

文章编号:1004-9037(2013)03-0342-05

# 基于粒子筛选处理的粒子滤波改进算法

赵义正

(电子工程学院 607 室,合肥,230037)

**摘要:**针对粒子滤波中的粒子贫化问题,分析了目前用于增加粒子多样性方法存在的不足,提出了一种新的粒子筛选与处理方法。通过设置筛选区间,保留该区间内的粒子,对区间外的粒子进行移动处理,从而改善粒子分布。仿真结果表明,该方法能够有效缓解粒子贫化问题,提高滤波精度。同时由于有效样本数增加,降低了重采样次数,总体上减少了算法运行时间。

**关键词:**粒子滤波;似然函数;粒子贫化

**中图分类号:**TP391      **文献标志码:**A

## Improved Particle Filter Based on New Particle Selection and Process Strategy

Zhao Yizheng

(Lab 607, Electronic and Engineering Institute, Hefei, 230037, China)

**Abstract:** To solve the particle impoverishment problem in particle filter (PF), an improved algorithm is proposed based on a new particle selection and process strategy. By choosing filtering interval, the predicted particles falling into the desired interval are accepted, and the others outside the interval are corrected by concentrating them from remote areas to high likelihood areas of probability density function. Experimental results show that the new algorithm increases the filtering accuracy, compared with standard PF. Meanwhile, as the number of effective particle increases, the requirement of resampling operation is decreased, thus reducing the computational time.

**Key words:** particle filter; likelihood function; sample impoverishment

## 引 言

粒子滤波(Particle filter, PF)是一种基于贝叶斯估计的蒙特卡罗仿真方法,在处理非线性、非高斯时变系统的参数估计和状态滤波问题方面有独特优势和广阔前景,已成为非线性估计领域的一个热门研究方向<sup>[1-2]</sup>。

然而目前粒子滤波算法存在着一个主要缺陷,即粒子贫化问题。粒子贫化使得粒子集无法充分表征状态的后验概率分布,严重影响滤波精度。如何克服粒子贫化问题,是提高粒子滤波性能的关键<sup>[3-4]</sup>。目前人们已提出多种方法改进粒子多样性,降低粒子贫化程度,如马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain monte carlo, MCMC)移动策略、

正则采样粒子滤波、裂变繁殖方法、unscented 粒子滤波等,这些方法虽然可以增强粒子的多样性,但同时会使计算量急剧增大甚至导致滤波器发散<sup>[5-6]</sup>。

本文针对粒子贫化问题,提出了一种基于粒子筛选处理的 PF 改进算法,建立了用于粒子筛选的筛选区间。通过保留该区间内粒子,对区间外的小权值粒子进行移动处理,改善了粒子分布,有效克服了粒子贫化问题,提高了滤波精度。同时由于有效样本数增加,减少了重采样次数,总体上减少了算法运行时间。

## 1 标准粒子滤波算法

粒子滤波是基于贝叶斯思想,通过非参数化的

Monte Carlo 模拟方法实现递推贝叶斯估计。它引入一个已知的并易于采样的重要性密度函数  $q(x_{0:k} | y_{0:k})$  来替代后验概率密度函数,进行粒子的采样和权值更新,每一个粒子的位置和权值信息反映了状态空间在该区间的密度。随着粒子数目的增加,带权重粒子集逐渐逼近状态的后验概率密度函数,并达到最优贝叶斯估计效果。用数学语言可描述如下。

在状态空间中,对如下系统模型和观测模型

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x}$  表示  $k$  时刻的状态向量;  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^{n_y}$  表示观测向量;  $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbf{R}^{n_w}$  和  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^{n_v}$  分别为过程噪声和观测噪声;  $f_k: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_w} \rightarrow \mathbf{R}^{n_x}$  表示系统方程;  $h_k: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_v} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$  表示观测模型。滤波的目的就是通过从时间 1 到  $k$  的观测值来估计当前的最优状态  $\mathbf{x}_k$ 。

粒子滤波器采用一个加权的样本集合  $\{\mathbf{x}_{0:k}^i, \tilde{\omega}_k^i\}_{i=1}^N$  来表示所需的后验密度函数  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ , 其中样本  $\{\mathbf{x}_{0:k}^i, i=1, \dots, N\}$  称为“粒子”, 样本的权值为  $\{\tilde{\omega}_k^i, i=1, \dots, N\}$ , 且  $\sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i = 1$ 。则粒子滤波中状态的后验概率密度可近似表示为

