

文章编号:1004-9037(2013)03-0294-07

基于 B 样条整体最小二乘的非线性多功能 传感器信号重构方法

刘 剑¹ 魏 国² 孙金玮²

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 南京, 210016; 2. 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院, 哈尔滨, 150001)

摘要:提出一种基于 B 样条整体最小二乘(Total least squares, TLS)的非线性多功能传感器信号重构新方法。该方法利用 B 样条基函数直接构建描述多功能传感器传递函数反函数的张量积 B 样条曲面;采用 TLS 求解超定方程组以获得稳定的控制系数估计。以二输入二输出多功能传感器模型为实验对象,在两种非线性情况下对多功能传感器的输入信号进行了重构,重构相对误差分别为 0.162% 和 1.043%,并与常用重构方法进行了对比分析。理论和实验表明,B 样条 TLS 重构方法对非线性多功能传感器传递函数的反函数具有良好的逼近性能,在信号重构中表现出较好的有效性。

关键词:多功能传感器;信号重构;B 样条;整体最小二乘

中图分类号:TP391.4

文献标志码:A

Signal Reconstruction of Nonlinear Multifunctional Sensor Based on B-Spline Total Least Squares Method

Liu Jian¹, Wei Guo², Sun Jinwei²

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,

Nanjing, 210016, China;

2. School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, China)

Abstract: B-spline total least squares (TLS) is proposed for signal reconstruction of the nonlinear multifunctional sensor. In the method, the tensor product B-spline surface for describing the inverse function of the nonlinear multifunctional sensor system transfer function, is directly constructed based on the B-spline basis functions. The total least squares(TLS) algorithm is adopted to solve the overdetermined linear equations. One multifunctional sensor model with two inputs and two outputs is investigated. Input signals are reconstructed under two situations with different nonlinearities. The reconstruction relative errors are 0.162% and 1.043%, respectively. Reconstruction results using the proposed method and other existing ones are compared and analyzed. Theoretical and experimental results demonstrate that the proposed B-spline TLS approaches well to the inverse function of the nonlinear multifunctional sensor system transfer function, and it can be used for signal reconstruction.

Key words: multifunctional sensor; signal reconstruction; B-spline; total least squares(TLS)

引 言

对于实际存在的一类多参数测量问题,由于多个被测量同时交叉作用于传感器,使得传统测量方法难以应用或导致测量准确度降低。而多功能传

感器表现出多输入多输出特性,可同时敏感多个物理、化学参量,通过巧妙利用传感器的交叉敏感特性来实现多参数测量任务,提高测量准确度。近年来,随着微机械制造工艺的发展,多功能传感器以其体积小、功耗低、多功能等优势逐渐成为现代传感器发展的主流趋势之一。多功能传感器在环境

参数和工业测量^[1,2]中已经得到开发应用,在航空、航天等领域将有很大的发展潜力和广阔的应用前景。

多功能传感技术通常包含两方面内容:可敏感多个参量的多功能传感器设计和基于多功能传感器输出信号的被测量重构算法研究^[3]。重构算法的优劣直接影响多功能传感器的性能,研究稳定可靠的多元回归算法具有重要意义。

已有多功能传感器信号重构包括向上查表(Look up table, LUT)^[4]、一般最小二乘^[5]、支持向量机^[6]以及整体最小二乘^[7]等方法。当多功能传感器系统非线性程度较小时,这些方法均能获得满意的信号重构精度,而对于非线性程度较大或传函空间维数较高的多功能传感器系统的信号重构问题,存在一定的局限性。

非线性多功能传感器的信号重构可看作在高维空间构造最佳逼近曲面,而 B 样条最小二乘(Least squares, LS)方法是构造复杂曲线和曲面的重要工具^[8]。但应用 B 样条 LS 方法对被测量直接求解时,只考虑了被测量存在误差的情形。对于实际的多功能传感器系统,观测量也同样存在误差,其对被测量估计的影响更加值得关注。本文提出一种 B 样条与整体最小二乘(Total least squares, TLS)相结合的多功能传感器信号重构方法,既利用了 B 样条基函数良好的低阶光滑特性以较好地避免过拟合现象的出现,又基于 TLS 从全局数据处理角度解决输入输出信息同时存在误差情况下的高维空间传感器传函反函数的最佳逼近问题,从而实现非线性多功能传感器的信号重构。

