

文章编号:1004-9037(2013)03-0358-05

# PEG-GLDPC 码设计与性能分析

王 平 朱宏鹏 李广侠

(解放军理工大学通信工程学院卫星通信重点实验室,南京,210007)

**摘要:**针对深空通信中高信道编码增益的需求,设计了一种新颖的基于按边增长(Progressive edge-growth, PEG)算法的广义低密度奇偶校验(Generalized LDPC, GLDPC)码。基于稀疏矩阵的二分图,首先改进了PEG算法用以构造规则LDPC,然后用BCH码作子码替换LDPC中的单奇偶校验码来构造PEG-GLDPC,最后重点研究了PEG-GLDPC的译码算法,提出一种联合BCH比特栅格译码与置信传播(Belief propagation, BP)算法的迭代译码机制。AWGN信道下的仿真结果表明,PEG-GLDPC译码性能优于LDPC以及传统GLDPC,适用于深空通信等低信噪比通信系统。

**关键词:**信道编码;PEG算法;迭代译码;置信传播;最大后验概率译码

中图分类号:TN911.22

文献标志码:A

## Design and Performance Analysis of PEG-GLDPC

Wang Ping, Zhu Hongpeng, Li Guangxia

(Key Laboratory of Satellite Communications, Institute of Communication Engineering,  
PLA University of Science and Technology, Nanjing, 210007, China)

**Abstract:** A novel generalized LDPC (GLDPC) code based on progressive edge-growth (PEG) algorithm is proposed to meet the demand of channel high coding gain in deep space communications. Based on the bipartite graph, PEG-GLDPC takes the regular LDPC constructed with modified PEG algorithm as a base matrix, and BCH is used as component code to replace single parity check codes in LDPC. PEG-GLDPC is iteratively decoded using belief propagation (BP) algorithm with a combination of trellis-based decoding of BCH. Simulation results over an (AWGN) channel indicate that the decoding performance of PEG-GLDPC is better than those of LDPC and traditional GLDPC, and it can be applied to low SNR communication systems such as deep space communication.

**Key words:** channel coding; progressive edge growth algorithm; iterative decoding; belief propagation; maximum a posteriori probability

## 引 言

在深空通信中,由于通信距离的大幅增加,通信信号的自由空间传播损耗很大,接收信号的信噪比极低,通信系统所处理的信号强度极其微弱。因此,提高系统的功率利用效率是深空通信系统设计需要考虑的最重要问题之一,而信道编码则是一种有效提高功率利用率的方法。低密度奇偶校验(Low density parity check, LDPC)是一类具有稀疏校验矩

阵的线性分组纠错码,目前已被许多卫星通信标准采纳,并应用到深空通信领域。例如,国际空间数据系统咨询委员会(Consultative committee for space data systems, CCSDS)推荐采用ARA LDPC用于深空通信系统,我国嫦娥二号探月任务中采用了LDPC编码,LDPC首次应用于我国深空探测领域。然而随着深空探测距离的增大和数据传输速率的提高,LDPC码将不能满足未来深空通信中高信道编码增益的需求,具有简单编码结构的QC-LDPC<sup>[1]</sup>也难以获得逼近信道容量极限的译码性能。

**基金项目:**国家高技术研究发展计划(“八六三”计划)(2012AA121605)资助项目;国家自然科学基金(61032004, 60972061)资助项目。

**收稿日期:**2012-09-13; **修订日期:**2012-12-20

广义低密度奇偶校验 (Generalized LDPC, GLDPC) 码由 Lentmaier<sup>[2]</sup> 和 Boutros<sup>[3]</sup> 于 1999 年分别独立提出,在迭代译码下具有优越的纠错性能。在 GLDPC 的 Tanner 图中,校验节点为一个线性分组码的约束,而不是单奇偶校验码,因此称 GLDPC 的校验节点为广义校验节点,该线性分组码被称为 GLDPC 的子码。最近有不少学者采用不同的子码(如 BCH,RS,RM)对 GLDPC 进行了研究<sup>[4-7]</sup>。上述研究均以 Gallager 方法构造的 LDPC 为基矩阵,基矩阵存在大量的短环,从而影响了 GLDPC 的译码性能,无法满足深空通信高编码增益的要求。本文从低信噪比通信系统的设计需求出发,以提高 GLDPC 译码性能为目标,采用按边增大(Progressive edge-growth, PEG)算法构造规则 LDPC 码,然后以 BCH 为子码对其进行扩展,构造出 PEG-GLDPC 码。PEG-GLDPC 结构灵活,可根据系统设计需要灵活选择相应的码长和恰当的子码。采用基于比特栅格和 BP 算法的迭代联合译码机制,获得了较好的译码性能。

