

文章编号:1004-9037(2014)05-0777-06

## 航空电磁响应数据的矩阵束法重构

尹大伟<sup>1,2</sup> 林 君<sup>1</sup> 朱凯光<sup>1</sup>

(1. 吉林大学仪器科学与电气工程学院, 长春, 130021; 2. 空军航空大学系统教研室, 长春, 130022)

**摘要:**时间域航空电磁探测研究中得到的海量电磁响应数据呈现出“衰减指数和”的变化趋势。针对该变化特点,采用了矩阵束法从响应数据中提取极点等特征量,并完成了数据的降秩、重构处理。算法分析和实测结果表明:无噪声干扰时,该算法表现出了较好的重构精度;加噪后,在较大信噪比变化范围内,重构精度呈现了较小的波动,体现了该算法较高的抗噪性和稳定性。因此,该算法适合应用于航空电磁响应数据分析中。

**关键词:**航空电磁响应数据;衰减指数和;矩阵束法;重构

中图分类号:P631.326

文献标志码:A

## Reconstruction of Matrix Pencil Method on Aviation Electromagnetic Response Data

Yin Dawei<sup>1,2</sup>, Lin Jun<sup>1</sup>, Zhu Kaiguang<sup>1</sup>

(1. College of Instrumentation & Electrical Engineering, Jilin University, Changchun, 130021, China;

2. System Staff Room, Aviation University of Air Force, Changchun, 130022, China)

**Abstract:** There is a changing trend of attenuation exponential summation in a great capacity of electromagnetic response data in the research of time-domain aviation electromagnetic exploration. According to the changing situation, characteristic parameters as poles are extracted from response data by matrix pencil method, and then the response data are dealt with reducing rank and reconstruction. Algorithm analysis and practical testing result prove that better reconstruction precision by matrix pencil method is presented in the condition of non-noise interference, and adding noise interference, a little fluctuation of precision emerges with in a big variable extent of signal-to-noise rate which reflect the abilities of resisting noise and stable performance. Therefore, the proposed matrix pencil method is applicable to the analysis of aviation electromagnetic response data.

**Key words:** aviation electromagnetic response data; attenuation exponential summation; matrix pencil method; reconstruction

## 引 言

航空电磁法是用来快速普查良导电金属矿的航空物探方法。它通过研究由人工或天然形成的电磁场对地质体感应激发产生的异常场特征和规律(即应用交变电磁场的感应原理)来寻找矿体或解决某些地质问题。自20世纪40年代至今,依照该方法发展而来的航空电磁探测技术已经得到了很大提升,探测仪器也由初期针对环境工程、地下

水探测而设计的频率域电磁法系统,发展到今天可实施深层找矿的时间域电磁法系统<sup>[1-2]</sup>。

电磁探测问题的研究过程中,为了提取出信号的极点信息,常用一组复指数信号之和的形式来拟合抽样信号,称之为“衰减指数和”信号模型。在对时间域电磁数据解析过程中,由于电磁探测仪器工作特点,大地形成的二次场衰减信号可由“衰减指数和”的信号模型来描述。该模型可直观地反映信号的幅度、相位、极点等特征参量,并依靠极点等特征参量信息进一步判断目标地质体的几何属性及

其物性。

文献[3]最早提出了信号极点的估计方法,采用最小二乘 Prony 方法提取雷达目标的极点,该方法仅对无噪声信号有效;文献[4]在 Prony 方法中引入额外极点和奇异值分解,提高了算法的抗噪性,称之为 SVD-Prony 方法。尽管 SVD-Prony 方法具有一定的抗噪性,但是,其建立在多项式求解基础上,求解过程受到采样数量限制,当信噪比低于 20 dB 后特征参量提取能力将大幅度下降,不适用于复杂电磁环境下信号极点的提取。矩阵束法(Matrix pencil method, MPM)是另一种求解极点等特征参量的经典数值解法,高效、实时、低方差等特点使其在众多领域中得到广泛应用<sup>[5-7]</sup>。矩阵束法可实现时域数据至  $\tau$  域的转换,利用  $\tau$  域中电磁数据不随发射波形改变而变化的特性,减小电磁响应受外在干扰的影响,极大地压缩数据量并提高运算速度<sup>[8-9]</sup>。本文研究对象为复杂电磁环境下的航空电磁响应数据,经分析比较,拟采用矩阵束法提取极点等特征参量,并依此对航空电磁响应数据进行重构;同时,针对无噪声与含噪声等不同信号环境特点,对比分析噪声因素对矩阵束法特征参量提取的影响程度,为后续的大地模型反演等理论分析奠定良好的基础。