1 张量积 B 样条曲面及其控制系数

1.1 二元张量积 B 样条曲面

高维 B 样条曲面往往通过张量积构造,理论上,通过张量积可以构造任意维 B 样条曲面。为简化描述,这里仅以三维空间中二元 B 样条曲面为例简要说明其张量积形式的构造。对于张量积 B 样条曲面,各个方向上的 B 样条可单独递推计算,计算简便、速度快;另外,根据 B 样条的递推计算,任意次 B 样条均可由两个非负的量相加组成,舍入误差小、计算稳定准确,能够克服高阶差商计算及节点分布异常时计算不稳定的问题。

给出三维空间上的实验数据点列 $\{p_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\}_{k=1}^q$,其中 α, β 为自变量, γ 为因变量, γ 的二元张量积 B 样条形式^[9]可表示为

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sum_{s=-l+1}^L \sum_{r=-m+1}^M c_{s,r} B_{s,l}(\alpha) B_{r,m}(\beta) \quad (1)$$

式中: $c_{s,r}$ 为控制系数; $B_{s,l}(\alpha)$ 和 $B_{r,m}(\beta)$ 分别为 α 和 β 方向上 l 阶和 m 阶均匀 B 样条基函数,以 $B_{s,l}(\alpha)$ 为例,它们可以通过下述递推式计算得到

$$B_{s,1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha_s < \alpha \leq \alpha_{s+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

$$B_{s,r}(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha_s}{\alpha_{s+r-1} - \alpha_s} B_{s,r-1}(\alpha) + \frac{\alpha_{s+r} - \alpha}{\alpha_{s+r} - \alpha_{s+1}} B_{s+1,r-1}(\alpha) \quad (3)$$

式中:B 样条基函数 $B_{s,l}(\alpha)$ 的节点序列为非递减均匀序列,即

$$\alpha_{-l+1} \leq \dots \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_L < \alpha_{L+1} \leq \dots \leq \alpha_{L+l}$$

该节点序列是通过对自变量 α 所在区域 $[\alpha_0 = \min_k \alpha_k, \alpha_{L+1} = \max_k \alpha_k]$ 进行均匀分划和扩展得到。

1.2 控制系数的 TLS 求解

将实验数据点列 $\{(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)\}_{k=1}^q$ 代入式(1),在满足 $q > (L+l) \times (M+m)$ 的条件下,可以得到如下超定线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{A} = \{B_{s,l}(\alpha_k) B_{r,m}(\beta_k)\}_{k=1}^q, s=-l+1, r=-m+1, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{q \times [(L+l) \times (M+m)]}$; $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{[(L+l) \times (M+m)]}$ 为待求系数列向量,由系数矩阵 $\{c_{s,r}\}$ 各列按顺序拼接而成; $\mathbf{b} = \{\gamma_k\}_{k=1}^q, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^q$ 。当系数 $c_{s,r}$ 通过适当方法求出后,即可确定二元张量积 B 样条曲面如式(1)表示样条曲面。

对于传感器信号重构,在求解系数矩阵 $\{c_{s,r}\}$ 时,若采用一般最小二乘方法求解,相当于只考虑了传感器输入的扰动(即 \mathbf{b} 的扰动, \mathbf{b} 由传感器输入信号构成,在传感器标定时可视为无误差)。实际情况是:传感器本身存在误差干扰(包括测试装置的误差),即传感器输出含有扰动(即 \mathbf{A} 的扰动, \mathbf{A} 由传感器输出信号即观测信号构成,必然含有误差),而这种扰动更加值得关注。TLS 恰能解决上述问题,即对式(4)而言,同时考虑了 \mathbf{A} 和 \mathbf{b} 的扰动,使得系数 $c_{s,r}$ 得到稳定的估计。