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i \cdot \delta(\mathbf{x}_{0:k} - \mathbf{x}_{0:k}^i) \quad (3)$$

如果样本  $\mathbf{x}_{0:k}^i$  是从重要密度函数  $q(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$  中采样所得, 则  $\tilde{\omega}_k^i$  可表示为

$$\tilde{\omega}_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j} \quad (4)$$

其中

$$\omega_k^i \propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^i | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}^i | \mathbf{y}_{1:k})} = \omega_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{0:k})} \quad (5)$$

其中建议分布  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{0:k})$  的选择非常重要, 通常选择为先验分布  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ , 于是式(5)可简化为

$$\omega_k^i \propto \tilde{\omega}_{k-1}^i p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) \quad (6)$$

粒子滤波中普遍存在着“权值退化”现象<sup>[4]</sup>, 即随着时间的增加, 重要性权值的方差会不断增大, 使得粒子的权重集中到少数粒子上。这就意味着大量的工作浪费在对求解后验概率几乎不起作用的粒子更新上。权值退化程度可用有效样本数  $N_{\text{eff}}$  来度量, 其定义如下

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{var}(\omega_k^{*i})} \quad (7)$$

式中:  $\omega_k^{*i} = p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{z}_{1:k}) / q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$  称为“真实权值”, 通常该式无法精确计算。因此, 通常采用近似表达式

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{\omega}_k^i)^2} \quad (8)$$

如果有效样本数越小, 则退化越严重。当  $\hat{N}_{\text{eff}}$  小于阈值  $N_{\text{th}}$ , 采用重采样技术, 可以减少权值退化的不利影响。重采样算法的思想是通过粒子数和相应权值表示的概率密度函数重新采样, 增加权值大的粒子数, 减少权值小的粒子数, 从而减小权值方差<sup>[3]</sup>。然而重采样的副作用也很明显, 它导致样本枯竭, 即有较大权值的粒子被多次选择, 采样结果中包含了许多重复点, 从而损失了粒子的多样性, 导致粒子贫化。就此问题, 目前研究者已提出 MCMC 移动策略、正则采样粒子滤波、裂变繁殖方法、unscented 粒子滤波等方法, 虽然这些方法可以增强粒子的多样性, 但同时会导致计算量急剧增大, 影响滤波的实时性。

## 2 改进的粒子滤波算法

针对标准粒子滤波算法会导致粒子贫化的缺点, 且现有改进算法的计算开销太大, 本文提出基于粒子筛选处理的粒子滤波改进算法(Particle filter-desired region, PF-DR)。通过观测信息, 设置粒子所处的合理区间, 保留该区间内的粒子, 并对区间外的粒子进行移动, 从而使更多的粒子分布于似然度高的区间, 提高滤波精度。同时, 由于用似然度高的粒子替代似然度小的粒子, 既可避免对无用粒子的更新计算, 又使得粒子权值方差变小, 有效样本数增多, 降低重采样次数。

### 2.1 基于筛选区间的粒子筛选处理方法

在 PF 算法的初始运行阶段, 粒子分布非常广泛, 其中部分粒子的分布偏离了似然函数分布。这部分粒子对于算法的精度几乎不起作用, 并且会浪费运算时间。为了对粒子进行筛选, 本文首先建立了粒子的筛选区间。

对于观测模型  $\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$ , 观测噪声  $\mathbf{v}_k$  服从高斯分布  $\mathbf{v}_k \sim N(0, R_v)$ , 假设观测值  $\mathbf{y}_k$  服从高斯分布,  $\mathbf{y}_k$  的概率密度函数可写为  $N(h(\mathbf{x}_k), \sigma^2)$ , 其中  $\sigma$  为正态分布方差。从数理统计知识可得到  $\mathbf{y}_k$  的置信区间为  $[h(\mathbf{x}_k) \pm \sigma z_{\alpha/2}]$ 。

即区间  $[h(\mathbf{x}_k) \pm \sigma z_{\alpha/2}]$  以概率  $1 - \alpha$  包含了  $\mathbf{y}_k$ , 当  $1 - \alpha = 97.5\%$ ,  $z_{\alpha/2} = 1.96$ ; 当  $1 - \alpha = 99\%$ ,

