

文章编号:1004-9037(2012)01-0020-07

两种基于自适应相位补偿的FDOA估计算法

罗柏文 万明康 于宏毅

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州, 450002)

摘要:将约束的自适应相位差估计补偿算法引入到频偏估计当中,实现信号间相位对齐。然后,利用自适应相位补偿因子,根据估计方式的不同,给出了两种频偏估计算法:基于时间平均的算法与基于线性拟合的算法。基于时间平均的频偏估计算法是一种渐进无偏的估计算法,具有可控的误差和非常小的均方差,以及计算简单的特点。仿真结果表明当信号信噪比大于-3 dB时,基于线性拟合的频偏估计算法性能与CRLB非常接近。

关键词:到达频差估计;自适应相位补偿;时间平均;线性拟合

中图分类号:TN911.7

文献标识码:A

Two Algorithms for FDOA Estimation Based on Adaptive Phase Compensator

Luo Bowen, Wan Mingkang, Yu Hongyi

(School of Information Engineering, Information Engineering University of PLA, Zhengzhou, 450002, China)

Abstract: The adaptive phase shift compensator is introduced to estimate the frequency difference of arrival (FDOA), by aligning the time-varying phase shift adaptively. According to different computational methods, two estimation algorithms, i. e., the algorithm based on time average and the algorithm based on linear fitting, are proposed by using adaptive compensation factors. The estimator based on time average is asymptotically unbiased, with controllable error, small mean square error and low computational complexity. Simulation results show that the performance of the algorithm based on linear fitting is close to CRLB when signal SNR is more than -3 dB.

Key words: frequency difference of arrival (FDOA); adaptive phase compensation; time average; linear fitting

引 言

到达频差估计(Frequency difference of arrival, FDOA)在通信系统、定位系统中都具有重要地位。相对于非常短的信号采样间隔,根据频偏产生的原理,可以把到达频偏分为时变频偏和非时变频偏。发射天线与接收天线之间如果有相对运动,接收信号就会有多普勒频率偏移。由于该相对运动的速率往往是时变的,因此多普勒频移被认为是时变频偏。对于通信系统,以及采用多接收机结构例如天线阵、传感器网等的系统,由发射机与接收机

之间,以及不同接收机之间本地振荡器的频差变化非常缓慢,因此该频偏可以认为是非时变。对于通信系统,期望消除频偏,对于定位系统,则期望利用频偏,因此作为必不可少的信号处理环节,FDOA估计在各种通信系统、雷达声纳等定位系统、电磁传感网、天线阵系统中均有重要应用。

目前,针对不同的应用环境,已提出了许多频偏估计算法。例如,文献[1,2]中提到了许多基于数据辅助的频率估计算法,如对数包络法、自相关函数法、各阶电平通过率法和均方相位差分法。基于数据辅助的频偏估计算法可以获得较好的估计性能,通用性差是它们的主要问题之一。而文献[3]总

基金项目:国家高技术研究发展计划(“八六三”计划)(2009AA011504)资助项目;国家科技重大专项(2010ZX03006-002)资助项目。

收稿日期:2011-03-09;修订日期:2011-05-05

结了许多通过信号协方差矩阵特征值计算频偏的算法,这些算法的主要问题之一是计算量大,尤其是当信号的频偏时变时更是如此。另外,对于以信号同步为目的的频偏估计应用中,由于估计误差的客观存在,使得信号经过频偏补偿后还可能存在一定的累积相位差。自适应类算法能够将相位差异补偿与频偏估计结合起来,在估计时变参数方面具有独特的优势,因此D. M. Etter和D. R. Hush提出了基于时变延迟的自适应频率估计器(Adaptive frequency estimator, AFE)^[4],用于估计带噪声的单音正弦信号频率。他们将两个单音正弦信号之间的频率差异转化为时变的延迟差异,自适应滤波器的形式约束为基于SINC函数的延迟滤波器。在AFE基础上,许多研究者分别对自适应频偏估计算法进行了研究,并且将AFE算法推广至基于高采的窄带信号间频偏估计,提出了直接频偏估计、状态空间法、线性预测法、最小二乘法以及基于时变延迟的频偏估计等算法^[5-13]。