TLS 问题由 Golub 和 Van Loan^[10]于 1980 年提出,且文献[11~13]对 TLS 问题的可解性做过详细分析。考虑式(4)的一般情形,即

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{q \times n}, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times d}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{q \times d}$ 。通常,式(5)是超定的,不仅满足 $q > n$,同时还满足 $q > n+d$ 。

设增广矩阵(A, B)的奇异值分解(SVD)为

$$(A, B) = U \Sigma V^H \tag{6}$$

式中: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+d})$, 且 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \sigma_{n+1} \geq \dots \geq \sigma_{n+d} \geq 0$ $U \in C^{q \times q}$, $V \in C^{(n+d) \times (n+d)}$ 都是酉矩阵。

对任意整数 $p(0 \leq p \leq n+d)$, 将 V 分块为

$$V = \begin{pmatrix} V_{11}(p) & V_{12}(p) \\ V_{21}(p) & V_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix} \tag{7}$$

$p \quad n+d-p$

如果存在整数 $p(0 \leq p \leq n)$, 使得 $\sigma_p \geq \sigma_{p+1} = \dots = \sigma_{n+1}$, 并且 $\text{rank}(V_{22}(p)) = d$, 此时式(5)的解集为

$$S = \{X; X = -V_{12}Q(V_{22}Q)^{-1}, \text{其中 } Q \in C^{(n+d-p) \times d} \\ Q^H Q = I_d, \text{且 } V_{22}Q \text{ 非奇异} \} \tag{8}$$

当 $p = n$, 且 $\text{rank}(V_{22}(p)) = d$ 时, 式(5)有唯一的 TLS 解

$$X = -V_{12}V_{22}^{-1} \tag{9}$$

当 $p < n$, 且 $\text{rank}(V_{22}(p)) = d$ 时, 式(5)有极小范数 TLS 解

$$X_{\text{TLS}} = (V_{11}^H)^{\dagger} V_{21} = -V_{12}V_{22}^{\dagger} \tag{10}$$

式中 $(\cdot)^{\dagger}$ 表示矩阵 (\cdot) 的伪逆。

在实际工程应用中, 通常遇到 $p < n$ 的情形, 且增广矩阵(A, B)的后面若干个奇异值表现很接近, 即 $\sigma_{p+1} \approx \dots \approx \sigma_{n+d}$, 这时, 整数 p 的确定很关键, 可以利用关系式

$$\sigma_p > \sigma_{n+d} + \epsilon \geq \sigma_{p+1} \geq \dots \geq \sigma_{n+d} \tag{11}$$

确定整数 p , 其中 $\epsilon > 0$ 是某个很小的数^[14]。

2 非线性多功能传感器模型及信号重构算法实现

图 1 为二输入二输出多功能传感器系统的模拟电阻网络, 输入为滑动变阻器 RP_1 和 RP_2 的下部电阻值与总电阻值的比值 x 和 y , 输出为电压值 u 和 v 。图中 $V_{cc} = 5V$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, 取 $RP_1 = RP_2$, 令 $P = RP_1/R_1 = RP_2/R_2$, 由基尔霍夫定律得该多功能传感器传递函数为

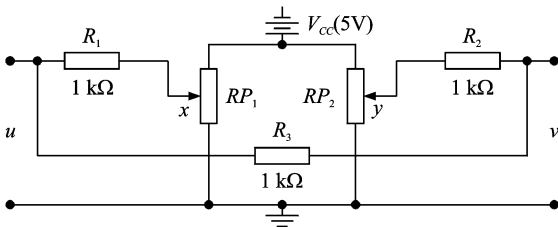


图 1 二输入二输出多功能传感器电路模型

$$\begin{cases} u = \frac{5[2x + y + Pxy(2-x-y)]}{3 + P[y(1-y) + x(1-x)]} \\ v = \frac{5[2y + x + Pxy(2-x-y)]}{3 + P[y(1-y) + x(1-x)]} \end{cases} \tag{12}$$

