

文章编号:1004-9037(2014)01-0043-11

# 压缩感知理论投影矩阵优化方法综述

郑 红 李 振

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,北京,100191)

**摘要:**通过优化投影矩阵的结构可提高压缩感知(Compressed sensing,CS)的重构性能及信号适应的稀疏度范围。该类方法利用迭代更新 Gram 矩阵使 CS 投影矩阵逼近最优结构,不同于以往的投影矩阵设计问题,它是一类新的改进 CS 性能方法。本文阐述了该问题的产生起源、理论基础、目标函数、理想模型以及与编码理论的交叉。在此基础上,分析、总结和比较现有投影矩阵优化方法的构造原理、应用特点以及存在的问题,最后讨论了其未来可能的发展方向。实验结果验证了分析结论的正确性。

**关键词:**压缩感知;投影矩阵;Gram 矩阵;互相关系数

**中图分类号:** TN911.7

**文献标志码:** A

## Survey on Optimization Methods for Projection Matrix in Compress Sensing Theory

Zheng Hong, Li Zhen

(School of Automation Science and Electrical Engineering,  
Beihang University, Beijing, 100191, China)

**Abstract:** Some studies have shown that optimizing the projection matrix can improve the reconstruction of compressed sensing and the sparsity range of signal adaption. This method uses iterative updated Gram matrix to maximum the optimization of compressed sensing(CS) projection matrix. It is a new method for enhancing the CS performance, which is different from previous design problems of projection matrix. Here, it analyzes, summarizes and compares the structure of those existing optimization methods of projection matrix, the application characteristics as well as existing problems, and concludes with the discussion of its possible direction of future development. The experimental results are used to verify the analysis of the conclusions.

**Key words:** compressed sensing; projection matrix; Gram matrix; mutual coherence

## 引 言

压缩感知理论利用自然信号/图像在某一变换域(一组基底/字典)下稀疏的预知先验信息,提出了一种不同于传统香农采样定理的信号欠采样理论,其核心思想是:利用先验稀疏性,通过尽量少的观测信息恢复自然信号/图像<sup>[1-4]</sup>。在传统采样过程中,为了避免信号失真,采样频率不得低于信号最高频率的 2 倍。在压缩感知理论中,精确恢复信号所需的观测信息仅与信号在变换域(一组基底/

字典)下的稀疏度相同数量级<sup>[5]</sup>。因其挑战了传统采样理念,在医学成像、雷达成像等许多领域<sup>[6-10]</sup>具有很好的应用前景,吸引了众多科学家关注。

现实世界中的自然信号/图像通常具有一定规律性。对这种规律性,一种常用的刻画方式是自然信号在一组基底表示下是稀疏的,这里的“稀疏”是指它们用一组基底展开后,大多数系数为 0,或者绝对值较小<sup>[11]</sup>。例如,自然图像用小波基底展开后,一般而言,其展开系数大多数绝对值较小。用数学符号表达,如信号  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  在某一组基底(或字典,下文统称为字典)  $\Psi \in \mathbf{R}^{n \times k}$  具有稀疏性,则

**基金项目:**国家自然科学基金(60543006)资助项目;教育部博士点基金(201003259)资助项目;重点实验室基金(9140C150105100C1502)资助项目。

**收稿日期:**2013-01-05; **修订日期:**2013-08-09

$x = \Psi\alpha$ ,  $\|\alpha\|_0 = s \ll n$ , 其中  $\|\cdot\|_0$  为  $l_0$  范数表示  $\alpha$  中非零元素个数,  $s$  为信号  $x$  在字典  $\Psi$  下的稀疏度。稀疏性是信号压缩的基础, 同时也是 CS 的理论基础。利用信号稀疏性, 构造一个 CS 系统包括两个步骤: 设计感知机构(编码机构)和选取合适的重构方法(解码机构)。两个步骤均很重要。然而, 信号恢复(解码)所需的数据量依赖于感知矩阵和稀疏字典之间(编码)的互相关性和信号的稀疏度<sup>[12]</sup>。比较而言, 前一个问题(编码)应优先解决, 即, 如何设计或优化得到优秀的感知机构(也称为投影矩阵、测量矩阵或观测矩阵, 下文统称投影矩阵)。

投影矩阵服从的约束条件是 CS 理论一个重要研究方向, 现有文献对此展开了研究, 主要有约束等距性质(Restricted isometry property, RIP)<sup>[2, 13-14]</sup>, 零空间性质<sup>[15]</sup>和互相关系数<sup>[4, 16-18]</sup>。文献<sup>[13, 14]</sup>提出了约束等距性质, 并指出 RIP 性质是观测值能够完全重构信号的充分条件。文献<sup>[15]</sup>指出投影矩阵具有零空间性质是信号能够通过  $l_1$  范数优化问题完全重构的充要条件, 并分析了高斯随机投影矩阵的零空间性质。然而判定投影矩阵是否具备 RIP 性质和零空间性质都是一个组合复杂度问题, 用于投影矩阵的性能分析非常困难<sup>[19]</sup>。为了克服该问题, 文献<sup>[4, 16-18]</sup>引入了互相关系数的概念。互相关系数在编码学中常被用作衡量一个过完备空间逼近正交空间的标准<sup>[20]</sup>。其含义是指投影矩阵列向量与稀疏字典列向量的内积最大值。其物理意义指明了两者之间的最差相似性<sup>[5]</sup>, 即通过投影矩阵观测数据的最差情况。

单一种约束条件产生的投影矩阵, 有时候不能达到期望的最优效果。如: 高斯随机投影矩阵, 虽然被证明几乎与任意稀疏字典都不相关<sup>[2]</sup>, 但其并没有能很好地逼近 Welch 界<sup>[5]</sup>(本文随后的实验也验证了这一点)。为解决这个问题, 近来有研究表明, 通过减小投影矩阵与稀疏字典的互相关系数进一步提高 CS 重构性能。从另一个角度考虑, 互相关系数可影响观测值数目与信号稀疏度范围。互相关系数越小, 精确重构信号需要的观测值数目越少<sup>[4]</sup>, 信号适应的稀疏度范围越大<sup>[18]</sup>。本文归纳总结了该方向的研究成果, 系统地梳理了理论脉络, 为研究人员进一步研究奠定基础。

## 1 CS 简介

所谓的 CS 理论: 假设信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在一组字典  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  上具有  $s (s \ll N)$  稀疏度, 通过