针对更为一般的信号,本文将文献[4-9]的自适应原理推广应用于相位差的估计与补偿,在对自适应相位差补偿算法进行研究分析的基础上,利用所估计的时变相位偏差,计算相位偏差变化率,从而估计出信号间频偏量。本文分别采用时间平均和线性拟合的方式获得了信号之间的频偏估计,而根据频偏估计方式的不同,得到两种频偏估计算法。

1 自适应相位差补偿算法

多个传感器所接收的信号之间存在初始相位差异,该相位差异由接收机本地振荡器差异、传感器布局、信号传输等多个方面综合产生。以两路信号为例,信号可以建模为

$$\begin{cases} x_1(k) = s(k) + n_1(k) \\ x_2(k) = s(k)e^{j\theta_0} + n_2(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 为两路信号,信号间除了噪声的差异外,还存在固定相位偏差 θ_0 。 $s(k)$ 为平稳的未知信号。 $n_1(k)$ 和 $n_2(k)$ 为两路信号的加性高斯白噪声,服从独立不相关的复高斯分布,均值为0,方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 。 k 为采样时刻,不失一般性,这里假设采样间隔为1 s。

1.1 算法简介

文献[4-9]自适应算法中,通过对输入信号进行信号延迟的自适应补偿,使得补偿后的信号与参考信号对齐,并在最小均方误差准则下计算和修正信号延迟补偿因子。自适应相位差补偿算法是将自

适应原理应用于相位差的估计与补偿中,其系统框图如图1所示。在自适应相位差估计系统中,两路信号 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 分别作为输入信号和参考信号。 $\hat{\theta}(k)$ 表示的是 k 时刻相位差 θ_0 的估计值。将信号 $x_1(k)$ 利用估计的相位差 $\hat{\theta}(k)$ 进行补偿后,与参考信号 $x_2(k)$ 相减,计算此时的误差信号 $e(k)$ 。最后,基于最小均方误差准则,计算和更新下一时刻的相位差估计值。从系统框图可以看出,误差信号 $e(k)$ 可以表示为

$$e(k) = x_2(k) - x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)} \quad (2)$$

对式(2)两边进行模平方运算,再取均值得

$$\begin{aligned} E[|e(k)|^2] &= E[|x_2(k) - x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)}|^2] = \\ &R_s(0)E[|e^{j\theta_0} - e^{j\hat{\theta}(k)}|^2] + \\ &\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = R_s(0)\xi(k) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\xi(k) = E[|e^{j\theta_0} - e^{j\hat{\theta}(k)}|^2] \quad (4)$$

$R_s(0)$ 是信号 $s(k)$ 的自相关函数,是由信号 $s(k)$ 完全确定的未知固定值, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 也是由噪声 $n_1(k)$ 和 $n_2(k)$ 确定的定值。

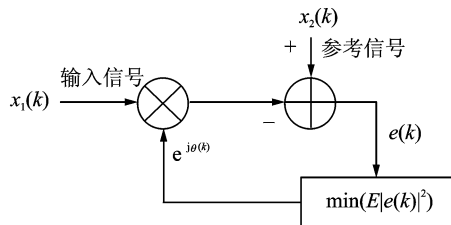


图1 自适应相位差补偿算法系统框图

因此,由式(3)可知,当 $\xi(k)$ 取得最小值时,信号的均方误差最小。而当且仅当 $\hat{\theta}(k)$ 在模 2π 条件下等于 θ_0 时, $\xi(k)$ 取得最小值。因此,可以通过最小化均方误差准则估计相位差 θ_0 。对于此类问题,利用瞬时值代替平均值,并采用梯度算法来搜索最小值是一个常用的处理方法。根据最速下降算法原理,梯度 $\nabla(k)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \nabla(k) &= \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \hat{\theta}(k)} = e^*(k) \frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}(k)} + \\ &e(k) \frac{\partial e^*(k)}{\partial \hat{\theta}(k)} = j[e(k)x_1^*(k)e^{-j\hat{\theta}(k)} - \end{aligned}$$

$$e^*(k)x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)}] = 2\text{Im}\{e^*(k)x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)}\} \quad (5)$$