本文研究直接从传感器输出信号 u, v 重构传感器输入信号 x, y , 即直接构造多功能传感器传递函数的反函数。这里, x, y 的重构区域皆选取为 $[0.2 \ 0.8]$ 。自然, x, y 可分别看成以 u, v 为变量的二元 B 样条曲面, 由张量积形式二元 B 样条曲面式(1)可知, 要构造这样的曲面, 关键要通过标定实验数据确定曲面的控制系数矩阵。标定实验数据的获取按照如下规则进行: 输入 x, y 在重构区域 $[0.2 \ 0.8]$ 内以 0.05 为间隔进行取值, 呈均匀网格分布, 再由式(12)计算相应的输出 u, v , 可得到 $q = 13 \times 13 = 169$ 组标定输入输出数据。本文具体研究不同非线性情形下传感器输入信号的重构问题, 而 P 值在一定程度上反映了传感器系统的非线性情况: P 值小, 非线性小; P 值大, 非线性大。图 2 和图 3 分别显示了不同 P 值下输出 u 相对于输入 x, y 的分布情况, 显然, u 曲面在 $P = 10$ 时明显比 $P = 2$ 时弯曲。实际上, 当 P 值越大, 即系统非线性越大时, 输出 u, v 分布越集中, 且这种分布是散乱的。

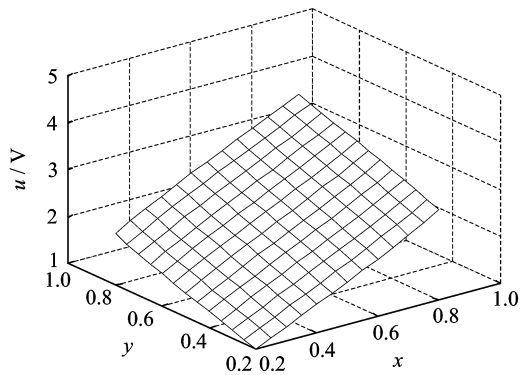


图 2 输出 u 与输入 x, y 的关系 ($P=2$)

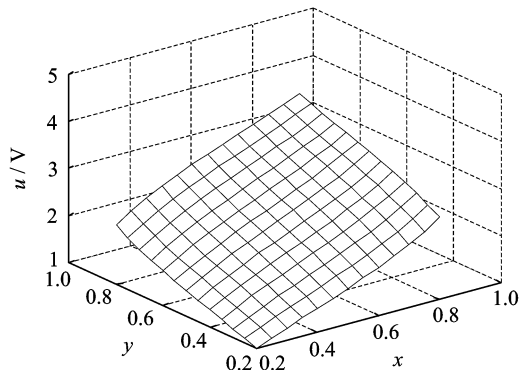


图 3 输出 u 与输入 x, y 的关系 ($P=10$)

由于图1所示电阻网络是非线性的,在对 x, y 重构时,为了构造光滑的B样条曲面,且使计算的复杂度尽量减小,B样条基函数采用4阶形式,即 $l=m=4$ 。获得的标定实验数据表示为 $\{u_k, v_k, x_k\}_{k=1}^q$ 和 $\{u_k, v_k, y_k\}_{k=1}^q$ 。

重构 x, y 的具体步骤如下:

(1)由于系统输入与输出在数值上相差较大,且量纲不一致,先将数据进行预处理,将数据归一化到 $[0, 1]$ 内,归一化后各个量分别表示为 u', v', x' 和 y' ,按下式进行归一化

$$\text{var}'_k = \frac{\text{var}_k - \text{var}_{\min}}{\text{var}_{\max} - \text{var}_{\min}},$$

$$(\text{var}_{\max} = \max_k \text{var}_k, \text{var}_{\min} = \min_k \text{var}_k)$$

$$\text{var} = u, v, x, y \quad (13)$$

(2)设 $u'_0 = \min_k u'_k = 0, u'_{L+1} = \max_k u'_k = 1, v'_0 = \min_k v'_k = 0, v'_{M+1} = \max_k v'_k = 1$,对矩形区域 $R = [0, 1] \times [0, 1]$ 作均匀划分和扩展得到 u' 和 v' 方向上B样条的节点序列如下

$$\begin{cases} u'_{-l+1} \leq \dots \leq u'_0 < u'_1 < \dots < u'_L < \\ \quad u'_{L+1} \leq \dots \leq u'_{L+l} \\ v'_{-m+1} \leq \dots \leq v'_0 < v'_1 < \dots < v'_L < \\ \quad v'_{L+1} \leq \dots \leq v'_{L+m} \end{cases} \quad (14)$$