## 1 算法解析

矩阵束法的基本思想是根据已测数据构造两个特殊的数据矩阵,根据数据矩阵间的关系求解它们的广义特征值,广义特征值包含了所求解的信息(信号的极点),因此,求解衰减指数信号极点问题转化为求解矩阵束的广义特征值问题。

假设已知抽样后的实测电磁数据

$$y(k\delta t) \approx \sum_{i=1}^M R_i z_i^k + n(k\delta t) \quad (1)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

式中: $y(k\delta t)$ 为实测电磁响应数据, $n(k\delta t)$ 为数据中混杂的噪声, $R_i$ 为留数, $z_i$ 为极点, $M$ 为极点个数。

根据实测数据  $y(k\delta t)$ ,可构建两个  $(N-L) \times L$  矩阵  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L-1) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & \cdots & y(N-2) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L}$$

$$\mathbf{Y}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(L) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-L) & y(N-L+1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times L} \quad (2)$$

式中: $L$ 被称为束参数,取值范围为  $N/3 < L < N/2$ ,恰当地选择  $L$  值将对消除数据中的噪声具有非常重要的作用。

观察式(2)矩阵的结构特点,可对其实施进一步分解,得  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{R} \mathbf{Z}_2$  和  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{R} \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_2$ ,而

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(N-L-1)} & z_2^{(N-L-1)} & \cdots & z_M^{(N-L-1)} \end{bmatrix}_{(N-L) \times M}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{L-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{L-1} \end{bmatrix}_{M \times L}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \text{diag}[z_1, z_2, \dots, z_M]$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_M]$$

式中: $\text{diag}[\cdot]$ 表示  $M \times M$  对角阵。

基于  $\mathbf{Y}_1$  与  $\mathbf{Y}_2$  的分解可看出,如果  $M \leq L \leq N-M$ ,则极点  $z_i$  即是秩为  $M$  的矩阵束  $\mathbf{Y}_2 - \lambda \mathbf{Y}_1$  的广义特征值,亦即求解极点的问题可转化为求解矩阵束  $\mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_2 - \lambda \mathbf{I}$  的经典特征值问题。此处  $\mathbf{Y}_1^+$  为  $\mathbf{Y}_1$  的广义伪逆, $\mathbf{I}$  为  $M \times M$  的单位阵。

至此,若实测数据为无噪声信号,则对应秩  $M$  的各个极点信息  $z_i$  将被提取出来;若实测数据为含噪声信号,还应继续进一步的分析。

通过将  $\mathbf{Y}_1$  与  $\mathbf{Y}_2$  组合,可构建一个  $(N-L) \times (L+1)$  的 Hankel 矩阵

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (3)$$

随后,对该矩阵进行奇异值分解<sup>[10-11]</sup>,即

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (4)$$

式中: $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  是单位矩阵,上标 T 表示矩阵  $\mathbf{V}$  的共轭转置, $\mathbf{\Sigma}$  是由  $\mathbf{Y}$  的奇异值构成的对角矩阵,对角矩阵上各值对应  $\mathbf{Y}$  的各奇异值点。式(4)经过适当变换,可得到包含奇异值信息的对角矩阵式(5)。

$$\mathbf{U}^T \mathbf{Y} \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma} \quad (5)$$

