sup>[12]</sup> 对 FGT 进行了改进, 提出了改进的快速高斯变换算法, 本文将运用文献[12]的方法对 AMPF 进行快速计算。

考虑文献[16]中的核函数是高斯核函数

$$G(t) = \kappa \sum_{j=1}^N q_j e^{-\|t-s_j\|^2/2\sigma^2} \quad (14)$$

式中:  $\sigma^2$  表示高斯核方差,  $\kappa^{-1} = (2\pi\sigma^2)^{D/2}$ 。对高斯核函数围绕点  $s^* \in \mathbf{R}^D$  进行如下展开

$$e^{-\|t-s\|^2/2\sigma^2} = e^{(-\|\Delta t\|^2 - \|\Delta s\|^2 + 2\Delta t^T \Delta s)/2\sigma^2} = e^{-\frac{\|\Delta t\|^2 + \|\Delta s\|^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left(\frac{\Delta t \Delta s}{2\sigma^2}\right)^n \quad (15)$$

式中:  $t, s \in \mathbf{R}^D$ ,  $\Delta t = t - s^*$ ,  $\Delta s = s - s^*$ , 式(15)是对截断项指数的泰勒级数展开得到。式(3)截断  $p$  项后, 并代入式(14)得到

$$G(t) = \kappa e^{-\|\Delta t\|^2/2\sigma^2} \cdot \sum_{|\alpha| < p} \tilde{A}_\alpha \left(\frac{\Delta t}{\sigma}\right)^\alpha + \mathbf{E}^T \quad (16)$$

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j \left(\frac{\Delta s_j}{\sigma}\right)^\alpha \quad (17)$$

其中  $\tilde{q}_j = q_j e^{-\|\Delta s_j\|^2/2\sigma^2}$ 。

**定理 1** 式(16)的  $p$  阶截断误差  $\mathbf{E}_T$  满足

$$|\mathbf{E}_T| \leq \kappa \max_{\|\tau\| > 0} e^{-\|\tau\|^2/2} \Theta_1(\|\tau\|) \quad (18)$$

其中

$$\Theta_1(\|\tau\|) = \sum_{j=1}^N |q_j| e^{-\|\xi_j\|^2/2 + \|\xi_j\| \|\tau\|} - \sum_{n=0}^{p-1} d_n \|\tau\|^n \quad (19)$$

$$d_n = \sum_{j=1}^N \frac{1}{n!} |q_j| e^{-\|\xi_j\|^2/2} \|\xi_j\|^n \quad (23)$$

式中  $\xi_j = \Delta s_j/\sigma$ ,  $\tau = \Delta t/\sigma$ 。此外, 通过搜索  $\|\tau\|$  可得到式(18)的全局最大, 并且随截断阶次  $p$  的增大而上界减少。

**定理 2** 令  $N_B$  个权值  $\{q_j\}_{j=1}^{N_B}$  的点处在半径为  $r_0\sigma$  的球内, 则式(16)中的  $p$  阶截断误差  $\mathbf{E}_T$  满

足界限

$$|\mathbf{E}_T| \leq \mathbf{Q}_B \mathbf{E}_p^{GT_2}(r_0) \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{E}_p^{GT_2}(r_0) = \kappa \max_{\|\tau\| > 0} e^{-\|\tau\|^2/2} \Theta_2(\|\tau\|, r_0) \quad (22)$$

而且式(21)中全局最大可通过进行线性搜索  $\|\tau\|$  查找, 并随截断阶次  $p$  的增大而上界减少。

快速高斯变换算法:

- (1) 聚类所有源点到半径为  $r_0\sigma$  的球;
- (2) 利用式(17)对每个聚类计算 FGT 系数;
- (3) 对于每个样本点, 计算样本点为中心半径为  $(n+r_0)\sigma$  的所有聚类式(16)的值。