式中,B样条基函数阶数为 $l=m=4$,内部节点数取 $L=M=8$ 。

(3)根据式(1)构造分别表示 x' 和 y' 的二元B样条曲面

$$x'(u', v') = \sum_{s=-l+1}^L \sum_{t=-m+1}^M c_{s,t} B_{s,l}(u') B_{t,m}(v') \quad (15)$$

$$y'(u', v') = \sum_{s=-l+1}^L \sum_{t=-m+1}^M \bar{c}_{s,t} B_{s,l}(u') B_{t,m}(v') \quad (16)$$

将归一化的数据点列 $\{u'_k, v'_k, x'_k\}_{k=1}^q$ 和 $\{u'_k, v'_k, y'_k\}_{k=1}^q$ 分别代入式(15,16),可以建立形如式(4)的关于系数 $c_{s,t}$ 和 $\bar{c}_{s,t}$ 的超定线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}_x \quad (17)$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{b}_y \quad (18)$$

其中,B样条的计算按照递推式(2,3)进行,节点序列在式(14)中已经给出。

(4)将式(17,18)合并,得到形如式(5)的方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{C} = [\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}}], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y], \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{q \times n}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times d}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{q \times d}, q=169, n=144, d=2$ 。

(5)求解控制系数 $c_{s,t}$ 和 $\bar{c}_{s,t}$ 。通过实际计算知,

方程组(19)是相容的,但秩亏损,即 $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A}) < n$ 。根据第1节的讨论,需通过式(11)确定整数 p ,由式(6,7,10)可以得到极小范数解 \mathbf{C}_{TLS} ,这样即确定了B样条曲面式(15)和式(16)的控制系数 $c_{s,t}$ 和 $\bar{c}_{s,t}$ 。

(6)构造曲面的测试检验。在B样条曲面的控制系数确定之后,还需要通过标定数据外的测试数据对所构造的曲面进行检验,验证该曲面方程对多功能传感器传递函数的反函数的逼近效果。测试数据的获取方法与标定数据的获取方法类似,只是 x, y 的取值间隔更小(这里取为0.01),这样可以保证在考察范围内,测试数据包含所有的标定数据。

(7)完成标定和检验后,就可以通过式(15)和式(16)对 x, y 进行重构。当然,直接由式(15)和式(16)计算得到的是 x, y 归一化的值,需经过后处理才能得到相应的 x, y ,后处理公式很容易从式(13)反求获得。

3 结果与分析

由于图1所示多功能传感器模拟网络的对称性,本文只给出被测量 x 的重构结果与分析。

如前所述,对于本文研究的电路模型及数据,方程组(19)是秩亏的,需通过式(11)先确定整数 p 。此时,需要给定参数 ϵ ,其值的合理性直接影响控制系数的稳定性,进而影响被测量 x, y 的重构效果。为了确定合理的参数 ϵ ,本文采用常用的网格搜索方法。通过网格搜索获得的 $P=2$ 和 $P=10$ 情形下 x, y 的最大重构相对误差与参数 ϵ 的关系曲线如图4和图5所示。显然,为了获得较高的重构精度,在 $P=2$ 和 $P=10$ 情形下,参数 ϵ 的值可分别取为0.002和0.008。