此时,对于实测数据为含噪声信号的情况,可采用判断奇异值阈值的方法来确定极点个数  $M$  的值。由于奇异值分解后对角矩阵奇异值按照从大到小顺序排列,可通过设定判别精度,比较每个奇异值和最大奇异值的比值(例  $\sigma_s/\sigma_{\max} \approx 10^{-4}$ ),低于阈值的奇异值在噪声干扰下会发生变异而丧失其特征成分,所以在进行数据重构时应当忽略。

确定  $M$  后,滤波矩阵  $\mathbf{V}$  将蜕化为只包含  $M$  个主奇异向量的新矩阵  $\mathbf{V}'$ ,而根据此变化可将矩阵  $\mathbf{Y}_1$  和  $\mathbf{Y}_2$  重新构建,得  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}'\mathbf{V}_1^T$  与  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}'\mathbf{V}_2^T$ ,  $\mathbf{V}_1$  与  $\mathbf{V}_2$  是由  $\mathbf{V}'$  分别删除最后一行与第一行得到的,  $\mathbf{\Sigma}'$  由对应  $M$  个主奇异值的  $\mathbf{\Sigma}$  的  $M$  列组成。

至此可见,矩阵束  $\mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_2 - \lambda \mathbf{I}$  等价于  $[\mathbf{V}_1^T]^+ [\mathbf{V}_2^T]^+ - \lambda \mathbf{I}$ ,即可采用经典特征值方法求得含噪声信号的极点信息  $z_i$  值。

求得  $M$  和  $z_i$  后,可利用最小二乘法求取留数  $R_i$  如下

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_M \end{bmatrix} \quad (6)$$

综上所述,矩阵束法实现过程可概括为:电磁数据抽样离散化,构造 Hankel 矩阵、降秩、确定极点个数与数值,最小二乘法获取留数等系列数值运算。

## 2 算例分析

基于吉林大学自行研制的航电数据采集系统 HTEM 获得所需电磁响应数据。该系统由发射机、接收机及同轴收发线圈组成,发射电流 100~300 A,发射周期 20 ms,发射线圈直径 15 m,接收线圈直径 1.2 m,发射波形为阶跃波。

### 2.1 理想无噪声航空电磁响应数据分析

在理想无噪声环境下,对所获得航空电磁响应数据分析处理重构,结果如图 1 所示。随着曲线重构所用极点数的变化,其对应的重构曲线拟合精度差异较大,由  $M=3$  过渡至  $M=8$  过程中,重构曲线拟合精度逐渐提高, $M=8$  时重构曲线与原始曲线基本重合。

算法分析表明,矩阵束法处理理想无噪声数据时,求解矩阵束  $\mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_2 - \lambda \mathbf{I}$  的经典特征值将得到  $M$  个  $z_i$  极点,随后可求取相应的留数。由于每对获取的极点与留数均不同程度地反映着电磁响应数据的特征信息,因此,过少的极点与留数仅能表现

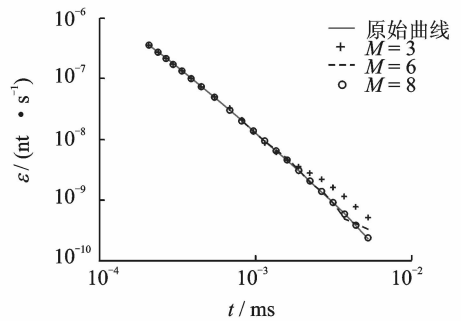


图 1 理想无噪声环境下原始曲线与重构后曲线对比  
Fig. 1 Comparison between original curve and reconstruction curve in ideal non-noise circumstance

出原始数据的部分特征,这也是  $M=3$  时重构曲线拟合精度差的原因。为了保证较好地重构拟合效果,对于本文所用的采样总数为 21 的电磁响应数据,8 对极点与留数特征参量的选择是理想的。