其中 $e^*(k)$ 表示 $e(k)$ 的复共轭,符号 Im 为取复数的虚部运算。在获得误差梯度 $\nabla(k)$ 条件下,进行相位偏差的更新, $k+1$ 时刻的相位偏差估计值 $\hat{\theta}(k+1)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) - \frac{1}{2}\mu\nabla(k) = \\ &\hat{\theta}(k) - \mu\text{Im}\{e^*(k)x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)}\} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 μ 是相位偏差更新的步长因子,通常设置为一个小的正数。

自适应相位差补偿算法可以总结为以下几个步骤:

(1) 相位差补偿

$$x_1'(k) = x_1(k)e^{j\hat{\theta}(k)} \quad (7)$$

(2) 误差计算

$$e(k) = x_2(k) - x_1'(k) \quad (8)$$

(3) 根据式(6)进行相位偏差更新。

1.2 自适应相位差补偿算法分析

由将式(1,2)代入式(6)得

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \mu \cdot \text{Im}\{[[s^*(k)e^{-j\theta_0} + n_2^*(k)][s(k) + n_1(k)]e^{j\hat{\theta}(k)} - x_1^*(k)x_1(k)]\} \quad (9)$$

设信号 $s(k)$ 服从与噪声独立的零均值高斯分布,方差 σ_s^2 。对式(9)取均值,有

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}(k+1)] &= E[\hat{\theta}(k)] - \mu \cdot \text{Im}\{E[[s^*(k)e^{-j\theta_0} + n_2^*(k)][s(k) + n_1(k)]e^{j\hat{\theta}(k)} - x_1^*(k)x_1(k)]\} = \\ &= E[\hat{\theta}(k)] - \mu \cdot \text{Im}\{\sigma_s^2 e^{jE[\hat{\theta}(k)] - j\theta_0} - (\sigma_s^2 + \sigma_{n_1}^2)\} = \\ &= E[\hat{\theta}(k)] - \mu\sigma_s^2 \sin(E[\hat{\theta}(k)] - \theta_0) \approx \\ &= (1 - \mu\sigma_s^2)E[\hat{\theta}(k)] + \mu\sigma_s^2 \theta_0 \quad (10) \end{aligned}$$

解得 $E[\hat{\theta}(k)]$ 为

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}(k)] &= (1 - \mu\sigma_s^2)^k E[\hat{\theta}(0)] + \\ &= \mu\sigma_s^2 \theta_0 \frac{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k}{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)} = (1 - \mu\sigma_s^2)^k E[\hat{\theta}(0)] + \\ &= \theta_0 [1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k] \quad (11) \end{aligned}$$

其中 $\hat{\theta}(0)$ 是算法设置的初值,不妨设为 0。因此由式

(11)可知,当 $|1 - \mu\sigma_s^2| < 1$, 即 $-\frac{1}{\sigma_s^2} < \mu < \frac{1}{\sigma_s^2}$ 时,均值 $E[\hat{\theta}(k)]$ 的极限为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}(k)] = \theta_0 \quad (12)$$

因此,算法为渐进无偏估计。

关于 μ 的取值对算法的影响,在文献[14]中有详细的讨论。总体来说,在满足算法收敛性要求条件下, μ 值越大,算法的跟踪能力越强,但是同时估计值的方差也越大。因此,对于非时变的相位偏差而言,为了提高估计精度, μ 可以取一个非常小的正数。而对于如信号间存在固定频率偏移的时变相位偏差的信号, μ 值应当随着频率偏移量的增大而适当提高,否则可能无法跟踪时变相位偏差。

2 基于自适应相位差补偿的频偏估计算法

自适应类算法的一个重要特点在于具备良好

的跟踪性能,可以用于适用于时变参数估计。对于时变的相位偏差,式(1)的信号模型可以相应地修改为

$$\begin{cases} x_1(k) = s(k) + n_1(k) \\ x_2(k) = s(k)e^{j\theta(k)} + n_2(k) \end{cases} \quad (13)$$