在 $P=2$ 和 $P=10$ 两种情形下被测量 x 的重构相对误差分布如图6,7所示,具体数值在表1中给出。这里, x 的考察范围为 $[0.2, 0.8]$,与标定范围一致。由表1可知,在 $[0.2, 0.8]$ 整个区域内: $P=2$ 时,被测量的重构相对误差 $\leq \pm 0.162\%$,满量程误差 $\leq \pm 0.159\%$,显现出很高的重构精度; $P=10$ 时,被测量的重构相对误差 $\leq \pm 1.043\%$,满量程误差 $\leq \pm 0.388\%$,虽然重构相对误差比 $P=2$ 时的稍大,但从绝对误差($\leq \pm 0.0018$)和满量程误差看,仍然显现出较高的重构精度,能够满足实际应用的要求。由于两种情形下传感器系统非线性不同,出现 $P=10$ 时重构精度相对 $P=2$ 时结果有所下降是合理的。

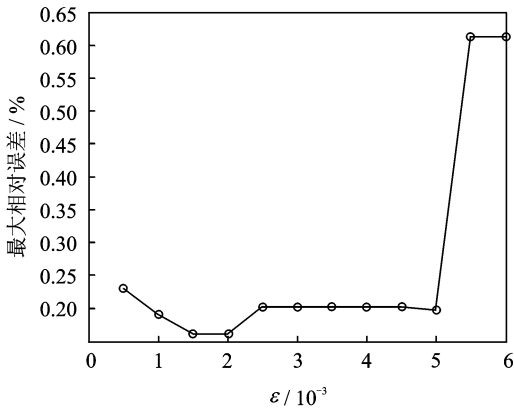


图4 $P=2$ 时最大重构相对误差与 ϵ 的关系

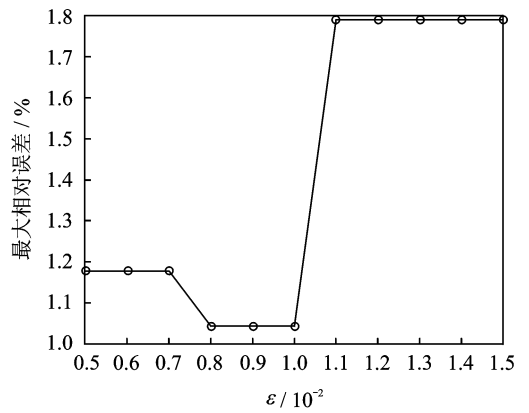


图5 $P=10$ 时最大重构相对误差与 ϵ 的关系

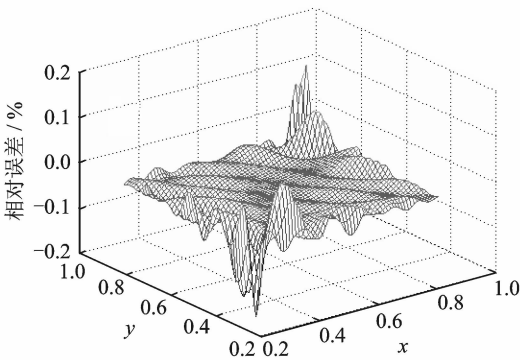


图6 $P=2$ 时输入 x 的重构相对误差分布

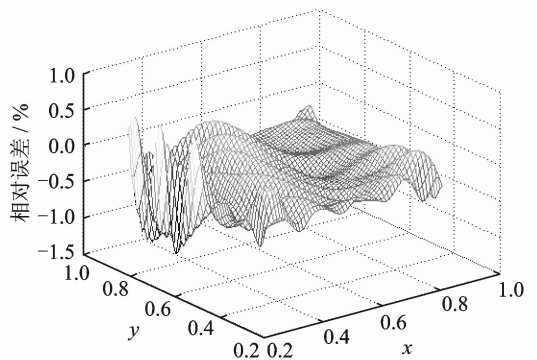


图7 $P=10$ 时输入 x 的重构相对误差分布

表1 不同非线性情形下多功能传感器输入 x 的重构结果

$P=2$				$P=10$			
考察范围[0.2 0.8]		考察范围[0.3 0.7]		考察范围[0.2 0.8]		考察范围[0.3 0.7]	
相对误差/%	满量程误差/%	相对误差/%	满量程误差/%	相对误差/%	满量程误差/%	相对误差/%	满量程误差/%
± 0.162	± 0.159	± 0.017	± 0.007	± 1.043	± 0.388	± 0.483	± 0.223