AMPF 可从建议分布获得采样来近似后验分布。后验分布可以等价写为

$$\hat{p}(x_k | z_{1:k}) \propto p(z_k | x_k) \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} p(x_k | x_{k-1}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} p(z_k | x_{k-1}^{(i)}) p(x_k | x_{k-1}^{(i)}, z_k) = \sum_{i=1}^N p(i | z_{1:k}) p(x_k | x_{k-1}^{(i)}, z_k) \quad (23)$$

$$p(i | z_{1:k}) \propto w_{k-1}^{(i)} p(z_k | x_{k-1}^{(i)}) = w_{k-1}^{(i)} \int p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}^{(i)}) dx_k \quad (24)$$

利用式(23)可以从建议分布  $\hat{p}(x_k | z_{1:k})$  采样,  $i$  为  $\hat{p}(i | z_{1:k})$  的辅助变量, 于是从  $p(x_k | x_{k-1}^{(i)}, z_k)$  采样  $x_k$ 。由于式(24)通常不能求解分析, 本文用  $p(i | z_{1:k}) \propto w_{k-1}^{(i)} p(z_k | \mu^k)$  来近似, 其中  $\mu^k = E[x_k | x_{k-1}^{(i)}]$ 。此外, 由于从  $p(x_k | x_{k-1}^{(i)}, z)$  采样有时不可行, 于是从  $p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$  采样代替, 为了采样容易, 考虑  $p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$  是高斯分布。所以 AMPF 的建议分布为

$$\pi(x_k | z_{1:k}) \propto \sum_{i=1}^N \hat{p}(i | z_{1:k}) p(x_k | x_{k-1}^{(i)}) \quad (25)$$

式(24)用重要性采样来近似, 对于每个  $i$ , 从  $p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$  取  $m$  样本  $\{\tilde{x}_k^{(n)}\}_{n=1}^m$ , 并利用式(26)近似式(24)

$$\hat{p}(i | z_{1:k}) \propto w_{k-1}^{(i)} \sum_{n=1}^m p(z_k | \tilde{x}_k^{(n)}) \quad (26)$$

从建议  $\pi(x_k | z_{1:k})$  采样的进行类似于 AMPF 利用式(25)的情形。

由于引入最近测量  $z_k$  来用于在后验的  $\hat{p}(x_k | z_{1:k})$  高概率区进行取样, 从而增加了计算量。本文将利用 FGT 使计算复杂度减少。

本文考虑的情况是非线性系统中状态噪声是零均值高斯的, 协方差矩阵为  $\Sigma$ 。因子分解  $\Sigma, \Sigma = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}$ , 则有

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \kappa \sum_{i=1}^N \omega_{k-1}^{(i)} e^{-\|\mathbf{v}_k - \mathbf{s}_{k-1}^{(i)}\|^2/2} \quad (27)$$

式中  $\mathbf{v}_k = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{V} \mathbf{x}_k$ , 及  $\mathbf{s}_k^{(i)} = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{V} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(i)})$ ,  $\mathbf{v}_k$  和  $\mathbf{s}_k^{(i)}$  分别是目标和源点。因此,式(27)可利用 FGT 近似。

### 3 仿真分析

为了验证算法的有效性,用两个实验进行验证。

**实验 1** 采用文献[3]中一维状态空间模型来扩展四维状态空间模型

$$x_{t+1}^{(d)} = \frac{x_t^{(u_1(d))}}{2} + 25 \frac{x_t^{(u_2(d))}}{1 + (x_t^{(u_2(d))})^2} + 8\cos(1.2t) + \omega_t^{(d)} \quad (28)$$

$$y_t^{(d)} = \frac{(x_t^{(d)})}{20} + v_t^{(d)} \quad (29)$$

式中:  $d=1, \dots, 4, \mathbf{u}_1=[2, 4, 1, 3], \mathbf{u}_2=[3, 4, 1, 2], \omega_t^{(d)} \sim N(0, 10), v_t^{(d)} \sim N(0, 1), x_0^{(d)} \sim N(0, 5)$ 。每次实验有 200 时间步。在高斯变换中使用  $n=4, r_0=3, p=5$ 。表 1 给出了不同算法下均方根误差、计时和采样数的结果。由结果可见提出 FGT-AMPF 算法在误差不增大的情况下大大提高了滤波效率。