因此均方误差表示为

$$E[|e(k)|^2] = R_s(0)E[|e^{j\theta_0(k)} - e^{j\hat{\theta}(k)}|^2] + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (14)$$

由式(14)可知,当且仅当 $\hat{\theta}(k)$ 在模 2π 条件下等于 $\theta(k)$ 时,取得最小值均方误差。利用最小均方误差准则的自适应算法同样可以估计和跟踪时变的相位偏差。

当信号间存在固定的频率偏差时,相位偏差是线性时变的,可以表示为

$$\theta(k) = vk + \theta_0 \quad (15)$$

其中 v 是两路信号之间的频率偏差。当以采样速率做归一化的频率偏差相对较小时,自适应算法可以很好地跟踪和补偿线性时变相位差异;当归一化频率偏移增大时,该自适应相位补偿算法仍然可以锁定相位差变化率,但可能存在较大的估计补偿误差;当归一化频率偏移进一步增大,超出了算法的跟踪能力范围,算法将出现失锁状态。因此,在归一化频率偏差不太大,自适应相位差补偿算法可以锁定由于频偏引起的线性时变相位条件下,通过相位偏差变化率,可以相当方便地估计出频率偏差。

2.1 基于时间平均的频偏估计算法

(算法 1)

根据式(15)可知,相位偏差的变化率 v 可以用以下方式进行估计

$$\hat{v}(k) = \frac{\hat{\theta}(k)}{k} \quad (16)$$

其中 $\hat{v}(k)$ 是 k 时刻对 v 的估计。估计 $\hat{v}(k)$ 的均值为

$$E[\hat{v}(k)] = E\left[\frac{\hat{\theta}(k)}{k}\right] = E\left[\frac{\theta(k)}{k}\right] = v + \frac{\theta_0}{k} \quad (17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{v}(k)] = v \quad (18)$$

由式(18)可知,该估计是渐进无偏估计的。不仅如此,相位估计算法进行 M 次迭代计算(M 为相对较大的整数),完成收敛后,通过求估计值 $\hat{v}(k)$ 时间平均的方法,能够显著降低估计频偏估计的方差。

$$\hat{v} = \frac{1}{K - M + 1} \sum_{k=M}^K \hat{v}(k) \quad (19)$$

其均值为

$$E[\hat{v}] = \frac{1}{K-M+1} \sum_{k=M}^K E[\hat{v}(k)] = \frac{1}{K-M+1} \sum_{k=M}^K \frac{(vk + \theta_0)[1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k]}{k} = v + \frac{\theta_0}{K-M+1} \sum_{k=M}^K \frac{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k}{k} = v + \Delta v \quad (20)$$

其中估计偏差 $\Delta v = \frac{\theta_0}{K-M+1} \cdot \sum_{k=M}^K \frac{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k}{k}$ 。取关于 M 的极限得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Delta v = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta_0}{K-M+1} \sum_{k=M}^K \frac{1 - (1 - \mu\sigma_s^2)^k}{k} \right] < \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta_0}{K-M+1} \sum_{k=M}^K \frac{1}{M} \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta_0}{M} \right] = 0 \quad (21)$$

由式(21)可知,当 M 趋于 ∞ 时,估计偏差极限等于0。同时,由 $K \geq M$ 的假设条件可知当 M 趋于 ∞ 时, K 亦趋于 ∞ ,算法1为渐进无偏估计。通过参数 M 和 K 的调整,算法1的估计偏差可控的。

2.2 基于线性拟合的频偏估计算法 (算法2)