从图6,7不难发现,输入 x 的重构误差在边缘区域稍大,而在中间区域则小得多、且分布较均匀。图8、图9分别重绘了 $P=2$ 和 $P=10$ 时中间区域 $[0.3, 0.7]$ 内 x 的重构相对误差分布情况,且将具

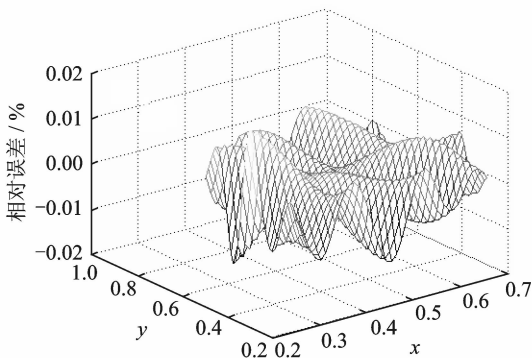


图8 $P=2$ 时输入 x 的重构相对误差分布 $([0.3, 0.7])$

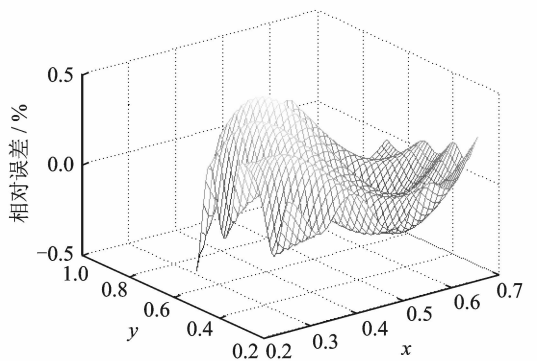


图9 $P=10$ 时输入 x 的重构相对误差分布 $([0.3, 0.7])$

体数值列于表1。由表1可知,在中间区域: $P=2$ 时,重构相对误差 $\leq \pm 0.017\%$,满量程误差 $\leq \pm 0.007\%$; $P=10$ 时,重构相对误差 $\leq \pm 0.483\%$,

满量程误差 $\leq \pm 0.223\%$ 。显然,如果在实际应用过程中将被测量的测量范围限制在比标定区域稍小的区域,可获得更高的重构精度。

针对多功能传感器信号重构问题,研究的重构方法除了支持向量机等外^[6],还包括移动最小二乘(Moving least squares, MLS)^[15]。文献[6]仅针对一种情形($P=2$)做了研究,根据该方法,以 $P=2$ 情形为例,若采用与本文相同的数据获取方法,对信号的重构相对误差在 0.30% 左右,显然在重构精度上比本文方法要差。另一方面,文献[15]基于MLS方法研究了 $P=10$ 情形,从信号重构的结果看,为了获得满意的结果,MLS方法需要较多的标定数据,计算过程也较繁琐。为进一步比较,本文根据上述数据获取方法做了进一步仿真计算,即样本数据相对较少,当考察 $[0.2 \ 0.8]$ 区域内的重构结果时,MLS对 x 的重构相对误差高于 1.5% ,重构精度要低于本文方法,且计算复杂度要高得多。

上述结果表明,B样条 TLS方法用于多功能传感器信号重构,重构模型简单,且能够获得较高的重构精度;同时,对传感器系统的非线性不是很敏感,具有较高的重构稳定性。

4 结束语

本文提出基于B样条 TLS的非线性多功能传感器信号重构方法,既利用了B样条基函数良好的低阶光滑特性以较好地避免过拟和现象的出现,又基于TLS方法,从全局数据处理角度解决了输入输出信息同时存在误差情况下的高维空间传感器传递函数反函数的最佳逼近问题,从而实现了非线性多功能传感器的信号重构。文中讨论了参数选取与重构误差的关系,在两种非线性情况下对多功能传感器的输入信号进行了重构。理论分析和实验表明,B样条 TLS方法适用于非线性多功能传感器信号重构,对系统非线性不是很敏感,表现出较高的稳定性;针对不同的系统非线性程度,均能够获得较高的重构精度。