其在投影字典  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  上的  $M (M \geq s)$  个线性投影(观测值)  $y, y(i) = \langle x, \phi_i \rangle, i \in \{1, 2, \dots, M\}$  获得精确重构的过程, 即

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha \quad (1)$$

式中:  $\Phi$  为投影矩阵,  $\Psi$  为稀疏字典,  $y$  为观测值向量。

由条件  $s \leq M \ll N$  看出, 信号重构过程是欠采样情况下的信号重构问题, 信号  $x$  的重构本质上是一个病态的求逆问题。一般情况下, 该问题无解, 但是, 稀疏性假设给出了从  $M$  个观测值中重建  $x$  的希望。事实上, 可以通过寻找满足  $y$  中  $M$  个观测值的最稀疏解, 即求解  $l_0$  最小化问题得到信号  $x$

$$\hat{x} = \operatorname{argmin} \|x\|_0 \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi x \quad (2)$$

大量研究关注于 CS 理论的信号重构问题。主要算法有凸优化方法(如: 基追踪<sup>[21]</sup>、Bregman 迭代法<sup>[22]</sup>等), 贪婪算法(如: 匹配追踪<sup>[23]</sup>、正交匹配追踪<sup>[24]</sup>等)。文献<sup>[25, 26]</sup>对 CS 理论的信号重构问题进行了综述。

改进重构算法是提高 CS 性能的一种解决办法, 然而, 这里考虑一个逆问题: 理想的重构算法下, 如何能够使每个观测值包含更多的信息, 或者说精确重构所需的观测值更少。一种思路是设计更优秀投影矩阵。目前, 用于压缩感知的投影矩阵主要分为两类: 第一类为随机投影矩阵<sup>[27]</sup>, 如高斯随机矩阵、贝努利矩阵等; 第二类为确定性投影矩阵, 如托普利兹矩阵<sup>[28]</sup>、多项式矩阵<sup>[29]</sup>等。然而, 研究表明<sup>[2]</sup>, 目前只有高斯随机投影矩阵被证明与任意稀疏字典均不相关。文献<sup>[5]</sup>中, 指出并用实验证实了高斯随机矩阵并没有很好地逼近最优的 Welch 界(本文实验分析也得到了相同的结论)。另一种思路是投影矩阵优化, 其主要思想是采用非线性逼近的方法使投影矩阵与稀疏字典对应的 Gram 矩阵逼近理想模型, 然后从 Gram 矩阵中反解出最优投影矩阵。

## 2 投影矩阵优化问题

### 2.1 互相关系数及其变型

假设  $x$  在时域中不稀疏, 但可以在字典  $\Psi \in \mathbf{R}^{l \times n}$  中被稀疏表示, 即有  $x = \Psi\alpha$  的稀疏表示形式。如式(1)所示, 用 CS 理论对其采样。为了达到较好的压缩感知效果, 期望寻找与稀疏变换矩阵  $\Psi$  相关性很小的投影矩阵  $\Phi$ , 即使  $D = \Phi\Psi$  有很小的互相关系数。

互相关系数  $\mu_{\max}$  定义为矩阵  $\tilde{\mathbf{D}}$  中任意两列的内积的最大值<sup>[18]</sup>,其中  $\tilde{\mathbf{D}}$  表示对  $\mathbf{D}$  进行列单位化之后的矩阵。数学表达如下

$$\mu_{\max}\{\mathbf{D}\} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \frac{|\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j|}{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j} = \max_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \{|\tilde{\mathbf{d}}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_j|\} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{d}_i$  和  $\tilde{\mathbf{d}}_i$  分别表示矩阵  $\mathbf{D}$  和  $\tilde{\mathbf{D}}$  的列向量。

令 Gram 矩阵  $\mathbf{G} = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi = \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}$ ,  $(\cdot)^T$  表示转置,下文简称为  $\mathbf{G}$  矩阵。互相关系数也可定义为  $\mathbf{G}$  矩阵中非对角线元素的最大值,即  $\mu_{\max} = \max_{i \neq j} |g_{ij}|$ ,其中  $g_{ij} = \tilde{\mathbf{d}}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_j$  是  $\mathbf{G}$  矩阵的元素。

在互相关系数假设下,精确重构信号时,信号稀疏度与互相关系数需要满足下列条件<sup>[18,30]</sup>。可以看出,互相关系数越小,稀疏度的适应范围越大。

$$\|\alpha\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu\{\mathbf{D}\}}\right) \quad (4)$$

式(3)中定义的互相关系数具有一定局限性:只能刻画局部相关性<sup>[31]</sup>。例如: $\tilde{\mathbf{D}}$  矩阵中的某两列相关性比较大,但是其他的各列之间相关性都很小,这就导致了互相关系数比较大但是矩阵性能并不是太差的结果。

一种改进的刻划方式<sup>[5]</sup>是  $t$ -平均互相关系数  $\mu_t$ ,对  $\mathbf{G}$  矩阵中大于  $t$  的非对角线元素绝对值取均值,即

$$\mu_t\{\mathbf{D}\} = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t)} \quad (5)$$

$t$ -平均互相关系数一定程度上可以反映投影矩阵整体投影性能。文献[5,32-36]采用了  $t$ -平均互相关性作为优化评价指标进行投影矩阵优化。文献[31]提出了一个基于 Gram 矩阵的整体互相关系数,即所有  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素的平方和  $\mu_{\text{all}} = \sum_{i \neq j} (g_{ij})^2$ ,也从一定程度反映了投影矩阵的整体投影性能。

一个值得思考的问题是,为什么要采用互相关性系数或其变型作为优化目标,而不直接约束投影矩阵的元素。如上节所述,信号的重构是一个病态的求逆问题,直接约束投影矩阵的元素,无法保证投影矩阵与稀疏字典间的不相关关系,观测值可能无法通过重构算法恢复信号<sup>[5]</sup>。

## 2.2 Welch 界与理想模型

互相关系数  $\mu_{\max}$  越小,投影矩阵与稀疏字典相关性越小,通过投影矩阵得到的观测值蕴含越多的有效信息。那么,互相关系数  $\mu_{\max}$  最小能取多少。

文献[37,38]给出了互相关系数  $\mu_{\max}$  的一个下界,也叫 Welch 界,即

$$\mu_{\max} \geq \sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}} \quad (6)$$