由于 $\theta(k)$ 满足式(15),设相差估计值 $\hat{\theta}(k)$ 满足

$$\hat{\theta}(k) = \hat{v}k + \hat{\theta}_0 + \varepsilon(k) \quad (22)$$

其中 $k=M, M+1, \dots, K$ 。利用最小二乘线性拟合可以获得直线的斜率 v 的估计值

$$\hat{v} = \alpha_1 \sum_{k=M}^K k \hat{\theta}(k) + \alpha_2 \sum_{k=M}^K \hat{\theta}(k) \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\beta_0}{\beta_0\beta_2 - \beta_1^2} \\ \alpha_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_0\beta_2 - \beta_1^2} \\ \beta_0 = K - M + 1 \\ \beta_1 = \frac{1}{2}[K(K+1) - M(M-1)] \\ \beta_2 = \frac{1}{6}[K(K+1)(2K+1) - M(M-1)(2M-1)] \end{cases} \quad (24)$$

3 频偏和初始相偏联合估计的CRLB

两路存在频偏和初始相位偏差的信号模型如式(25)所示

$$\begin{cases} x(k) = s(k) + n_1(k) = s_r(k) + n_{1r}(k) + [s_i(k) + n_{1i}(k)]i \\ y(k) = s(k)e^{jv_k + \theta_0} + n_2(k) = [s_r(k)\cos\theta_k - s_i(k)\sin\theta_k + n_{2r}(k)] + [s_r(k)\sin\theta_k + s_i(k)\cos\theta_k + n_{2i}(k)]i \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\theta_k = vk + \theta_0$ 。 $s(k)$, $n_1(k)$ 和 $n_2(k)$ 均为平稳高斯随机过程,且互不相关,均值为0,方差分别为 σ_s^2 , σ_1^2 和 σ_2^2 。求频偏估计 \hat{v} 和初始相偏估计 $\hat{\theta}_0$ 的Cramer-Rao下界。

数据样点 $x(k)$ 和 $y(k)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_k, y_k | \theta_k) = (2\pi)^{-2} |\mathbf{C}_k|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_k' \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{X}_k} = \mathbf{A}_k e^{\mathbf{B}_k} \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}_k = (2\pi)^{-2} |\mathbf{C}_k|^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{B}_k = -\frac{1}{2} \mathbf{X}_k' \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{X}_k \end{cases} \quad (27)$$

协方差矩阵为

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s^2 + \sigma_1^2}{2} & 0 & \frac{\sigma_s^2 \cos\theta_k}{2} & \frac{\sigma_s^2 \sin\theta_k}{2} \\ 0 & \frac{\sigma_s^2 + \sigma_1^2}{2} & -\frac{\sigma_s^2 \sin\theta_k}{2} & \frac{\sigma_s^2 \cos\theta_k}{2} \\ \frac{\sigma_s^2 \cos\theta_k}{2} & -\frac{\sigma_s^2 \sin\theta_k}{2} & \frac{\sigma_s^2 + \sigma_2^2}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_s^2 \sin\theta_k}{2} & \frac{\sigma_s^2 \cos\theta_k}{2} & 0 & \frac{\sigma_s^2 + \sigma_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

协方差矩阵的行列式为

$$|\mathbf{C}_k| = \frac{(-\sigma_s^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sigma_s^2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2)^2}{16} \quad (29)$$

因此, K 对数据样点的联合条件概率密度函数为

$$f(\mathbf{x} | v, \theta_0) = f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n | \theta_k) = \prod_{k=1}^K f(x_k, y_k | \theta_k) = \left(\prod_{k=1}^K \mathbf{A}_k \right) \left(e^{\sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k} \right) \quad (30)$$

从而对数似然函数为

$$\ln(\mathbf{x} | v, \theta_0) = \ln\left(\prod_{k=1}^K \mathbf{A}_k \right) + \ln\left(e^{\sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k} \right) = \sum_{k=1}^K \ln \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k \quad (31)$$

由式(27, 28)可知 $\frac{\partial^2 \ln |\mathbf{C}_k|}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \ln |\mathbf{C}_k|}{\partial \theta_0^2} = 0$,