### 1 GLDPC 介绍

传统 GLDPC 奇偶校验矩阵的构造可以分为两个步骤:首先采用 Gallager 方法构造低密度奇偶校验基矩阵  $H_b(N, J, n)$ , 其中  $N$  为码长,  $J$  为列重,  $n$  为行重, 如图 1(a) 所示; 然后选取子码  $C_0(n, k)$ ,  $k$  为子码信息位长度, 并将  $H_b$  每一行中的“1”用子码的校验矩阵  $H_0$  的某一系列替换, “0”用全零列矢量替换, 如图 1(b) 所示。若校验矩阵为满秩, 则构造的 GLDPC 码率为

$$R = 1 - (n - k) \frac{J}{n} = 1 - J \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \quad (1)$$

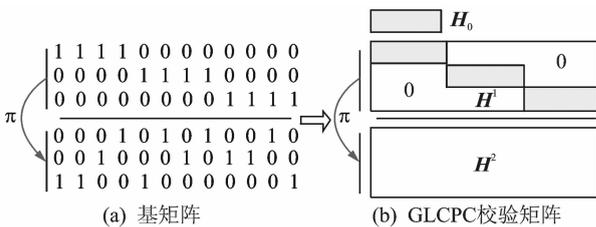


图 1 GLDPC 校验矩阵的构造

若 LDPC 的低密度校验矩阵采用 Gallager 分层构造方法,也将每一层的  $N/n$  个分量码的直和称为一个超码。包含 3 个超码的 LDPC(12, 3) 的 Tanner 图如图 2 所示,以 Gallager 方法为基矩阵的 GLDPC 的 Tanner 图如图 3 所示。需要指出的是,若低密度校验矩阵采用其他的方法构造,GLDPC 码未必可以分解为若干超码。

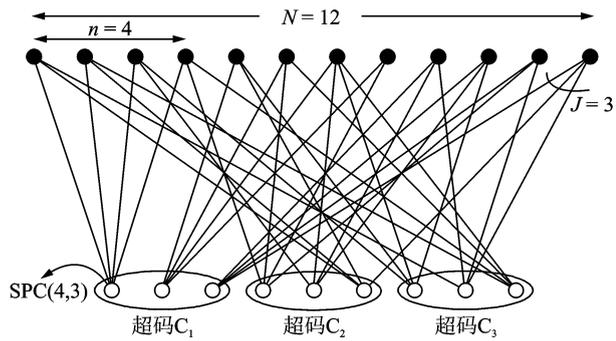


图 2 Gallager LDPC(12, 3) 的 Tanner 图

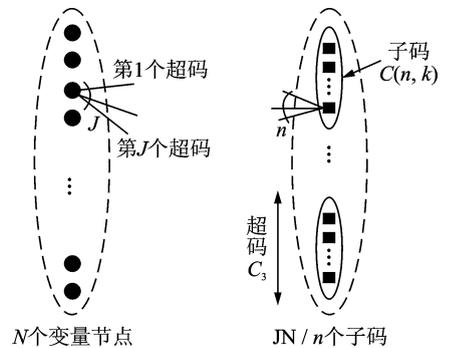


图 3 GLDPC 的 Tanner 图

$J=2$  的 GLDPC 在最小距离意义上是渐近最优的<sup>[3]</sup>, 因此目前构造的 GLDPC 多以  $J=2$  的基矩阵构造。然而当  $J=2$  时,由 Gallager 方法构造的规则 LDPC 码存在一定数量的 4 环,环长特性差,影响译码性能。改进基矩阵的环长特性则可进一步提高 GLDPC 的性能。PEG 算法构造 LDPC 码时,在增加边的同时可尽力拉大最小环长,由 PEG 算法构造的中长 LDPC 码可将 4 环完全消除<sup>[8]</sup>。因此,本文选取 PEG 算法生成 GLDPC 的基矩阵。