$z_{\alpha/2}=2.58$ 。本文利用该置信区间的形式来构造样本的筛选区间。如果观测噪声  $v_k$  的方差相对于观测设备的输出很小,则  $x_k$  的期望值可近似为  $h^{-1}(y_k)$ ,  $x_k$  所在的区间同时也包含了  $h^{-1}(y_k)$ 。因此,可构造如下包含  $h^{-1}(y_k)$  的区间作为  $x_k$  的筛选区间  $[h^{-1}(y_k) - \kappa\sqrt{R_v}, h^{-1}(y_k) + \kappa\sqrt{R_v}]$ 。其中  $\kappa$  为调节系数,用于调节筛选区间的大小,  $R_v$  为观测噪声方差。 $\kappa$  的取值与  $R_v$  的大小有关,通常选取  $\kappa=1\sim 6$ 。当确立了区间后,就可以用它来筛选并处理粒子。如果粒子位于筛选区间内,则接收该粒子;否则,对粒子进行处理,使粒子向筛选区间的中心区域移动。其移动方法如下

$$x_k^i = x_{k|k-1}^i + \lambda \cdot \text{rand} \cdot (h^{-1}(y_k) - x_{k|k-1}^i) \quad (9)$$

式中: $\lambda$  称为移动控制系数,  $0 < \lambda < 1$ , 控制粒子往  $h^{-1}(y_k)$  方向的移动步幅,它的取值对改进算法的运行时间和估计精度有着重要的影响;rand 为  $(0, 1]$  区间上的均匀分布随机数。

显然,在标准 PF 算法中有大量粒子位于筛选区间外,它们绝大多数对更新不起作用;经过筛选处理后,区间外的粒子被移动到了高似然概率区域,从而使得粒子的分布更为合理,有效提高了滤波性能。而且,有效粒子数增加,可以降低重采样频率,缩短计算时间。

## 2.2 基于粒子筛选处理的粒子滤波算法

基于粒子筛选处理的粒子滤波改进算法的完整步骤如下:

(1)初始化(令  $k=0$ ) 从初始分布  $p(x_0)$  中采样  $N$  个粒子  $x_0^i, \omega_0^i = \frac{1}{N}, i=1, 2, \dots, N$ 。

(2)预测 根据状态方程得预测粒子:  $x_{k|k-1}^i = f(x_{k-1}^i, w_{k-1}^i)$ , 其中  $w_{k-1}^i \sim p(w_{k-1})$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ 。

(3)区间预筛选及处理 由式(8)求出粒子的筛选区间  $I$ ; 如果  $x_{k|k-1}^i \in I$ , 则选择  $x_k^i = x_{k|k-1}^i$ ; 否则,按照式(8)移动粒子。

(4)权值更新 计算重要性权值:  $\omega_k^i = \omega_{k-1}^i p(y_k | x_k^i)$ , 并归一化:  $\tilde{\omega}_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j}$ 。

(5)判断是否执行重采样过程 计算有效样本数  $\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{\omega}_k^i)^2}$ , 如果  $\hat{N}_{\text{eff}} > N_{\text{th}}$ , 转到步骤 7。

(6)重采样 根据权值大小从粒子集合中取新粒子  $x_k^{i*}$ , 满足  $P_r(x_k^{i*} = x_k^j) = \tilde{\omega}_k^j, i=1, 2, \dots, N_s$ , 并设置  $x_k^i = x_k^{i*}, \tilde{\omega}_k^i = \frac{1}{N}$ 。

(7)输出 输出一组带权值粒子集,并得到相应的估计值。

后验概率密度估计:  $p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i \cdot \delta(x_k - x_k^i)$

$$\text{状态估计: } \hat{x}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i x_k^i$$

$$\text{方差估计: } P_k = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i (x_k^i - \hat{x}_k)(x_k^i - \hat{x}_k)^T。$$

(8)循环控制 若结束则退出本算法;否则,令  $k=k+1$ ,转到步骤(2)。

## 3 仿真实验与结果分析

为了验证改进算法的有效性,采用一种典型非静态增长的非线性模型<sup>[7-8]</sup>进行实验,该模型是研究比较各种粒子滤波算法性能的常用模型之一,其状态方程和观测方程如下。

状态方程

$$x_k = 0.5x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2(k-1)) + w_k \quad (10)$$

观测方程

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (11)$$

式中:  $w_k$  和  $v_k$  分别为系统噪声和量测噪声,都为零均值高斯白噪声,协方差分别为  $Q=10.0$  和  $R=1.0$ 。假设初始状态  $x_0=0.1$ , 初始概率密度  $p(x_0)=N(0.1, 2)$ 。

实验中,蒙特卡罗仿真次数  $MC=100$  次,时间阶数  $T=50$ ,采用多项式重采样算法,有效样本数阈值  $N_{\text{th}}=N/3$ ,  $N$  为实验中的粒子数,区间调节系数  $\kappa=2$ ,控制系数取值范围为:  $0 < \lambda < 1$ 。