$\frac{\partial^2 \ln |\mathbf{C}_k|}{\partial \theta_0 \partial v} = 0$, $\frac{\partial^2 \ln |\mathbf{C}_k|}{\partial v \partial \theta_0} = 0$, 式(31)的二次偏导为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial v^2} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\sum_{k=1}^K \ln \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k \right) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 \mathbf{B}_k}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial \theta_0^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_0^2} \left(\sum_{k=1}^K \ln \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k \right) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 \mathbf{B}_k}{\partial \theta_0^2} \\ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial v \partial \theta_0} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial \theta_0} \left(\sum_{k=1}^K \ln \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k \right) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 \mathbf{B}_k}{\partial v \partial \theta_0} \\ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial \theta_0 \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_0 \partial v} \left(\sum_{k=1}^K \ln \mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k \right) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial^2 \mathbf{B}_k}{\partial \theta_0 \partial v} \end{cases} \quad (32)$$

因此

$$J_{11}(v, \theta_0) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial v^2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K E \left[\frac{4\sigma_s^2 k^2 (x_1 x_3 \cos \theta_k + x_1 x_4 \sin \theta_k - x_2 x_3 \sin \theta_k + x_2 x_4 \cos \theta_k)}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} \right] =$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{2k^2 \sigma_s^4}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)(2K+1)}{3(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)}$$

$$J_{12}(v, \theta_0) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial v \partial \theta_0} \right\} =$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{2k\sigma_s^2 (E[x_1 x_3] \cos \theta_k + E[x_1 x_4] \sin \theta_k - E[x_2 x_3] \sin \theta_k + E[x_2 x_4] \cos \theta_k)}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} =$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{2k\sigma_s^4}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1}$$

$$J_{21}(v, \theta_0) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial \theta_0 \partial v} \right\} = \sum_{k=1}^K \frac{2k\sigma_s^4}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1}$$

$$J_{22}(v, \theta_0) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x} | v, \theta_0)}{\partial \theta_0^2} \right\} =$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{2\sigma_s^2 (E[x_1 x_3] \cos \theta_k + E[x_1 x_4] \sin \theta_k - E[x_2 x_3] \sin \theta_k + E[x_2 x_4] \cos \theta_k)}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} =$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{2\sigma_s^4}{\sigma_s^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 K}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1}$$

Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{J}(v, \theta_0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)(2K+1)}{3(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)} & \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1} \\ \frac{\gamma_1 \gamma_2 K(K+1)}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1} & \frac{2\gamma_1 \gamma_2 K}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{J}^{-1}(v, \theta_0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K^2 - 1)} & \frac{-3(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K - 1)} \\ \frac{-3(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K - 1)} & \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)(2K + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K - 1)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

因此, 频偏估计 \hat{v} 和初始相偏估计 $\hat{\theta}_0$ 的 Cramer-Rao 下界为

$$\begin{cases} \text{CRLB}(\hat{v}) = \frac{6(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K^2 - 1)} \\ \text{CRLB}(\hat{\theta}_0) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)(2K + 1)}{\gamma_1 \gamma_2 K(K - 1)} \end{cases} \quad (35)$$

4 算法仿真

在 Matlab 仿真中, 采用式(13)的两路信号模型, 其中信号 $s(k)$ 是方差为 1 的零均值高斯随机变量, 信号采样速率为 1 Hz。

4.1 自适应相位差补偿算法仿真

信号 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 的信噪比均为 3 dB, 且信号

间存在固定相位偏差, 大小为 $\frac{\pi}{3}$ rad。仿真中相位偏差估计的初始值设为 0, μ 分别取 0.05, 0.01, 0.005, 0.002。相位偏差估计曲线如图 2 所示, 更新步长因子 μ 取不同值时的相位偏差估计曲线。