### 2 PEG-GLDPC 码构造

构造 PEG-LDPC 的过程就是获得其校验矩阵的过程,PEG-GLDPC 的校验矩阵可以通过以下 3 个步骤获取:(1)根据 PEG 算法构造规则 LDPC 的校验矩阵,以其为基矩阵;(2)选取子码;(3)用子码校验矩阵的列向量替换 LDPC 校验矩阵中的“1”。

#### 2.1 回退型 PEG 算法

PEG 算法又称按边增长算法,它增加边的方法是在可选集中选择具有最少连接边的校验节点进行连接,最终构造的 LDPC 变量节点度分布一致,而校验节点度分布有所波动,并非严整意义上

的规则 LDPC。在 GLDPC 中,基矩阵的校验节点要求有完全一致的度分布。因此,为构造规则 LDPC 码  $H_b(N, J, n)$ ,本文提出一种回退型 PEG 算法。回退型 PEG 算法对传统 PEG 算法进行了修改,其主要特点是在增加新边时遵循以下两个原则:

- (1)若可选集最少连接边的校验节点已达到校验节点度分布数,则选择次少连接边的校验节点;
- (2)若可选集中所有校验节点都已达到校验节点度分布数,则回退一层。

## 2.2 PEG-GLDPC 校验矩阵构造

下面举例给出 (14,12)PEG-GLDPC 的构造过程。如图 4 所示,首先采用回退型 PEG 算法构造 (14,2,7)规则 LDPC 码作为基矩阵,然后将校验矩阵每行中的“1”随机用 (7,4)BCH 校验矩阵的列替换,“0”用三维全零列矢量替换。基矩阵同一列中的“1”需用子码校验矩阵不同的列来替换。

$$H_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) 回退型 PEG 算法构造 (14, 2, 7) 基矩阵

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (7, 4) BCH 码校验矩阵

$$H_{GLDPC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) (14, 12)PEG-GLDPC 校验矩阵

图 4 (14, 2) PEG-GLDPC 校验矩阵的构造过程

## 3 联合译码算法

PEG-GLDPC 码的译码分为两个层次:(1)子码的软译码,(2)基矩阵的迭代译码。受 GLDPC 码率和基矩阵行重的限制,GLDPC 码的子码多为短码且具有高码率,可采用基于比特栅格的最后验概率译码(Maximum a posteriori probability, MAP)算法或基于似然码字列表的 Chase 算法<sup>[9]</sup>进行译码。Chase 算法虽然复杂度低但是次优的,

为提高译码准确性本文选取 MAP 算法对子码进行译码。基矩阵的迭代译码选取 BP 算法,BP 算法是一种基于似然信息传播机制的迭代译码算法。采用 BCH 比特栅格译码与 BP 迭代算法联合译码机制对 PEG-GLDPC 进行译码过程中,信息传递机制如图 5 所示。

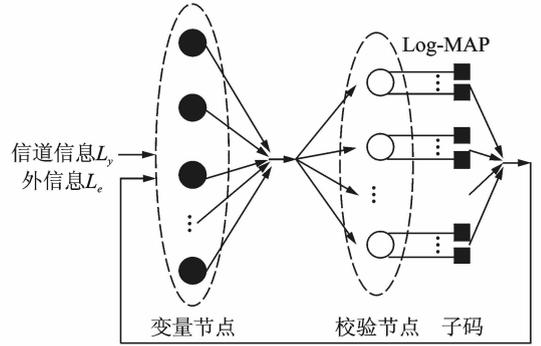


图 5 PEG-GLDPC 迭代译码中的信息传递机制

### 3.1 子码 BCH 的 Log-MAP 译码

MAP 算法根据对数似然比函数(Log likelihood ratio, LLR)判决每个码比特  $v_i$  的值<sup>[10]</sup>, LLR 定义如下

$$L(v_i) = \log \frac{\sum_{(s', s) \in B_i^1(C)} \alpha_i(s') \gamma_i(s', s) \beta_{i+1}(s)}{\sum_{(s', s) \in B_i^0(C)} \alpha_i(s') \gamma_i(s', s) \beta_{i+1}(s)} \quad (2)$$