式中: $m$  为投影矩阵  $\Phi \in \mathbf{R}^{m \times l}$  的行数, $n$  为稀疏字典  $\Psi \in \mathbf{R}^{l \times n}$  的列数。

在编码理论中,给定一组  $\mathbf{R}^m$  中单位化后的框架  $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^n$ ,如果满足下列关系,则该框架称为 Grassmannian 框架<sup>[20]</sup>

$$\min(\mu) \quad \text{s. t.} \quad \mu \geq \sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}} \quad (7)$$

Grassmannian 框架的目的是最小化最大互相关系数,使得所有单位框架包含相同的冗余。投影矩阵优化问题等价于构造一组 Grassmannian 框架。其理想情况是等角紧框架(Equiangular tight frame, ETF)<sup>[20]</sup>。如果一组框架对应  $\mathbf{G}$  矩阵拥有单位对角元素并且非对角元素等于  $\pm \sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}}$ ,则称为 ETF,即

$$g_{ij} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}} & i \neq j \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

如图 1 所示, $m=30, n=400$  时,ETF 对应  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素取绝对值的分布。取绝对值是由于互相关系数与符号无关。理想情况下,期望  $\mathbf{G}$  矩阵的所有非对角元素集中于 Welch 界  $\mu = 0.1758$ ,即所有投影向量包含相同的冗余,每个观测值蕴含等量的信息。

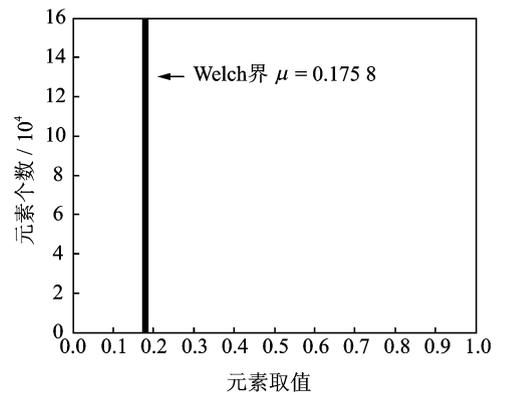


图 1 理想情况的  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素分布

Fig. 1  $\mathbf{G}$  matrix off-diagonal elements distribution ideally

## 2.3 投影矩阵优化问题

文献[33,34]尝试以 ETF 作为优化目标的投影矩阵优化方法。然而,CS 理论中  $\mathbf{G}$  矩阵并非满

秩( $\text{rank}(\mathbf{G})=m$ ), 而 ETF 是满秩的, 所以  $\mathbf{G}$  矩阵不能直接逼近 ETF。一个 ETF 的变型可以作为逼近的对象, 文献[20]证明了该变型也能够很好地达到 Welch 界, 数学表达如下

$$g_{ij} = \begin{cases} \pm\sqrt{n-m/m(n-1)} & i \neq j \\ n/m & i = j, i \leq m \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

令 Welch 界对应的互相关系数为  $\mu_E$ , ETF 的变形可以表示为一个凸集合  $\mathbf{H}_{\mu_E}$  [39]

$$\mathbf{H}_{\mu_E} = \{ \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n} : \mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \sum \text{diag} \mathbf{H} = n, h_{ij} = n/m, \max_{i \neq j} |h_{ij}| \leq \mu_E \} \quad (10)$$

投影矩阵优化问题可以化为一个简单的无约束优化问题: 寻找合适  $\mathbf{G}$  矩阵, 使得  $\mathbf{G}$  矩阵与  $\mathbf{H}_{\mu_E}$  差距最小, 即

$$\min_G \|\mathbf{G} - \mathbf{H}_{\mu_E}\|_F^2 \quad (11)$$

其中,  $\|\cdot\|_F$  为 Frobenius 范数。找到  $\mathbf{G}_E$  后, 根据  $\mathbf{G}$  矩阵的定义, 反解出投影矩阵  $\Phi$ , 得到最优投影矩阵。

$$\min_{\Phi} \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \mathbf{G}_E\|_F^2 \quad (12)$$

如图 2 所示,  $m=30, n=400$  时,  $\mathbf{G}$  矩阵的非对角元素取绝对值的分布。柱状分布为理想模型, 在寻找类似虚线的  $\mathbf{G}$  矩阵分布逼近理想情况, 使投影矩阵逼近最优。

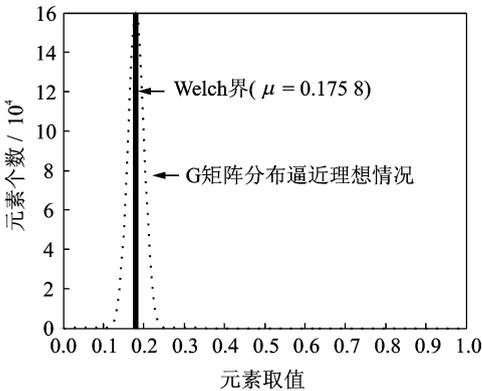


图 2 逼近理想情况的  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素分布

Fig. 2  $\mathbf{G}$  matrix off-diagonal elements distribution closely ideally

### 3 投影矩阵优化的通用步骤与分类

根据上文分析, 投影矩阵优化问题的通用算法步骤可归纳为:

目标: 寻找最优的投影矩阵  $\Phi$

输入: 迭代次数  $k$ , 误差容忍  $e_1, e_2$

For  $i=1$  to  $k$  do begin

**第 1 步** 计算  $\mathbf{G} = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$ , 利用阈值函数, 使得  $\min_G \|\mathbf{G} - \mathbf{H}_{\mu_E}\|_F^2$ , 当误差  $e_G = \|\mathbf{G} - \mathbf{H}_{\mu_E}\|_F^2 \leq e_1$ , 更新  $\mathbf{G}$  矩阵。

**第 2 步** 求解  $\min_{\Phi} \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \mathbf{G}_E\|_F^2$ , 误差  $e_{\Phi} = \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \mathbf{G}_E\|_F^2 \leq e_2$ , 更新投影矩阵  $\Phi$ 。