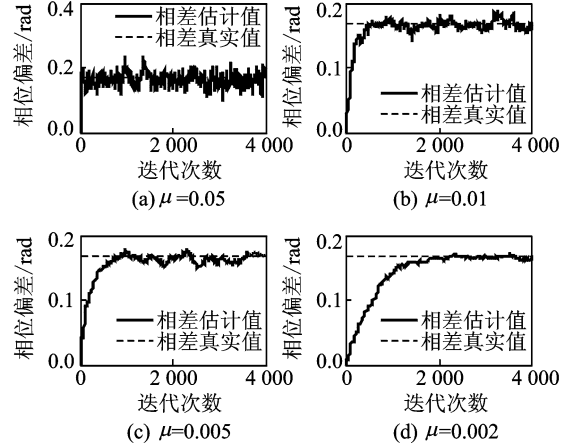


图 2 相位估计跟踪曲线

从图 2 的仿真结果可以看出, 通过算法的迭代运算, 实现了对信号间相位偏差的估计和补偿。随着 μ 的减小, 相位偏差估计精度相应地提高, 收敛后估计值的抖动减小。但是同时, 算法收敛时间也增长。因此, 从仿真中可以看出, 估计的方差与收敛速度之间矛盾。为了获得较快的收敛速度和较小的估计方差, 可以对算法进行改进, 采用可变步长因子, 是兼顾收敛速度与精度的有效方法^[14]。在算法收敛过程中, 采用较大的步长因子, 可以加快收敛速度, 而当算法收敛后, 则改用相对较小的步长因子, 以获得较好的估计精度。

4.2 频偏估计性能仿真

采样速率 1 Hz, 信号间归一化频率偏移为 0.001, 信号间初始相位差 θ_0 为 $\frac{\pi}{3}$ rad. $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 的信噪比均为 $-7 \sim 10$ dB. 在仿真中, 步长因子 $\mu=0.05$. 采样点数为 K , 进行 1000 次独立仿真, 仿真结果如图 3 和图 4 所示.

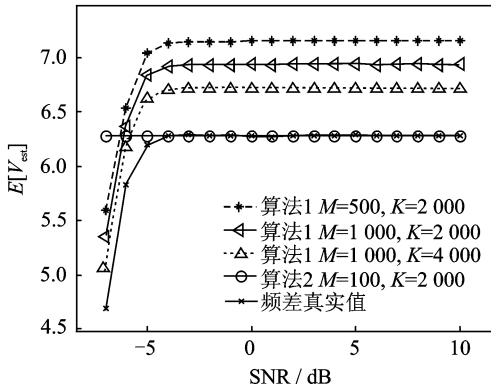


图3 频偏估计的均值

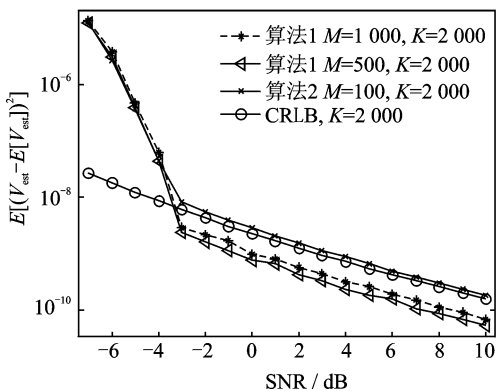


图4 频偏估计的方差性能

图3显示的是不同信噪比条件下算法1和算法2频偏估计均值。从图中可以看出, 自适应频偏估计算法具有门限效应, 既当输入两路信号的信噪比小于 -5 dB 时, 由于自适应相位跟踪算法没有跟上频偏变化, 算法1和算法2均无法对频偏进行有效估计。当信噪比大于算法门限时, 算法1是有偏估计, 算法2是无偏估计。从式(20)可以看出, 该算法1的估计偏差由参数 θ_0 , $\mu\sigma_s^2$, M 和 K 等决定, 在 θ_0 和 $\mu\sigma_s^2$ 一条件下, 偏差随着 M 和 K 值的增大而减小, 因此该偏差是可控的。图3的仿真结果与该式所反应的现象一致。

图4显示的是算法1和算法2利用 2 000 个采样点进行频差估计时的方差性能。从图中可以看出, 当信噪比大于 -3 dB 时, 频差估计的方差随着信噪比线性下降。对比图3的结果可以看出, 算法1