为去除式(2)中的大量乘法运算,本文采用 Log-MAP 译码算法,Log-MAP 算法依据式(3)对式(2)进行了简化,变乘法为加法,在译码准确性下降不大的同时可降低复杂度。

$$\log(e^{\delta_1} + e^{\delta_2}) = \max\{\delta_1, \delta_2\} + \log(1 + e^{-|\delta_2 - \delta_1|}) \quad (3)$$

### 3.2 PEG-GLDPC 的联合译码机制

假设发送的信息为  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ ,采用 BPSK 调制后,对应的双极性信号表示为  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$ ,  $c_i = 1 - 2v_i = \pm 1$ 。经过 AWGN 信道后,译码端收到的软判决信息为  $r = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})$ ,  $r = c + u$ ,其中  $u$  均为均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。变量节点的初始 LLR 信息可通过式(4)计算得到

$$L_{ch}(i) = \ln \frac{P(c_i = 1 | r_i)}{P(c_i = -1 | r_i)} = \ln \frac{1 + \exp\left(\frac{2r_i}{\sigma^2}\right)}{1 + \exp\left(\frac{-2r_i}{\sigma^2}\right)} = \frac{2r_i}{\sigma^2} \quad (4)$$

式中: $\Gamma(i)$ 为与变量节点  $v_i$  相连的广义校验节点的集合, $\Lambda(j)$ 为与广义校验节点  $c_j$  相连的变量节点的集合, $\phi_i^k(j)$ 和  $\eta_j^k(i)$ 分别为变量节点  $v_i$  向广义校验节点  $c_j$  和广义校验节点  $c_j$  向变量节点  $v_i$  传输的 LLR 信息,其中  $t$  为当前迭代次数。基于 Log-MAP 的 BP 算法可以表述如下:

**步骤 1** 初始化。通过式(4)计算每个变量节点的初始 LLR 信息  $L^0(i)=L_{ch}(i)$ ,变量节点向广义校验节点发送初始信息值  $\phi_i^0(j)=L^0(i)$ ,作为子码 Log-MAP 译码时的输入信息。

**步骤 2** 子码 Log-MAP 译码。更新第  $t$  次广义校验节点  $c_j$  对应的子码经 Log-MAP 译码后传输给与其相连的变量节点  $v_i$  的外信息

$$\eta_j^t(i) = f_{\text{Log-MAP}}(\phi_{\Lambda(j)}^{t-1})/\theta \quad (5)$$

式中: $f_{\text{Log-MAP}}$ 为子码 Log-MAP 译码公式, $\theta$ 为修正因子( $\theta>1$ ),用以修正 Log-MAP 输出的外信息值。修正因子  $\theta$  目前没有既成公式,表 1 给出了不同的修正因子取值对码长为 960 的 PEG-GLDPC 误码率的影响。在实际应用中,需根据码长和信道条件选取恰当的  $\theta$  值,进行自适应调整。

表 1 修正因子对误码率的影响

归一化因子	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
误码率/ $10^{-6}$	3.85	3.69	3.45	2.96	3.25	3.64

**步骤 3** 广义校验节点更新。变量节点  $v_i$  向广义校验节点  $c_j$  传输的外信息为

$$\phi_i^t(j) = L_{ch}(i) + \sum_{\substack{j \in \Gamma(i) \\ j}} \eta_j^t(i) \quad (6)$$

**步骤 4** 判决。经过第  $t$  次迭代后,变量节点  $v_i$  获得的后验对数似然比为

$$L^t(i) = L_{ch}(i) + \sum_{j \in \Gamma(i)} \eta_j^t(i) \quad (7)$$

根据  $L^t(i)$ 得到第  $t$  次迭代的输出序列,如果  $L^t(i) \geq 0, \hat{c}_i=0$ ;否则  $\hat{c}_i=1$ 。如果输出序列满足校验方程,译码成功,终止迭代,否则  $t=t+1$ ,跳转至步骤 2。