参考文献:

- [1] Sun J, Shida K. Multilayer sensing and aggregation approach to environmental perception with one multifunctional sensor[J]. IEEE Sensors Journal, 2002,2(2):62-72.
- [2] Eftimov T A, Bock W J. A simple multifunctional fiber optic level/moisture/vapor sensor using large-core quartz polymer fiber pairs[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2006,55(6):2080-2087.
- [3] Wei G, Shida K. Estimation of concentrations of ternary solution with NaCl and sucrose based on multifunctional sensing technique[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2006,55:675-681.
- [4] Flammini A, Marioli D, Taroni A. Application of an optimal look-up table to sensor data processing[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1999,48(4):813-816.
- [5] 孙德敏,张利,王永,等. 基于乘积型最小二乘法的传感器特性拟合[J]. 传感技术学报,2002,15(4):293-297.
Sun Demin, Zhang Li, Wang Yong, et al. Fitting of sensor characteristics based on least square algorithm by product calculation principle[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2002,15(4):293-297.
- [6] 刘昕,孙金玮,刘丹. 基于支持向量回归的非线性多功能传感器信号重构[J]. 传感技术学报,2006,19(4):1167-1170.
Liu Xin, Sun Jinwei, Liu Dan. Nonlinear multifunctional sensor signal reconstruction based on support vector regression[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2006,19(4):1167-1170.
- [7] 孙金玮,刘昕,孙圣和. 基于总体最小二乘的多功能传感器信号重构方法研究[J]. 电子学报,2004,32(3):391-394.
Sun Jinwei, Liu Xin, Sun Shenghe. TLS algorithm-based study on multi-function sensor data reconstruction[J]. Acta Electronica Sinica, 2004,32(3):391-394.
- [8] 郭建锋,归庆明,杨元喜. 局部重力场的非均匀B样条最小二乘逼近[J]. 测绘学报,2000,29(3):189-192.
Guo Jianfeng, Gui Qingming, Yang Yuanxi. Study of non-uniform b-spline least squares and its applications in regional gravity field[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000,29(3):189-192.
- [9] 荣成城,周健,罗立民. 基于B样条插值函数的人脑MR图像非刚体配准方法[J]. 数据采集与处理,2007,22(1):78-83.
Rong Chengcheng, Zhou Jian, Luo Limin. Non-rigid method for brain MR image registration based on B-splines interpolation function[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2007,22(1):78-83.
- [10] Golub G H, Van Loan C F. An analysis of the total least squares problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980,17(3):883-893.
- [11] 罗武安. 广义完全最小二乘问题可解的充分必要条件

- [J]. 北京大学学报:自然科学版,2000,36(1):1-7.
- Luo Wuan. A sufficient and necessary condition for the solvability of general total least squares problem [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2000,36(1):1-7.
- [12] 魏木生. 关于 TLS 和 LS 解的扰动分析[J]. 计算数学,1998,20(3):267-278.
- Wei Musheng. On the perturbation of the LS and the TLS problems [J]. Mathematica Numerica Sinica, 1998,20(3):267-278.
- [13] 魏木生,朱超. 关于 TLS 问题[J]. 计算数学,2002,24(3):345-352.
- Wei Musheng, Zhu Chao. On the total least squares problem[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2002,24(3):345-352.
- [14] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
- Zhang Xianda. Matrix Analysis and Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [15] 刘丹,孙金玮,魏国,等. 移动最小二乘法在多功能传感器数据重构中的应用[J]. 自动化学报,2007,33(8):823-828.
- Liu Dan, Sun Jinwei, Wei Guo, et al. Application of moving least squares to multi-sensors data reconstruction[J]. Acta Automatica Sinica, 2007,33(8):823-828.

作者简介:刘剑(1982-),男,讲师,研究方向:主动噪声控制、自适应信号处理及传感器信号处理,E-mail:jliu@nuaa.edu.cn;魏国(1966-),男,教授,研究方向:测控系统、多功能敏感技术及信号处理;孙金玮(1964-),男,教授,研究方向:传感器技术、仪器测量及信号处理。