中参数 M 的值越大, 频偏估计的均值离真实值越近, 同时其方差越大, 因此 M 值的选取需要综合考虑该算法的均值方差和方差特性。算法2不仅是无偏估计, 而且性能接近克拉米罗下界(CRLB)。当信号的信噪比大于 -3 dB 时, 算法2的方差性能与CRLB的距离小于 1 dB。

5 结束语

基于自适应相位差估计补偿算法, 本文提出了两种频偏估计补偿算法。算法1为渐进无偏估计算法, 具有计算量相对较小、方差性能优异的特点。另外, 由于无需存储频差估计的瞬时值, 通过确定不同的时间起点, 可以实现对时变频偏的跟踪。而算法2具有估计计算精度较高, 性能优异的特点, 是一种性能接近CRLB的无偏估计算法。这两种频偏估计算法的缺点在于具有较高的信噪比门限, 这是由自适应相位估计算法门限所决定的。因此, 如何降低算法门限, 使之适应更低的信噪比条件下的FDOA估计。

另外, 本文提出的两种频偏估计算法, 主要针对的是非时变频偏估计问题。基于自适应相位差估计补偿算法, 针对特定的频偏变化的模型, 通过例如高阶的线性拟合等方法, 可以获得时变频偏的估计。因此, 如何利用基于自适应相位差补偿算法, 解决时变频偏估计问题, 需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Lovell B C, Williamson R C. The statistical performance of some instantaneous frequency estimators [J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, Signal Processing, 1992, 40(7):1708-1723.
- [2] Hua Jingyu, You Xiaohu. Doppler shift estimation methods in mobile communication systems [J]. Journal of Southeast University: English Edition, 2004, 20(4):405-411.
- [3] Tufts D W, Melissinos C D. Simple, effective computation of principal eigenvector and their eigenvalues and application to high-resolution estimation of frequencies [J]. Proc Int Conf Acoust, Speech, Signal Processing, 1985:951-954.
- [4] Etter D M, Hush D R. A new technique for adaptive frequency estimation and tracking [J]. IEEE Trans ASSP, 1987, 35:561-564.
- [5] Dooley S R, Nandi A K. Adaptive time delay and Doppler shift estimation for narrowband signals [J]. IEE Proc Radar, Sonar Navig, 1999, 146(5):243-

- 250.
- [6] Zheng Cheng, Tjhung T T. Explicit frequency estimation and tracking using modulated lagrange delay filter[C]//2005 Asia-Pacific Conference on Communications. Perth, Western Australia:[s. n.], 2005: 916-920.
- [7] Cheng Z, Tjhung T T. Accurate explicit frequency estimation using modulated lagrange delay filter[C] //The 2nd IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology. Marrakech, Morocco:[s. n.], 2002:634-639.
- [8] Punchalard R, Koseeyaporn J, Wardkein P. Indirect frequency estimation based on second-order adaptive FIR notch filter [J]. Signal Processing, 2009, 89 (7):1428-1435.
- [9] So H C, Ching P C. Adaptive algorithm for direct frequency estimation [J]. IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation, 2004, 151(6):359-364.
- [10] Pitschel T, So H C, Zheng J. New adaptive algorithm for unbiased and direct estimation of sinusoidal frequency[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, E91-A, 2008(3):872-874.
- [11] Wu Y, So H C, Tan Y. Joint time-delay and frequency estimation using parallel factor analysis[J]. Signal Processing, 2009, 89:1667-1670.
- [12] Lui K W K, So H C. Time delay estimator based on frequency estimation approach[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, E93-A, 2010 (6): 1248-1250.
- [13] Chan F K W, So H C, Lau W H, et al. Structured total least squares approach for efficient frequency estimation [J]. Signal Processing, 2011, 91(4):1043-1047.
- [14] Haykin S. Adaptive filter theory[M]. Fourth Edition. Englenwood Cliffs, NJ: Pretice-Hall, 2002.
- 作者简介:**罗柏文(1980-),男,博士研究生,研究方向:多天线组阵技术, E-mail: lbw1001825@163.com; 万明康(1983-),男,博士研究生,研究方向:多天线合成技术; 于宏毅(1963-),男,博士生导师,教授,研究方向:通信中的信号处理。