此外,为了更清晰地观察重构曲线精度与特征参量个数之间的对应关系,分析了不同极点数下重构曲线与原始曲线之间均方根误差变化情况,如图 2 所示。特征参量信息并非随极点数增加而不断地提供更高的拟合精度贡献, $M=6$  的均方根误差 (5.42%) 要稍好于  $M=7$  的均方根误差 (11.51%)。

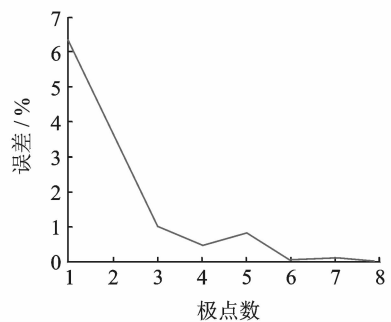


图 2 对应不同极点数的重构曲线与原始曲线间均方根误差

Fig. 2 Root mean square error corresponding to different pole number between reconstruction curve and original curve

理想无噪声环境下,通过选取恰当的极点数,矩阵束法能够实现对原始数据曲线的精确重构,这也进一步证明了极点等特征参量能够真实地描述外在电磁场激励下地下地质体的固有属性。而且,在所要求的重构精度范围内,可采用与均方根误差相结合的方式,共同判定所需极点数等特征参量数量。

## 2.2 实际含噪声航空电磁响应数据分析

现实世界中,由于复杂电磁环境的影响,采集的航空电磁响应数据必然包含有各种形式的噪声,因此,是否能够保证提取的特征参量不受噪声干扰,并可依此开展后续分析成为检验所用算法优劣的重要依据<sup>[12-15]</sup>。

对本文采用的理想航空电磁响应数据加入均值为 0 的高斯白噪声,在多个信噪比条件下检验矩阵束法去噪重构能力。图 3(a~d)显示出矩阵束法对噪声干扰较强的抵抗力。信噪比在 30 dB 时其均方根误差为 0.41%,即使信噪比降至 0 dB 时,其均方根误差仍然控制在 7.8% 以内,保持了较好的重构曲线形态,充分证明了其去噪抗干扰能力。

算法分析表明,对于含噪数据,束参数  $L$  与极点数  $M$  的选取直接决定了矩阵束法降噪效果的好坏。 $L$  的取值影响着 Hankel 矩阵的构建,并进而影响各个极点数值的变化;而极点个数的提取通常在对 Hankel 矩阵  $Y$  进行 SVD 分解后,通过比较对角矩阵各个奇异值与最大奇异值的比值,设定阈值下限来获得。较大奇异值对应的极点具有较强抵抗噪声干扰的能力,表现了原始数据的固有特性,其信息真实地反馈了信号本身的部分特征;而较小奇异值对应的极点在噪声干扰下出现变异,更多的噪声信息被记录,信号自身的特征被弱化甚至消失。

在不断增强的噪声干扰下,将有越来越多的极点信息被污染,因此,可发现随着信噪比的逐渐下降,矩阵束法实际可用极点数呈减少趋势,如表 1 所示。

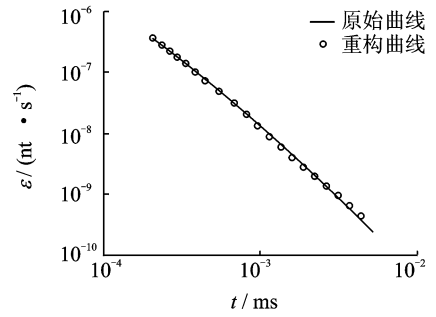
表 1 含噪数据不同信噪比时矩阵束法可选取极点个数

Table 1 Pole number selected by matrix pencil method in condition of different signal to noise ratio