End

输出: 投影矩阵  $\Phi$

通用算法步骤分为两步: 第 1 步目标是更新  $\mathbf{G}$  矩阵, 第 2 步目标是更新投影矩阵  $\Phi$ 。首先, 计算  $\mathbf{G} = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$ , 按照式(11)所示, 设计阈值函数, 寻找逼近  $\mathbf{H}_{\mu_E}$  的  $\mathbf{G}$  矩阵。当误差容忍达到设定值  $e_1$  时, 第 1 步(1)终止, 更新  $\mathbf{G}_E$ , 进入第 2 步, 通过式(12)求解新的投影矩阵  $\Phi$ , 当误差容忍达到设定值  $e_2$  时, 第 2 步终止。如果  $i < k$ , 则利用新的投影矩阵  $\Phi$ , 计算新的  $\mathbf{G}$  矩阵, 进入第 1 步。如果  $i \geq k$ , 则算法终止, 输出投影矩阵  $\Phi$ 。

#### 3.1 更新 $\mathbf{G}$ 矩阵

更新  $\mathbf{G}$  矩阵步骤根据目标对象不同可分为两类: (1) 面向  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素的方法; (2) 面向  $\mathbf{G}$  矩阵特征值的方法。第一类方法直接针对  $\mathbf{G}$  矩阵非对角元素进行阈值截断, 逼近目标。直观简单, 计算量小, 是多数文献[5, 32-34]选择的方法。其缺点是经过阈值截断  $\mathbf{G}$  矩阵的秩不再是  $m$ , 需要额外的步骤将矩阵秩收缩为  $m$  [5]。一种方法是对矩阵奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 分解, 取最大的  $m$  个奇异值及奇异向量 [5]。该额外步骤可能引入新的干扰, 即引入新的较大  $\mu_{\max}$  (本文第 4 节实验 3 给出了验证)。第二类方法本质上利用了理想模型的特征值特点, 也可以得到不错的结果, 不足之处是反解出的投影矩阵, 得到的观测值有可能无法重构 (如 Zhao [31] 的方法不能被 BP 算法解出)。

##### 3.1.1 面向非对角元素的方法

表 1 总结了面向非对角元素的目标函数。

Elad 利用收缩因子  $\gamma$  和阈值点  $t$  来控制硬阈值函数的收缩范围。由于较多地保留了原始  $\mathbf{G}$  矩阵信息, 实际效果比其他算法好 (实验 1 给出验证)。但收缩因子  $\gamma$  和阈值点  $t$  配置需要依靠经验, 不当的参数可能导致迭代次数增多 [31]。Vahid 和 Jian-ping Xu 将小于设定值  $\mu$  的元素保留, 其他的设为保留原元素符号的  $\mu$ 。Lifeng Yu 的思想基本相同, 增

加了因子  $\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}$ 。另外, 文献[35]尝试了利用  $G$  矩阵非线性逼近单位阵的方法, 更新  $G$  矩阵。

表 1 面向非对角元素的目标函数

方法	目标函数
Elad 方法 <sup>[5]</sup>	$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij} &  g_{ij}  \geq t \\ \gamma t \cdot \text{sign}(g_{ij}) & t >  g_{ij}  \geq \gamma t \\ g_{ij} & \gamma t >  g_{ij}  \end{cases}$
Vahid 方法 <sup>[32]</sup> ; Xu Jianping 方法 <sup>[34]</sup>	$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij} &  g_{ij}  < \mu \\ \mu \cdot \text{sign}(g_{ij}) & \text{其他} \end{cases}$
Yu Lifeng 方法 <sup>[33]</sup>	$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & \frac{ g_{ij} }{\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}} \leq \mu \\ \text{sign}(g_{ij}) \cdot \mu \cdot \sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}} & \text{其他} \end{cases}$

### 3.1.2 面向特征值的方法

表 2 总结了面向特征值的目标函数。

表 2 面向特征值的目标函数

方法	目标函数
Zhao 方法 <sup>[31]</sup>	$\hat{\lambda}_{ij} = \begin{cases} n/m & \lambda_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
Vahid-3 方法 <sup>[36]</sup>	$\min \ \Gamma^T \Gamma - \Lambda^{-1}\ _F$
Vo 方法 <sup>[40]</sup>	$\Phi = \mathbf{A}_p^T$

Zhao 定义了一种整体互相干系数, 在不改变  $G$  矩阵特征值和的前提下, 用平均化  $G$  矩阵大于零的特征值的方法来逐步优化投影矩阵。文献[36]中, 作者将投影矩阵  $\Phi$  与特征向量  $V$  的乘积定义为  $\Gamma = \Phi V$ , 最小化  $\Gamma^T \Gamma$  与特征值矩阵  $\Lambda$  的倒数, 用于更新  $G$  矩阵。Vo 的方法直接将稀疏矩阵  $\Psi$  特征值分解后, 最大  $m$  个特征值对应特征向量集合  $\mathbf{A}_p$ , 转置后得到新的投影矩阵  $\Phi = \mathbf{A}_p^T$ 。

为了分析各算法的性能, 本文进行了比较实验。其中, Elad 方法的收缩因子  $\gamma = 0.9, t = 0.2$ ; Vahid 方法, Vahid-2 方法, Vahid-3 方法的步进因子  $\beta = 0.005$ ; Yu Lifeng 方法和 Xu Jianping 方法的阈值  $\mu = \mu_E = 0.1758$ , 迭代次数  $i = 50$ 。实验结果如图 3 所示。

在图 3 中, 实线为原始  $G$  矩阵非对角元素绝对值的直方图。虚线为 Welch 界。Elad 方法在 Welch 界的附近有一个最大的峰, 说明有大量  $G$  矩阵元素集中, 与期望的结果最接近, 第 4 节实验

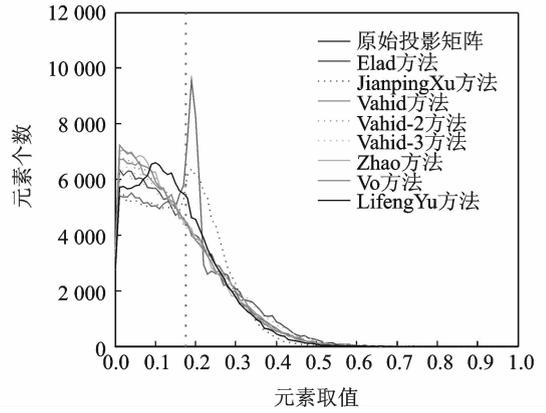


图 3 不同算法的  $G$  矩阵元素直方图

Fig. 3  $G$  matrix elements histogram of different algorithms

验证了该方法性能最好; Xu Jianping 方法在相同位置有一个相对较小的峰; Yu Lifeng 方法在 Welch 界左侧有一个相对小的峰。实验证明了它们也有较好的结果。其他方法的情况类似:  $G$  矩阵直方图近 0 点的曲线增高, 即绝对值小的元素增多。实验表明, 这类情况也能改进整体性能, 但是没有前三种方法效果明显。