表 1 不同算法下均方根误差、计时及采样数对比

Table 1 RMSE time and sampling number contrast

滤波算法	RMSE	时间/s	采样数
PF	6.2	46.2	1 000
UPF	5.9	12.3	500
AMPF	5.6	14.5	500
FGT-AMPF	5.5	3.8	500

**实验 2** 将新的非线性滤波算法应用到二维空间目标跟踪中。与目标运动有关的参数为该目标的运动坐标  $x$  和  $y$ , 以及沿着坐标轴分解得到的在  $X$  轴和  $Y$  轴方向的目标运行速度  $\dot{x}$  和  $\dot{y}$ , 它们共同组成系统的状态变量  $\mathbf{x}(k) = (x, \dot{x}, y, \dot{y})_k^T$ 。目标的起始位置服从均值为  $\bar{\mathbf{x}}(0)$  方差为  $\mathbf{c}(0)$  的高斯分布, 其中  $\bar{\mathbf{x}}(0) = (5, 0.5, 5, -0.5)^T, \mathbf{c}(0) = \text{diag}(1, 0.1, 1, 0.1)$  目标运动的状态转移方程为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi \mathbf{x}(k-1) + \Gamma \mathbf{w}(k) \quad (30)$$

$$\text{式中 } \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

$\mathbf{w}(k) = (\omega_x, \omega_y)_k^T$  是均值为 0 方差为  $\mathbf{Q} = q^2 \mathbf{I}_2$  的

高斯噪声,  $q=0.002, \mathbf{I}_2$  是一个  $2 \times 2$  的单位矩阵, 观测方程为

$$\mathbf{z}(k) = \Psi \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (31)$$

式中: 观测方程  $\Psi$  为角度信息, 观测噪声  $\mathbf{v}(k)$  是均值为 0 方差为  $\mathbf{R} = r^2 \mathbf{I}_2$  的高斯噪声, 其中  $r=0.05$ 。观测噪声和状态噪声相互独立且不相关。假设目标运动的起始位置的真值为  $\mathbf{x}(0) = (5, 3, 0.43, 4.5, -0.52)^T$ 。在实验中, 进行 50 次观测, 时间间隔为 1 s, 分别采用标准 PF, AMPF 及 FGT-AMPF 对目标进行跟踪, 其中 PF 采用 200 个粒子, AMPF 采用 100 个粒子迭代 3 次, FGT-AMPF 采用 50 个粒子, 进行 100 次蒙特卡洛实验。

图 1, 2 分别为目标在  $X$  方向和  $Y$  方向的位置估计平均误差。从图中可以看到 AMPF 和 FGT-AMPF 跟踪结果优于标准的粒子滤波。而本文提出的 FGT-AMPF 仅使用 AMPF 一半的粒子数目就可以达到比较好的跟踪效果, 这主要得益于所采用的快速高斯变换可以在不降低精度的情况下, 大大提高滤波效率, 且有较快的收敛速度。

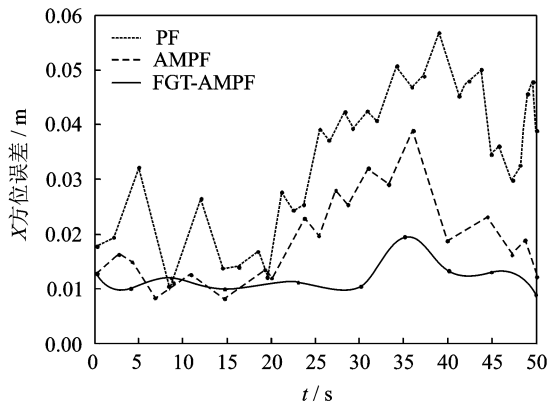


图 1 各种不同方法的 X 坐标跟踪误差  
Fig. 1 Tracking error of different methods on X coordinate