SNR/dB	70	50	40	30	20	10	5	0
可用极点数	8	4	3	3	2	1	1	1

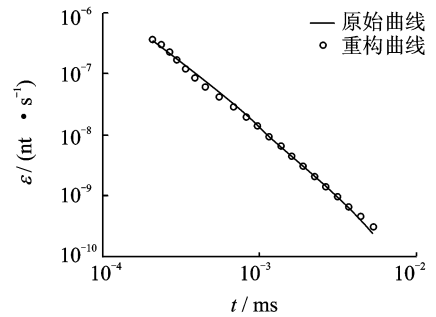
图 4 反映了不同信噪比下重构曲线与原始曲线之间的均方根误差变化情况。当信噪比在 0~10 dB 之间时,均方根误差被控制在 8% 以内,并随信噪比的增加呈现出迅速衰减的变化趋势,而当信噪比超过 10 dB 以后,均方根误差基本只在小于 1% 的范围内波动。

噪声环境下电磁响应数据数值上是病态的,为抑制噪声干扰,矩阵束法在广义特征值的求解过程中引入了奇异值分解和矩阵降秩近似等方法,使噪



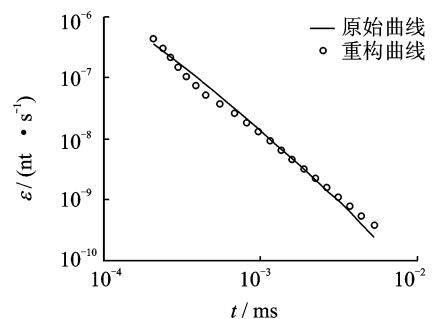
(a) 信噪比为 30 dB

(a) SNR = 30 dB



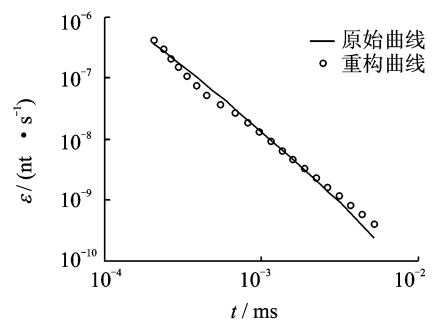
(b) 信噪比为 20 dB

(b) SNR = 20 dB



(c) 信噪比为 10 dB

(c) SNR = 10 dB



(d) 信噪比为 0 dB

(d) SNR = 0 dB

图 3 不同信噪比下矩阵束法重构曲线与原始曲线对比  
Fig. 3 Comparison between reconstruction curve and original curve in condition of different signal to noise ratio in matrix pencil method

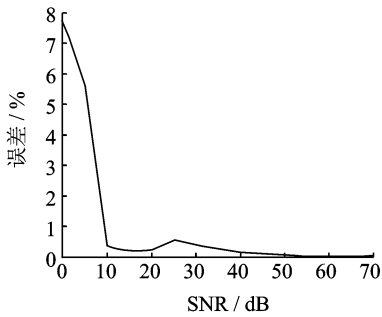


图4 不同信噪比下矩阵束法重构曲线与原始曲线之间的均方根误差

Fig.4 Root mean square error between reconstruction curve and original curve in condition of different signal to noise ratio in matrix pencil method

声对极点的影响得到了较好的控制。较高信噪比环境下(信噪比大于 20 dB),较多的极点精确复原了原始数据信息,较低信噪比环境下(信噪比接近 0 dB),仍有少量极点能够免受或少受噪声侵袭,最大限度地保持了原始数据的相应信息。因此,对于复杂电磁环境下的含噪航空电磁响应数据,该算法具有显著的应用价值。

### 3 结束语

矩阵束法是解决“衰减指数和”信号模型重构问题的有效算法,其借助独特的矩阵分解、降秩理论最大限度地减小了噪声的影响,保证了较大信噪比变化范围内拟合误差较小的波动。此外,在不同信噪比作用下,该算法极点的选取遵循了“优胜劣汰”的方式,所保留的极点特征量尽量远离噪声侵袭并充分反映原始数据信息。由此可见,矩阵束法的显著优势将使其在航空电磁响应数据的快速处理解释中发挥重要的作用。

#### 参考文献:

[1] 雷栋,胡祥云,张素芳. 航空电磁法的发展现状[J]. 地质找矿论丛, 2006,21(1):40-53.  
Lei Dong, Hu Xiangyun, Zhang Sufang. Development status geo of airborne electromagnetic[J]. Contributions to Geology and Mineral Resources Research, 2006,21(1):40-53.