### 3.2 更新投影矩阵

更新投影矩阵步骤的目标是利用  $G$  矩阵求解投影矩阵  $\Phi$ 。已知  $G$  矩阵为奇异矩阵, 该问题同样是一个病态的矩阵求逆问题。根据求解过程不同, 可分两类方法: 利用矩阵逆求解与利用梯度下降非线性逼近。

#### 3.2.1 利用矩阵逆求解

求解步骤: 将  $G$  矩阵进行 Cholesky 得到  $G = L^T L$ , 又由定义知  $G = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$ , 即  $L = \Phi \Psi$ , 然后利用稀疏字典的逆  $\Psi^{-1}$ , 得到新的投影矩阵  $\Phi = L \Psi^{-1}$ 。利用矩阵逆求解的方法只涉及到一个矩阵分解与一个矩阵求逆操作, 简单直观。文献[5, 31, 33, 34]采用该方法。其缺点是: 由于稀疏字典  $\Psi$  可能奇异, 需要利用稀疏字典的 Moore-Penrose 广义伪逆来求解新的投影矩阵  $\Phi = L \Psi^+$ , 带来计算量与精度的问题。

#### 3.2.2 利用梯度下降非线性逼近

该类方法将问题转化为无约束非线性最优化问题。目标函数为

$$J(\Phi) = \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - G\|_F^2 \quad (13)$$

利用梯度下降法求解  $\min(J(\Phi))$ 。计算  $J$  相对  $\Phi$  的梯度

$$\nabla_{\Phi} J = \frac{\partial J}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi}$$

$$\text{Tr}\{(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - G)^T (\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - G)\} \quad (14)$$

$\text{Tr}\{\cdot\}$ 为矩阵迹,根据矩阵求导性质<sup>[40]</sup>得到

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = 4\Phi\Psi(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - G)\Psi^T \quad (15)$$

更新步骤为

$$\Phi_{(k+1)} = \Phi_k - \beta \Phi_{(k)} \Psi(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - G)\Psi^T \quad (16)$$

其中  $\beta$  为步长因子。文献[32,35,36]采用该方法。梯度下降法以负梯度方向作为极小化算法的搜索方向,是常用的非线性逼近方法。缺点是:步长因子  $\beta$  的选择对算法影响大。

为了比较两类方法的效果,作者进行了比较实验。实验参数与上节实验相同。结果图 4 所示。

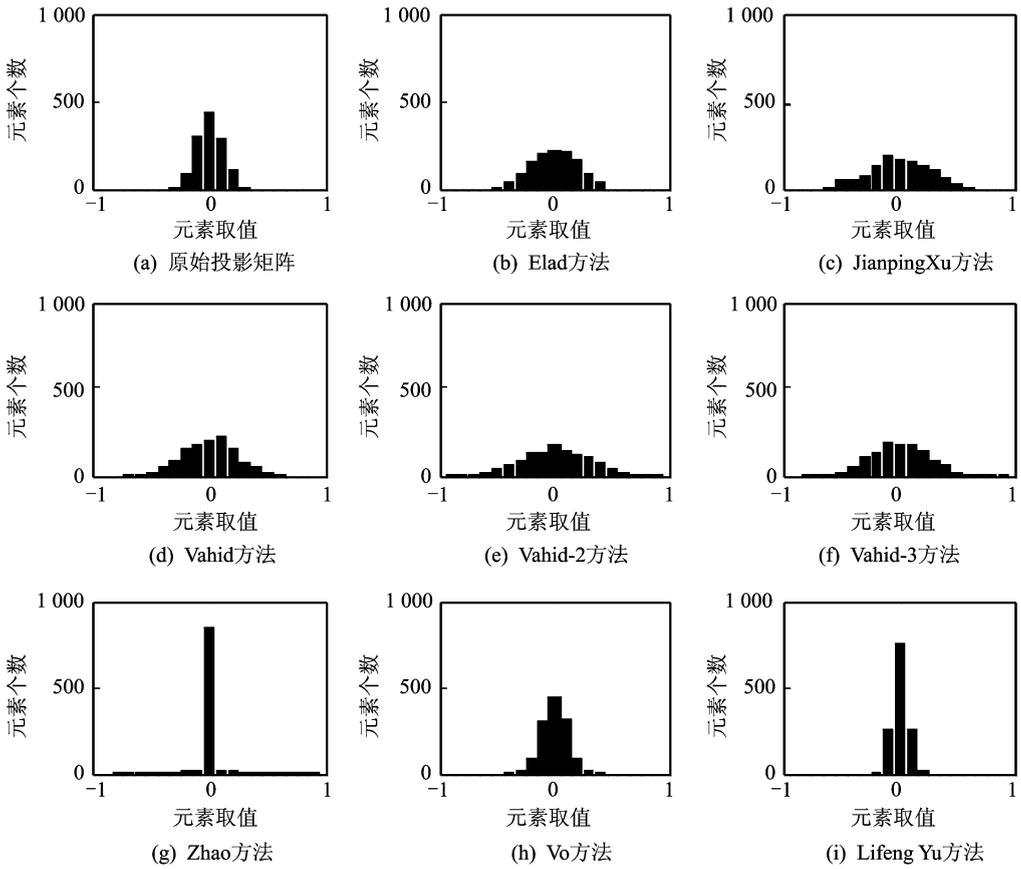


图 4 投影矩阵的元素直方图

Fig. 4 Histogram of projection matrix

图 4 是不同投影优化方法所求得新投影矩阵元素的直方图。Zhao 方法得到大量的 0 值,这导致部分重构算法(如 BP 算法)无法重构信号。Yu Lifeng 方法得到的 0 值也很多,也存在可能无法重建的现象。其他方法具有较好的结果。另外,