### 4 仿真结果与分析

在 AWGN 信道条件下,对 PEG-GLDPC 进行仿真,并与 LDPC 码和基于 Gallager 算法构造的传统 GLDPC 进行比较。本文选取规则 GLDPC 为研究对象,需要指出的若研究非规则 GLDPC,需进行度分布优化设计,在用 EXIT 图法设计 GLDPC 的度分布时,需同时考虑 LDPC 码和子码的 EXIT 函数。

用 PEG 算法构造 (420, 2, 15) 规则 LDPC

码,并用 (15, 11, 3) BCH 码作子码进行扩展,产生的 PEG-GLDPC 码长为 420,码率 0.467。误码率曲线如图 6 所示,PEG-GLDPC 性能优于 PEG 算法构造的 LDPC 和文献[3]中构造的传统 GLDPC。同样用 (15, 11, 3) BCH 码作子码,对 PEG 算法构造的 (960, 2, 15) 规则 LDPC 码进行扩展,得到码长 960,码率 0.467 的 PEG-GLDPC。误码率曲线如图 7 所示,与文献[2]中构造的传统 GLDPC 相比,PEG-GLDPC 的误码性能明显改善。采用文献[11]中的度分布构造 1/2 码率的 PEG-GLDPC,码长为 1 000 000 的误码率曲线如图 8 所示,与 PEG 算法构造的 LDPC, QC-LDPC, 传统 GLDPC 相比,PEG-GLDPC 码的译码性能最佳,与香农限(0.184 dB)距离最近。

表 2 给出了上述两种码字基矩阵的环长特性对比,通过表 2 不难发现,较之传统 GLDPC,码长为 960 的 PEG-GLDPC 性能改善较大,是由于基矩阵完全消除了 4 环和 6 环,提高了 BP 译码的准确度。实际上,消除 4 环可以大幅提高译码准确度,消除 6 环也可以提高译码准确度,然而环长越