实验 1 移动控制系数  $\lambda$  的取值

图 1 为 PF-DR 算法运行时间与  $\lambda$  的关系图。算法平均运行时间  $T$  定义如下

$$T = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^T T_k^j \quad (12)$$

式中:  $T_k^j$  为第  $j$  次蒙特卡罗仿真中估计第  $k$  时刻状态所耗时间;  $M$  为仿真次数。

可以看出 PF-DR 的时间开销随着  $\lambda$  增大而减少。这是由于当  $\lambda$  由 0 到 1 增大时,筛选区间外的粒子更多的向高似然度区域移动,有效样本数逐渐增多,所需重采样次数逐渐减少,因此对 PF-DR 而言,时间开销随  $\lambda$  递增呈递减趋势。

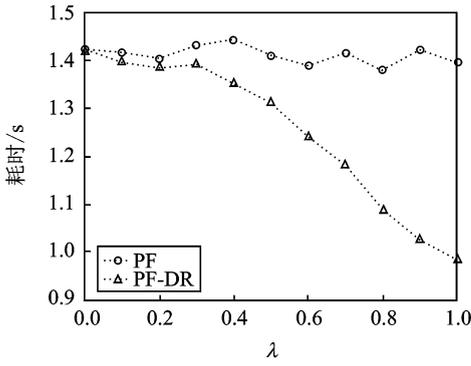


图 1 PF-DR 算法平均运行时间与  $\lambda$  的关系

图 2 为 PF-DR 算法的状态估计均方根误差

$\overline{\text{RMSE}}$  与  $\lambda$  取值的关系图。 $\overline{\text{RMSE}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \text{RMSE}_j$ , 其中  $\text{RMSE}_j$  为第  $j$  次仿真的均方根误差, 表达式为

$$\text{RMSE}_j = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)'} \quad (15)$$

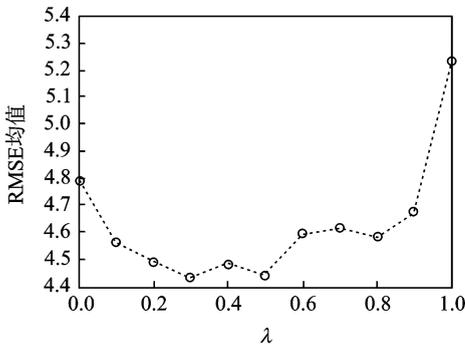


图 2 PF-DR 均方根误差的均值与  $\lambda$  的关系

从图中可以看出, 当  $\lambda=0.1 \sim 0.5$  时, 均方根误差值较小, 并且  $\lambda=0.3$  时, 均方误差值最小。这是因为对区间外粒子进行的移动处理比较适当, 将较远的粒子集中到高似然概率区域, 粒子分布更合理。而当  $\lambda \in (0.5, 1)$  时, 误差逐渐变大。这是由于  $\lambda$  越大, 对粒子的移动处理步幅越大, 导致粒子分布变化过大, 粒子集过度集中到较小区域, 失去了多样性, 反而降低了滤波精度。

因此,  $\lambda$  的取值要综合考虑运行时间和滤波精度, 一般取为  $0.3 \sim 0.5$ 。

**实验 2 改进算法与标准算法性能比较**

由实验 1 的结果, 综合考虑滤波精度和时间开销, 在实验 2 中 PF-DR 算法选取  $\lambda=0.3$ , 并与第 1 节中的标准 PF 算法做比较。

图 3 给出了两种算法的估计值与真实值对比

图, 从图中可看出, PF-DR 比标准 PF 算法的估计精度更高。

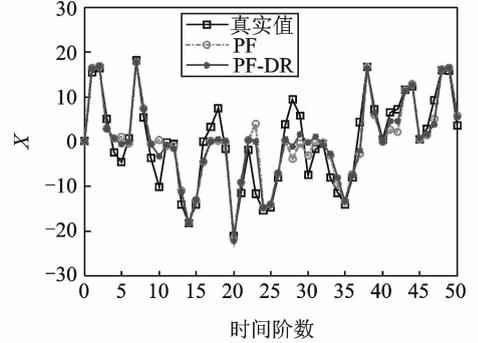


图 3 PF 和 PF-DR 算法的状态估计误差对比

图 4 给出了标准 PF 算法和 PF-DR 算法的  $\text{RMSE}_2$  误差对比图, 其中

$$\text{RMSE}_2(k) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\hat{x}_j(k) - x(k))(\hat{x}_j(k) - x(k))'} \quad (16)$$