利用梯度下降法的非线性逼近的方法比利用矩阵逆求解方法得到结果更加稳健。

### 3.3 算法总结

综上,对投影矩阵优化算法进行全面总结,如表 3 所示。

表 3 算法总结

Table 3 Algorithms summary

方法	步骤 1	步骤 2	描述	缺点
Elad 方法 <sup>[5]</sup>	①	①	首例基于 $G$ 矩阵的投影矩阵优化算法。该算法采用收缩因子可调节的阈值函数,并利用矩阵逆求解新的投影矩阵。	该算法收缩操作可能引入新的较大干扰。参数选择不恰当时,迭代次数较多。
Xu Jian-ping 方法 <sup>[34]</sup>	①	①	该算法延续了 Elad 方法的思路,指出了以 ETF 作为优化目标,不同之处在于增加了一个保留前一次矩阵优化信息的操作。其目的在于使每一次矩阵更新的变化量变小。	该算法也继承了 Elad 方法的缺点,同时需要更多存储空间及一个手动选择的平衡点。

方法	步骤 1	步骤 2	描述	缺点
Vahid 方法 <sup>[32]</sup>	①	②	该算法与之前算法有较大变化。在更新投影矩阵的步骤,为了解决广义逆矩阵计算量与精度上的问题,首次提出利用梯度下降法非线性逼近投影矩阵的方法。	该算法将无约束优化的方法应用到矩阵优化问题中,同时也引入梯度法的缺点。即:受步长因子影响很大,不恰当的步长因子可能导致不收敛。
Vahid-2 方法 <sup>[35]</sup>	①	②	该算法与 Vahid 方法的思路基本类似。不同之处在于其将单位矩阵作为矩阵更新目标函数。后续研究表明,单位矩阵是一种理想的情况,当 $G$ 矩阵非奇异时,才能够满足。但实际的 $G$ 矩阵是奇异矩阵。	该算法具有 Vahid 方法的缺点,与其效果也类似。
Vahid-3 方法 <sup>[36]</sup>	②	②	该算法采用的思路与 Vahid 方法类似,但采用的目标函数不同。其首先将稀疏字典的内积进行特征值分解,并推导出当投影矩阵与特征向量的乘积逼近的向量倒数时,误差最小。	该算法同样具有步长因子的问题,与其效果也与 Vahid 方法类似。
Zhao 方法 <sup>[31]</sup>	②	①	前面算法都是基于互相关系数理论框架下的研究成果,Zhao 方法提供了一种不同的思路。其提出了用 $G$ 矩阵非对角元素的平方和为整体互相关系数的新概念,用来表示投影矩阵整体性能。具体算法上利用特征值平均化法更新 $G$ 矩阵,并利用矩阵逆求解新的投影矩阵。	该算法是一种新的解决思路,重构效果也不错。不足之处在于结果中包含大量 0 元素(如图 4 所示),部分重构算法无法应用(如 BP 算法)。
Vo 方法 <sup>[40]</sup>	②	①	该算法与之前研究不同。其利用多维缩放技术(Multi-dimensional Scaling, MDS)寻找满足成对距离相对不变的低维投影矩阵。具体方法是将稀疏字典前 $m$ 个特征值对应的特征向量转置后组成新的投影矩阵。	由于该算法没有利用互相关系数一系列结论,而是采用了 MDS 技术,所以一些支撑理论待证明(如: MDS 得到的投影矩阵与稀疏度的关系等)。
Yu Lifeng 方法 <sup>[33]</sup>	①②	①	该算法在理论上与之前研究没有太多不同。在具体算法上,增加了特征值分解截断的操作。阈值函数去掉了收缩因子。	该算法相对简单,效果还可以。但是,由于采用硬阈值函数,所以较多元素集中在 0 点(如图 4 所示),部分重构算法无法应用(如 BP 算法)。

注:步骤 1:①面向非对角元素的方法,②面向特征值的方法;步骤 2:①利用矩阵逆求解,②利用梯度下降非线性逼近。

## 4 实验结果与分析

本节进行综合实验比较算法性能。比较对象为表 3 中的算法。

**实验 1** 目标是验证投影矩阵优化方法的有效性。首先,采用列单位化后的随机矩阵作为稀疏字典和初始投影矩阵。接着,生成  $N=100\ 000$  个稀疏向量(相当于 10 万次重复实验),向量长度可  $k=120$ ,每个稀疏向量包含  $T=4$  个数非零项。非零项位置随机分布,取值符合标准正态分布。观测值  $m$  的取值范围为 $[16,41]$ 。然后,采用正交匹配追踪算法(Orthogonal matching pursuit,OMP)重构算法进行信号重构。当重构错误大于 300 个时,迭代终止。结果采用对数表达形式,如图 5 所示。

在图 5 中实线为原始投影矩阵重构结果随观测值增加的结果。随观测值的增加,重构误差率减少(即观测值越多,重构结果越好)。其他曲线为优

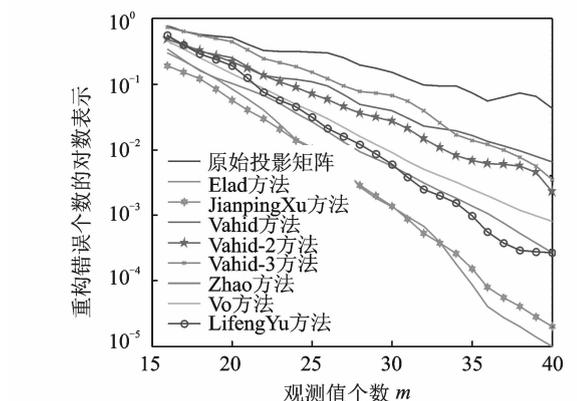


图 5 不同算法随观测值个数  $m$  变化时曲线

Fig. 5 Curves of different algorithms for observed value  $m$

化后的投影矩阵,均优于原始投影矩阵。这说明,投影矩阵优化方法对投影矩阵的性能具有改进作用。这激励去尝试进一步优化投影矩阵来得到更好的结果。例如,在  $10^{-1}$  的重构误差精度下,原投影矩阵需要 32 个观测值,而经过 Elad 方法优化的投影矩

阵只需 18 个,即每个观测值包含的信息量提高了。

在算法之间比较中,Elad 方法表现最好,Xu Jianping 方法次之,Yu Lifeng 方法和 Zhao 方法再次之。在第 3 节分析中,一类方法的  $G$  矩阵非对角元素均集中于 Welch 界附近,如:Elad 方法,Xu Jianping 方法,Yu Lifeng 方法的,而另一类方法其对应的数值集中在 0 值附近。实验表明,两类方法都能改进重构性能,前者效果更好。