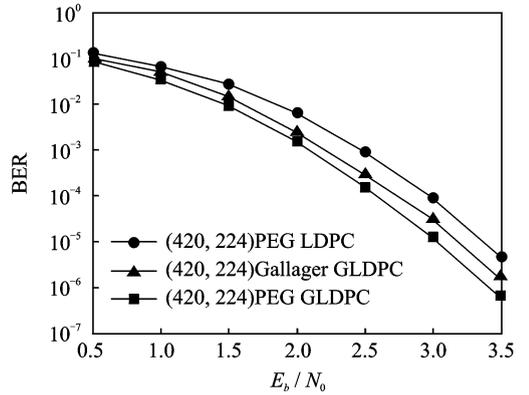


图 6 (420, 196)GLDPC 码性能曲线

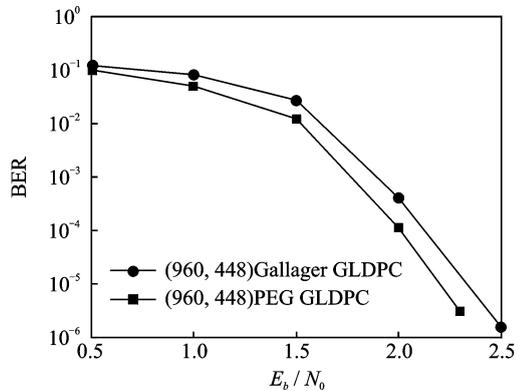


图 7 (960, 448)GLDPC 码性能曲线

大对译码准确度的影响越小,所以尽管码长为 960 的 PEG-GLDPC 基矩阵含有大量 8 环,但对译码准确度的影响已经不大。

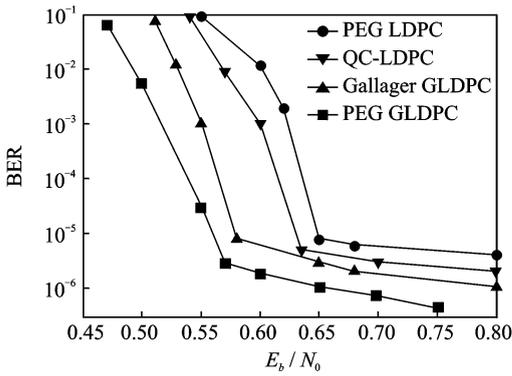


图 8 1/2 码率、1 000 000 码长的 GLDPC 码性能曲线

表 2 基矩阵的环长特性

基矩阵	环长		
	4	6	8
Gallager LDPC (420, 2, 15)	99	0	9 963
回退型 PEG LDPC (420, 2, 15)	0	102	5 010
Gallager LDPC (960, 2, 15)	90	0	9 552
回退型 PEG LDPC (960, 2, 15)	0	0	3 018

## 5 结束语

本文基于 PEG 算法构造了 GLDPC 码,并提出了适用于该码字的译码算法。对不同码长的 PEG-GLDPC 进行了仿真,结果表明,PEG-GLDPC 的译码性能优于 LDPC 和传统 GLDPC,适用于深空通信等点对点低信噪比通信系统。究其原因,GLDPC 码采用子码校验,而不是 LDPC 码的单奇偶校验,因此其比 LDPC 码具有更强的纠错能力。而与传统 GLDPC 相比,PEG-GLDPC 的基矩阵具有更好的环长特性,因此,其译码性能在三者中最优。本文主要从环长特性方面对 GLDPC 进行了改进,后续工作将研究如何从外信息、陷阱集等方面对 GLDPC 进行改进。

### 参考文献:

- [1] 傅婷婷,吴湛击,王文博. 基于 PEG 算法的准循环 LDPC 码的编码构造方法[J]. 数据采集与处理, 2009, 24(S1):190-194.  
Fu Tingting, Wu Zhanji, Wang Wenbo. PEG-based construction method for 1uasi-cyclic LDPC[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2009, 24

(S1): 190-194.

- [2] Lentmaier M, Zigangirov K S. On generalized low-density parity check codes based on Hamming component codes [J]. IEEE Communications Letter, 1999, 3(8): 248-250.  
[3] Boutros J, Pothier O, Zkmort G. Generalized low-density (Tanner) codes[C]// Proceeding IEEE ICC. Vancouver; Curran Associates Inc., 1999; 441-445.  
[4] Chilappagari S K, Nguyen D V, Vasic B, et al. On trapping sets and guaranteed error correction capability of LDPC codes and GLDPC codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1600-1611.  
[5] Bocharova I E, Hug F, Johannesson R, et al. Double-Hamming based QC LDPC codes with large minimum distance[C]// 2011 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings. Saint-Petersburg: IEEE Express Conference Publishing, 2011: 923-927.  
[6] Yue Guosen, Ping Li, Wang Xiaodong. Generalized low-density parity-check codes based on Hadamard constraints[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(3): 1058-1079.  
[7] Abu-Surra S, Divsalar D, Ryan W E. On the typical minimum distance of generalized LDPC convolutional codes based on protographs[C]// ISIT 2010. Texas: IEEE Express Conference Publishing, 2010: 709-713.  
[8] Hu Xiaoy, Eleftheriou E, Arnold D M. Regular and irregular progressive edge-growth Tanner graphs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 386-398.  
[9] 郑贺,陆佩忠,胡捍英. 基于二分图的乘积码迭代译码算法[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(1): 86-91.  
Zheng He, Chen Peizhong, Hu Hanying. Iterative decoding algorithm for product codes based on bipartite graphs[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2006, 28(1):86-91.  
[10] Lin S, Costello D J. Error control coding[M]. London: Prentice Hall, 2007: 711-715.  
[11] Wang Yige, Fossorier M. Doubly generalized LDPC codes over the AWGN channel[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 57(5): 1312-1319.

作者简介:王平(1989-),女,硕士研究生,研究方向:卫星通信,E-mail:wpings@163.com;朱宏鹏(1982-),男,博士,讲师,研究方向:卫星通信;李广侠(1964-),男,教授,博士生导师,研究方向:卫星通信和卫星导航。