[2] 赵国泽,陈小斌,汤吉. 中国地球电磁法新进展和发展趋势[J]. 地球物理学进展, 2007,22(4):1171-1180.  
Zhao Guoze, Chen Xiaobin, Tang Ji. Advanced geoelectromagnetic methods in China[J]. Progress in Ge-

ophysics, 2007,22(4):1171-1180.

[3] Van B M L, Mitra R. A technique for extracting the poles and residues of a system directly from its transient response[J]. IEEE Trans AP, 1975,23(6):777-781.

[4] Kumarean R, Tufts D W. Estimation the parameters of exponentially damped sinusoids and pole zero modeling in noise[J]. IEEE Trans Acoust, Speech, Signal Processing, 1982,12(5):833-840.

[5] Tapan K S, Odilon P. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1995,37(1):48-55.

[6] Yinbo H, Tapan K S. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1990,38(5):814-824.

[7] 杨学昌,王勇平,戚庆成. 数字信号处理的新方法[J]. 清华大学学报, 1997,37(4):93-96.  
Yang Xuechang, Wang Yongping, Qi Qingcheng. New method of digital signal processing[J]. Journal of Tsinghua University, 1997,37(4):93-96.

[8] Chen J P, James C M. Automatic estimation of EM parameters in tau-domain[J]. Exploration Geophysics, 1998,29:170-174.

[9] James M, Andrew K, Ned S, et al. Fast AEM data processing and inversion[J]. Exploration Geophysics, 1998,29:163-169.

[10] Edward M S, James M. Evaluation EM waveforms by singular-value decomposition of exponential basis functions[J]. Geophysics,1998,63(1):64-74.

[11] 何庆飞,姚春江,陈桂明,等. 基于奇异值分解和小波包分析的液压泵振动信号特征提取方法[J]. 数据采集与处理, 2012,27(2):241-247.  
He Qingfei, Yao Chunjiang, Chen Guiming, et al. Feature extraction method of hydraulic pump vibration signal based on singular value decomposition and wavelet packets analysis[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012,27(2):241-247.

[12] Wang S, Guan X, Wang D, et al. Application of matrix pencil method for estimating natural resonances of scatters[J]. Electronics Letters, 2007,43:1-2.

[13] 刘东红,张永顺,陈志杰,等. 基于 ESPRIT 矩阵束法的 UWB 雷达目标特征提取[J]. 系统工程与电子技术, 2006,28(11):1655-1658.  
Liu Donghong, Zhang Yongshun, Chen Zhijie, et al. Extraction of UWB radar target feature based on ESPRIT matrix pencil algorithm[J]. Systems Engineer-

ing and Electronics, 2006,28(11):1655-1658.

- [14] 梁群, 邹江威, 陈曾平. 基于 HRRP 极点矢量的特征提取方法研究[J]. 现代电子技术, 2009(9):1-3.  
Liang Qun, Zou Jiangwei, Chen Zengping. Research on features extraction of radar target HRRP based on poles[J]. Modern Electronics Technique, 2009(9): 1-3.
- [15] 汲亚飞, 杨宇, 邹军. 建筑物防雷系统瞬态电流分布的快速算法[J]. 高电压技术, 2009, 35(10):2407-2410.

Ji Yafei, Yang Yu, Zou Jun. Fast algorithm for calculating the transient current distribution of a lightning protection system[J]. High Voltage Engineering, 2009,35(10):2407-2410.

**作者简介:**尹大伟(1976-),男,博士,研究方向:时间域航空电磁法,E-mail: effortman0434@163.com;林君(1954-),男,教授,博士生导师,研究方向:信息探测技术与仪器、智能测试与控制、信号检测与处理;朱凯光(1970-),女,教授,博士生导师,研究方向:电磁探测及信号处理。