$\text{RMSE}_2$  表示在时刻  $k$  运行  $M$  次蒙特卡罗仿真的均方误差。从图中可以看出, PF-DR 算法的  $\text{RMSE}_2$  误差明显低于标准 PF 算法, 说明本文算法的滤波精度比标准算法更高。

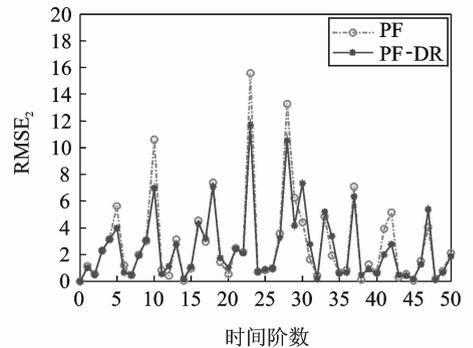


图 4 PF 和 PF-DR 的  $\text{RMSE}_2$  误差曲线对比

表 1 给出了经过 100 次独立的蒙特卡罗仿真实验, 两种算法的 RMSE 误差和时间开销对比。可以看出, PF-DR 算法的均方根误差均值和方差明显小于 PF 算法, 说明 PF-DR 算法的滤波精度优于 PF 算法, 并且具有更好的鲁棒性。在平均运行时间上, PF-DR 算法比 PF 算法耗时更少。这是因为改进算法虽然增加了区间筛选处理步骤, 但粒子经过移动处理后, 更多地落在了高似然度区域, 使得有效样本数增加, 从而减少重采样次数, 因此在总体上减少了计算时间。

上述仿真实验结果表明, PF-DR 算法引入了

**表 1 PF-DR 和 PF 算法 RMSE 误差与耗时比较(100 次蒙特卡罗仿真)**

算法	RMSE 均值	RMSE 方差	平均运行时间/s
PF	4.50	1.35	1.44
PF-DR	4.28	1.07	1.32

粒子筛选处理方法,使粒子分布更合理,缓解了权值退化和样本贫化。PF-DR 滤波精度更高,鲁棒性更好,并且减少了算法计算量。

## 4 结束语

本文研究了粒子滤波中的粒子贫化问题,分析了增加粒子多样性的常用方法及其不足,在此基础上提出了一种基于粒子筛选处理的粒子滤波改进算法(PF-DR),利用观测信息,设置粒子筛选区间,对预测粒子进行筛选,并对区间外的小权值粒子进行了移动处理,使粒子分布更加逼近状态后验概率密度函数,有效缓解了权值退化和粒子贫化。仿真结果表明,PF-DR 算法提高了滤波精度,估计精度优于标准 PF 算法,同时减少了重采样次数,降低了计算耗时。

### 参考文献:

- [1] 吴妹,刘思峰. 基于高斯粒子滤波法的 CIR 利率期限结构估计[J]. 数据采集与处理, 2011, 26(6): 697-701.
- Wu Shu, Liu Sifeng. Gaussian particle filter for estimation of CIR term structure of interest rates[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2011, 26(6): 697-701.
- [2] Cappe B O, Godsill S J, Moulines E. An overview of

existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. IEEE Proceedings, 2007, 95(5): 899-921.

- [3] Liang Xiaolong, Feng Jinfu. Ballistic missile tracking based on a swarm intelligent particle filter[J]. Electronic Optics & Control, China, 2009, 16(7): 29-32.
- [4] Wang Fasheng, Lin Yuejin. Improving particle filter with a new sampling strategy[C]//Proceedings of 2009 4th International Conference on Computer Science & Education. Nanning, China: IEEE Computer Society, 2009: 407-412.
- [5] Hlinka O, Sluciak O, Hlawatsch F M, et al. Likelihood consensus and its application to distributed particle filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(8): 4334-4349.
- [6] Saha S, Gustafsson F. Particle filtering with dependent noise processes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(9): 4497-4508.
- [7] 刘忠, 周丰, 石章松, 等. 纯方位目标运动分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- Liu Zhong, Zhou Feng, Shi Zhangsong, et al. Bearings-only TMA[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2009.
- [8] Wang Yafeng, Sun Fuchun, Zhang Youan, et al. Central difference particle filter applied to transfer alignment for SINS on missiles[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(1): 375-387.

**作者简介:**赵义正(1977-),男,博士,研究方向:机动目标跟踪、非线性滤波, E-mail: yi520@sohu.com。