**实验 2** 目标是验证投影矩阵优化算法对信号稀疏适应性的改进,即优化后的投影矩阵能成功采集不那么稀疏的信号。基本参数与实验(1)相同,仍然进行 10 万次重复实验。信号非零元素个数  $T$  的取值范围为 $[1,7]$ 。结果仍采用对数表达形式,如图 6 所示。

图 6 中原始投影矩阵随信号非零元素个数  $T$  的增加,重构精度减少。这说明:信号非零元素个数越多(越不稀疏),重构难度越大。可以看出,优化后的投影矩阵性能有明显改进。例如:在  $T=3$  时,原投影矩阵重构误差精度为  $10^{-1}$ ,而优化后,重构误差精度能够达到  $10^{-2}$ ,甚至接近  $10^{-3}$ 。从另一个角度考虑,重构误差精度要求为  $10^{-1}$ ,原投影矩阵只能采集非零元素  $T=1$  的信号,而优化后可采集非零元素  $T=4$  的信号。即:优化投影矩阵

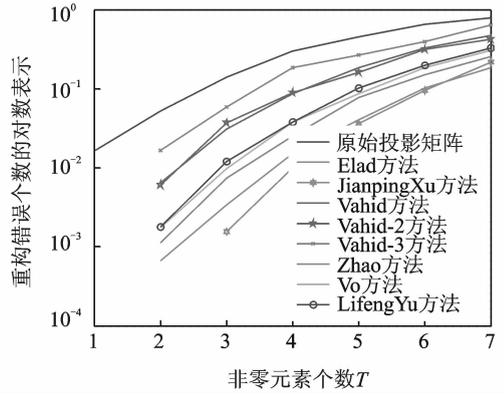


图 6 不同算法在不同稀疏度  $T$  的曲线

Fig. 6 Curves of different algorithms for different sparsity degree of  $T$

可提高信号稀疏适应性。

算法级别比较,Xu Jianping 方法表现最好,Elad 方法次之,Zhao 方法再次之。Yu Lifeng 方法,Vo 方法再次之。与实验 1 结论类似。

**实验 3** 利用互相关系数的统计属性分析各算法的性能。参数同实验 1。每种算法重复运行 1 000 次,将得到的最大互相关系数  $\mu_{\max}$  与  $t=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  的  $t$ -平均互相关系数  $\mu_t$  的取平均值、最大值、最小值。结果如表 4 所示。

表 4 投影矩阵优化算法的互相关系数统计

Table 4 Statistics of mutual coherence of projection matrix optimization algorithm

方法	$\mu_{\max}$	$\mu_t$			
		$t=0.2$	$t=0.4$	$t=0.6$	$t=0.8$
原始投影矩阵 $x$	0.715 7	0.188 9	0.226 2	0.272 0	0.337 8
Elad 方法 <sup>[5]</sup>	0.853 1	0.183 1	0.208 8	0.239 2	0.282 6
Xu Jianping 方法 <sup>[34]</sup>	0.719 8	0.186 5	0.218 3	0.250 4	0.291 3
Vahid 方法 <sup>[32]</sup>	0.678 2	0.177 0	0.211 9	0.254 3	0.314 2
Vahid-2 方法 <sup>[35]</sup>	0.709 8	0.177 5	0.212 6	0.255 7	0.317 8
Vahid-3 方法 <sup>[36]</sup>	0.744 7	0.187 7	0.224 8	0.270 2	0.335 3
Zhao 方法 <sup>[31]</sup>	0.690 5	0.170 5	0.204 4	0.246 1	0.306 2
Vo 方法 <sup>[41]</sup>	0.664 4	0.172 0	0.206 0	0.247 9	0.308 5
Yu Lifeng 方法 <sup>[33]</sup>	0.681 7	0.175 6	0.206 7	0.243 9	0.297 5

由上文分析可知,期望的最大互相关系数越小越好,但在表 4 中,Elad 方法的最大互相关系数甚至超过了原投影矩阵,如第 3 节分析,这是由收缩秩的操作引起的,但其拥有稳定的互相关系数,从实验 1,2 可知,Elad 方法仍具有良好的性质。由此可知,极少数的最大互相关系数并不影响整体效果,而  $t$ -平均互相关系数相对而言更重要。

从稳定性角度分析,Vahid 方法,Zhao 方法,Vo 方法在多次重复实验中更加稳定,其他算法存在一定不稳定性。

## 5 结 论

通过优化投影矩阵结构来改进 CS 是一类新的提升 CS 性能的方法,本文总结了投影矩阵优化问题的发展现状。从分析投影矩阵与稀疏字典间的互相关系数及其变型,到介绍 Welch 界引出理想模型,最后推导出了投影矩阵优化问题的数学表达。在总结已有算法,本文归纳出投影矩阵优化的通用算法,并根据具体步骤不同对已有算法进行了归类,使问题一目了然,为今后的进一步研究打下基础。综合验证实验验证了投影矩阵优化问题可提高 CS 的重构性能及信号适应的稀疏度范围。

CS 投影矩阵优化问题伴随着压缩感知问题的产生而产生,目前,仍处于研究初步阶段。早期的研究倾向于简单的矩阵广义逆的方法,近期逐渐发展为利用数学规划方法解决。矩阵优化问题是数学领域一个重要研究分支,已取得众多成果。将现有的研究成果应用到压缩感知背景中,提高压缩感知的性能是未来方向之一。例如,投影矩阵看作一个大规模方程的系数矩阵,则可以利用共轭梯度法、牛顿法、信赖域等无约束优化方法求解新的投影矩阵。

综上,本文认为该问题可能在以下方面展开进一步研究:(1)为克服现有缺陷,将最优化方法引入到通用算法步骤中第一步和第二步中。例如:为克服步长因子对更新投影矩阵步骤的影响,可尝试用无约束优化方法替换梯度下降法。(2)现有算法均是基于互相关系数评价标准。基于其他的评价标准的投影矩阵优化方法也是下一步方向之一,如: RIP,零空间性质等。

### 参考文献:

[1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2006, 52(4): 1289-1306.