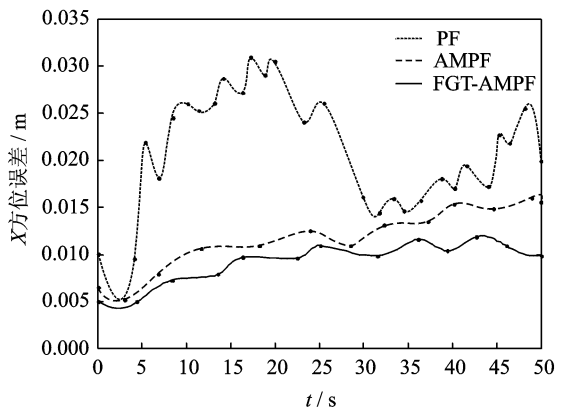


图 2 各种不同方法的 Y 坐标跟踪误差  
Fig. 2 Tracking error of different methods on Y coordinate

## 4 结束语

粒子滤波改进算法的研究已经成为了各领域研究的热点问题,针对不同的应用环境,各种改进方法各有利弊,但普遍存在一个问题:如何权衡滤波精度与计算复杂度。为此,本文从计算复杂度出发,研究了一种滤波精度在一定要求下减少计算复杂度的方法,为粒子滤波的应用提供了有益的参考。

### 参考文献:

- [1] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to non-linear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation, 1993,140(2):107-113.
- [2] Smith L, Aitken V. Auxiliary extended and auxiliary unscented Kalman particle filters[J]. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 2007,32(3):1626-1630.
- [3] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002,50(2):174-188.
- [4] 王宁,王从庆.高斯粒子滤波器及其在非线性的估计中的应用[J].南京航空航天大学学报,2006,38(S1):132-135.  
Wang Ning, Wang Congqing. Gaussian particle filter and its application to nonlinear system estimation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006,38(S1):132-135.
- [5] 胡振涛,潘泉,梁彦,等.基于进化采样的粒子滤波算法[J].控制理论与应用,2009,26(3):269-273.  
Hu Zhentao, Pan Quan, Liang Yan, et al. The particle filter algorithm based on evolution sampling[J]. Control Theory & Applications, 2009,26(3):269-273.
- [6] 刘先省,胡振涛,金勇,等.基于粒子优化的多模型粒子滤波算法[J].电子学报,2010,38(2):301-305.

Liu Xiansheng, Hu Zhentao, Jin Yong, et al. A novel multiple model particle filter algorithm based on particle optimization[J]. ACTA Electronica Sinica, 2010,38(2):301-305.

- [7] 田隽,钱建生,李世银.基于分层转移的粒子滤波MCMC重采样算法[J].控制与决策,2011,26(8):1253-1258.  
Tian Jun, Qian Jiansheng, Li Shiyin. Resampling algorithm for particle filter based on layered transacting MCMC[J]. Control and Decision, 2011,26(8):1253-1258.
- [8] 赵义正.基于粒子筛选处理的粒子滤波改进算法[J].数据采集与处理,2013,28(3):342-346.  
Zhao Yizheng. Improved particle filter based on new particle selection and process strategy[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2013,28(3):342-346.
- [9] 王尔申,蔡明,庞涛.MCMC粒子滤波的GPS定位数据处理算法[J].数据采集与处理,2013,28(2):213-218.  
Wang Ershen, Cai Ming, Pang Tao. GPS positioning data processing algorithm based on MCMC particle filter[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2013,28(2):213-218.
- [10] Pitt M K, Shephard N. Filtering via simulation: auxiliary particle filters[J]. JASA, 1999,94(446):590-599.
- [11] Greengard L, Strain J. The fast Gauss transform[J]. SIAM J Sei Comput, 1991(2):79-94.
- [12] Mittelman R, Miller E L. Nonlinear filtering using a new proposal distribution and the improved fast Gauss transform with tighter performance bounds[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008,56(12):5751-5752.

作者简介:李海君(1978-),男,博士研究生,研究方向:卫星定位与组合导航, E-mail: 16529531@qq.com; 赵国荣(1963-),男,教授,博士生导师,研究方向:导航制导与控制。