- [2] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [3] Baraniuk R G. Compressive sensing [J]. Signal Processing Magazine, IEEE, 2007, 24(4): 118-121.
- [4] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. Signal Processing Magazine, IEEE, 2008, 25(2): 21-30.
- [5] Elad M. Optimized projections for compressed sensing[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2007, 55(12): 5695-5702.
- [6] 王朝,王铭江,李玉清,等. 基于位置集回验的并联分片频谱压缩感知算法[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(4): 452-456.
- Wang Chao, Wang Mingjiang, Li Yuqing, et al. Parallel segmented compressed sensing algorithm based on indices back-tracing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2011, 26(4): 452-456.
- [7] 顾福飞,朱丰,池龙,等. 基于压缩感知的含旋转部件目标 ISAR 成像方法[J]. 数据采集与处理, 2012, 27(1): 45-50.
- Gu Fufei, Zhu Feng, Chi Long, et al. ISAR imaging algorithm for targets with rotating parts based on compressed sensing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012, 27(1):45-50.
- [8] 张弓,杨萌,张劲东,等. 压缩感知在雷达目标探测与识别中的研究进展[J]. 数据采集与处理, 2012, 27(1): 1-12.
- Zhang Gong, Yang Meng, Zhang Jindong, et al. Advances in theory and application of compressed sensing in radar target detection and recognition [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012, 27(1):1-12.
- [9] Zhu Daiyin, Zhang Wei, Zhu Zhaoda. Phase autofocusing algorithm for compressed inverse synthetic aperture radar imaging[J]. Transactions of Nanjing Aeronautics and Astronautics, 2012, 29(3): 245-253.
- [10] 潘汇,张劲东,张弓. 压缩感知雷达感知矩阵优化[J]. 数据采集与处理, 2012, 27(2): 138-143.
- Pan Hui, Zhang Jindong, Zhang Gong. Optimized sensing matrix design for compressive sensing radar [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2012, 27(2): 138-143.
- [11] 徐志强. 压缩感知[J]. 中国科学:数学, 2012, 42(9):865-877.
- Xu Zhiqiang. Compressed sensing: a survey [J]. Sci Sin Math, 2012, 42(9):865-877.
- [12] 戴琼海,付长军,季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机

- 学报, 2011, 34(3): 425-434.
- Dai Qionghai, Fu Changjun, Ji Xiangyang. Research on compressed sensing [J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(3): 425-434.
- [13] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathe Matique, 2008, 346(9): 589-592.
- [14] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [J]. Constructive Approximation, 2008, 28(3): 253-263.
- [15] Stojnic M, Xu W, Hassibi B. Compressed sensing-probabilistic analysis of a null-space characterization [C] // Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on. [s. l.]:IEEE, 2008: 3377-3380.
- [16] Candès E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969.
- [17] Donoho D L, Stark P B. Uncertainty principles and signal recovery[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1989, 49(3): 906-931.
- [18] Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via minimization[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003, 100(5): 2197-2202.
- [19] Donoho D L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal  $l_1$ -norm solution is also the sparsest solution[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(6): 797-829.
- [20] Strohmer T, Heath R W. Grassmannian frames with applications to coding and communication[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003, 14(3): 257-275.
- [21] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM review, 2001, 43(1): 129-159.
- [22] Yin W, Osher S, Goldfarb D, et al. Bregman iterative algorithms for  $l_1$ -minimization with applications to compressed sensing[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(1): 143-168.
- [23] Neff R, Zakhor A. Very low bit-rate video coding based on matching pursuits[J]. Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on, 1997, 7(1): 158-171.
- [24] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [25] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩传感理论与重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142-148.
- Yang Hairong, Zhang Cheng, Ding Dawei, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm [J]. ACTA Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142-148.
- [26] 李树涛, 魏丹. 压缩感知综述[J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369-1377.
- Li Shutao, Wei Dan. A survey on compressive sensing[J]. ACTA Automatica Sinica, 2009, 35(11): 1369-1377.
- [27] Tsaig Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 549-571.
- [28] Bajwa W U, Haupt J D, Raz G M, et al. Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]// Statistical Signal Processing, 2007. SSP07. IEEE/SP 14th Workshop on. [s. l.]:IEEE, 2007: 294-298.
- [29] Devore R A. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. Journal of Complexity, 2007, 23(4): 918-925.
- [30] Tropp J A. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [31] 赵瑞珍, 秦周, 胡绍海. 一种基于特征值分解的测量矩阵优化方法[J]. 信号处理, 2012, 28(5): 653-658.
- Zhao Ruizhen, Qin Zhou, Hu Shaohai. An optimization method for measurement matrix based on eigenvalue decomposition [J]. Signal Processing, 2012, 28(5): 653-658.
- [32] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing[J]. Signal Processing, 2012, 92(3): 999-1009.
- [33] Yu L, Li G, Chang L. Optimizing projection matrix for compressed sensing systems[C] // Information, Communications and Signal Processing (ICICSP) 2011 8th International Conference on. [s. l.]: IEEE, 2011: 1-5.
- [34] Xu J, Pi Y, Cao Z. Optimized projection matrix for compressive sensing[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, 2010: 43-51.
- [35] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Makkiabadi B, et al. On optimization of the measurement matrix for compressive sensing[C]// Proc European Signal Processing Conf. Poland;EUSIPCO,2010: 427-431.

- [36] Abolghasemi V, Jarchi D, Sanei S. A robust approach for optimization of the measurement matrix in compressed sensing [C] // Cognitive Information Processing (CIP), 2010 2nd International Workshop on. [s. l.]:IEEE, 2010: 388-392.
- [37] Welch L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 1974, 20(3): 397-399.
- [38] Rosenfeld M. In praise of the Gram matrix [M] The Mathematics of Paul Erds II. Berlin Heidelberg, Springer 1997: 318-323.
- [39] Tropp J A, Dhillon I S, Heath R W, et al. Designing structured tight frames via an alternating projection method [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2005, 51(1): 188-209.
- [40] Petersen K B, Pedersen M S. The matrix cookbook [EB/OL]. <http://matrixcookbook.com>, 2012-12-15.
- [41] Nhat V D M, Challa S, Lee S Y. Efficient projection for compressed sensing [C] // Computer and Information Science, 2008. ICIS 08. Seventh IEEE/ACIS International Conference on. [s. l.]:IEEE, 2008: 322-327.

**作者简介:**郑红(1961-),女,教授,研究方向:模式识别、故障诊断、嵌入式系统、压缩感知,等,E-mail: julyanna@vip.sina.com;李振(1983-),男,博士研究生,研究方向:压缩感知、模式识别、机器视觉等,E-mail: lizhen\_buaa@126.com。

